INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

ESCUELA DE GRADUADOS

# COMPARACION DE DOS METODOS DE BUSQUEDA LINEAL EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACION

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OPTAR AL GRADO ACADEMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
ESPECIALIDAD EN INVESTIGACION DE OPERACIONES
POR
GERMAN BARON MACIAS

1973

INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

ESCUELA DE GRADUADOS

SEÑOR DIRECTOR DE LA ESCUELA DE GRADUADOS:

LA TESIS ELABORADA POR EL SEÑOR INGENIERO

GERMAN BARON MACIAS

COMPARACION DE DOS METODOS DE BUSQUEDA LINEAL EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACION

HA SIDO ACEPTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

ESPECIALIDAD EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.

COMITÉ SUPERVISOR DE TESIS

| ASESOR | SINODAL | SINODAL |
| --- | --- | --- |
| ING. FERNANDO GONZÁLEZ V. | DR. BENITO FLORES S. | ING. ROBERTO ALANÍS |

JEFE DEL DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

COMITÉ DE LA ESCUELA DE GRADUADOS

ING. FRANCISCO VERA E., M.C.

SÓLO SE PODRÁN PUBLICAR LOS DATOS DE ESTA TESIS CON AUTORIZACIÓN DEL COMITÉ DE LA ESCUELA DE GRADUADOS.

# I N D I C E



- - - - - - - - - - -

# SUMARIO

Uno de los aspectos importantes en los problemas de búsqueda de óptimos en una función de varias variables, cuando se usan métodos secuenciales de direcciones factibles, es el relacionado con la localización de extremos en una dirección lineal y en un espacio de N dimensiones.

Este sub-problema al problema original, requiere en muchos casos gran parte del esfuerzo computacional necesario para poder llegar a una solución.

El propósito de este trabajo, es la observación de los efectos que tiene el uso de dos métodos diferentes de búsqueda a lo largo de una línea.

El primero de ellos, desarrollado por Davies, Swann y Campey, y el segundo correspondiente a un método combinado cuya fase inicial es similar a la del procedimiento anterior pero con una fase final de localización de extremo, por el método Golden-Search.

La justificación y presentación detallada de estos métodos, así como los algoritmos que los contienen, se presenta en el texto de este trabajo.

De las pruebas realizadas, se lograron conclusiones parciales, que indicaban que el primero de los métodos propuestos es más conveniente que el segundo. Las conclusiones son parciales en el sentido de que son el producto de los resultados obtenidos y no pueden ser generalizados, sin antes comprobar una gran variedad de situaciones.

# CAPITULO I

# INTRODUCCION

## 1.1.- ENFOQUE Y CONSIDERACIONES GENERALES.

La optimización de funcionales con o sin restricciones constituye el problema central de la programación matemática.

Un problema de búsqueda, trata de determinar mediante algún procedimiento, un conjunto de valores de las variables independientes y un valor asociado del funcional, donde se cumple la condición de tener un valor máximo o mínimo del mismo.

La determinación de métodos que permitan determinar soluciones a los problemas de optimización, ha dado lugar a la creación de la programación matemática que proporciona los fundamentos teóricos y aún prácticos para el análisis de una gran variedad de situaciones.

Se puede dividir el desarrollo teórico de la optimización, en categorías de acuerdo a su complejidad: problemas de tipo lineal, cuya solución por métodos algorítmicos está claramente definida y generalizada. La programación cuadrática, o sea aquella que tiene como propósito la solución de problemas con función objetivo cuadrática y restricciones lineales, se puede considerar como un paso superior en la escala a la cual nos estamos refiriendo. Se ha logrado en ésta un gran avance en lo que se refiere a análisis

TEÓRICO Y MÉTODOS COMPUTACIONALES.

LA SIGUIENTE FASE, MUCHO MÁS COMPLEJA QUE LAS ANTERIORES, COMPRENDE LA OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONALES NO LINEALES, CON O SIN RESTRICCIONES DEL MISMO TIPO. DENTRO DE ESTA CATEGORÍA SE INCLUYEN MÉTODOS DE CARACTERÍSTICAS MUY DIVERSAS ENTRE LOS CUALES SE PODRÍAN MENCIONAR: PROCEDIMIENTOS DE BÚSQUEDA AL AZAR, POR DIRECCIONES FACTIBLES, MÉTODOS DIRECTOS, ETC. (11, 9, 4). EN ESTE TRABAJO SE CONSIDERA EL PROBLEMA DE UN FUNCIONAL NO LINEAL SIN RESTRICCIONES.

SE CONSIDERAN EN ESTE TRABAJO, MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN PARA FUNCIONALES SIN RESTRICCIONES, PUES EL ENFOQUE GENERAL DE LOS PROCEDIMIENTOS QUE CONSIDERAN FUNCIONES RESTRICTIVAS ES EL DE TRATAR DE CONVERTIR EL PROBLEMA EN UNO SIN RESTRICCIONES, HACIENDO QUE EL EFECTO DE ÉSTAS SEA CADA VEZ MENOR.

AL USAR UN MÉTODO DE TIPO DIRECTO, EN LA OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONALES, O SEA, UN PROCEDIMIENTO DONDE A PARTIR DE UN PUNTO INICIAL SE REALIZAN MOVIMIENTOS TENDIENTES A MEJORAR ESTA PRIMERA APROXIMACIÓN AL ÓPTIMO, SE ENCUENTRA EL PROBLEMA DE HALLAR EL PUNTO EXTREMO DEL FUNCIONAL A LO LARGO DE UNA DIRECCIÓN LINEAL, ESTO ES, SE BUSCA UN VALOR $\lambda$ TAL QUE $F(X + \lambda D)$ SEA UN EXTREMO SIENDO $X$ EL PUNTO ACTUAL Y $D$ EL VECTOR DIRECCIÓN.

ESTE PROBLEMA ES UNO DE LOS MÁS IMPORTANTES, YA QUE CONSTITUYE POR SUS CARACTERÍSTICAS UN SUB-PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN. ES EN ESTA FASE DEL PROBLEMA DONDE LA UNIMODALIDAD SE HACE MENOS EVIDENTE, PUES EL PROCESO USADO GENERALMENTE ES EL DE CONVERTIR EL FUNCIONAL EN UNA FUNCIÓN DE - -

UNA SOLA VARIABLE, SOBRE CUYA FORMA Y CARACTERÍSTICAS ES DIFÍCIL CONCLUIR ALGO CON ANTICIPACIÓN.

SE TRATA DE OBSERVAR LAS DIFERENCIAS QUE SE PRODUCEN EN EL ASPECTO COMPUTACIONAL AL USAR DOS MÉTODOS DE BÚSQUEDA LINEAL; LA INFLUENCIA DEL TAMAÑO DE PASO EMPLEADO EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA, NÚMERO DE ITERACIONES NECESARIAS, DIFERENCIAS EN LAS SOLUCIONES OBTENIDAS, MAYOR O MENOR NÚMERO DE EVALUACIONES DEL FUNCIONAL, SON LOS CRITERIOS DE COMPARACIÓN UTILIZADOS.

EL CAPÍTULO II, COMPRENDE EL DESARROLLO MATEMÁTICO GENERAL Y LAS SUPOSICIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS DE LOS PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE PUNTOS EXTREMOS.

EL CAPÍTULO III PRESENTA DIVERSAS CONSIDERACIONES SOBRE ESPACIOS MULTIDIMENSIONALES Y PROBLEMAS CONVEXOS, ASÍ COMO CONDICIONES DE OPTIMALIDAD EN LOS MISMOS.

EL CAPÍTULO IV CONTIENE LA EXPLICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE BÚSQUEDA LINEAL; LOS ALGORITMOS MULTIDIMENSIONALES SE EXPLICAN EN EL CAPÍTULO V.

LA PARTE CORRESPONDIENTE A LA IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS SE INCLUYEN EN UN APÉNDICE Y EL CAPÍTULO VI RESPECTIVAMENTE. LOS PROGRAMAS DE COMPUTADOR Y DIAGRAMAS DE FLUJO FORMAN EL CONTENIDO DEL APÉNDICE.

# CAPITULO II

## CONSIDERACIONES GENERALES

### 2.1.- PROCEDIMIENTO DE BUSQUEDA.

LOS PLANES DE BÚSQUEDA SE PUEDEN CLASIFICAR EN DOS CATEGORÍAS PRINCIPALES: DIRECTOS E INDIRECTOS.

UN PROCEDIMIENTO EN EL CUAL SE ESPECIFICA LA LOCALIZACIÓN DE CADA EXPERIMENTO ANTES DE QUE SE CONOZCA CUALQUIER RESULTADO SE DENOMINA INDIRECTO.

EL PLAN DE BÚSQUEDA DIRECTO PERMITE AL EXPERIMENTADOR BASAR LOS PRÓXIMOS EXPERIMENTOS EN RESULTADOS ANTERIORES. EN EL CASO DE QUE NO SE CONOZCA UNA RELACIÓN O HISTORIA DEL COMPORTAMIENTO DE UN SISTEMA, TODO LO QUE EL INVESTIGADOR PUEDE HACER ES TOMAR MEDIDAS ALEATORIAMENTE; POR LO GENERAL SIEMPRE SE SABE ALGO O SE PUEDEN HACER CIERTAS SUPOSICIONES DE TAL MANERA QUE LA SITUACIÓN DE INCERTIDUMBRE SE REDUZCA.

#### MÉTODO INDIRECTO CLÁSICO.

LOS MÉTODOS USADOS ACTUALMENTE EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN SON DEL TIPO DIRECTO GENERALMENTE. ESTO ES, SE ASUME UN VALOR INICIAL Y MEDIANTE UN PROCESO LÓGICO SE VA MEJORANDO HASTA LOGRAR EL ÓPTIMO.

ENTRE LAS PRINCIPALES TÉCNICAS USADAS, YA BIEN SEAN DEL TIPO DIRECTO O INDIRECTO, SE ENCUENTRAN LAS SIGUIENTES: ENUMERACIÓN EXHAUSTIVA, ACERCAMIENTO DIFERENCIAL, INDIRECTO, DIRECCIONES FACTIBLES. (13)

## Enumeración exhaustiva.

El método, consiste en la prueba de todos los valores posibles de los variables independientes, dentro de sus respectivos rangos, e ir guardando el valor máximo del funcional para los posibles valores. El método no examina condiciones del funcional; sólo considera evaluaciones del mismo.

El método es teóricamente el más simple pero generalmente es el menos aconsejado, debido al gran volumen de cálculos requeridos. Recibe también el nombre del "método de fuerza bruta", y sólo se recomienda en el caso de un problema cuyo número de combinaciones posibles es muy pequeño comparado con la velocidad de las facilidades de computación. El óptimo se localiza cuando no se puede encontrar un valor mayor (o menor) que el guardado como óptimo hasta ese momento.

## Acercamiento diferencial.

La idea de resolver problemas de optimización usando técnicas diferenciales, ha sido usada extensivamente y su desarrollo se debe al matemático Kepler (14), quien notó en sus cálculos astronómicos que las diferencias entre los valores sucesivos de una variable dependiente, calculadas a espaciamientos iguales de la variable independiente, tendían a desaparecer cerca del óptimo.

Fermat (14) basado en las experiencias de Kepler desarrolló un método para hallar puntos óptimos interiores de funciones continuas. Su razonamiento aunque poco fundamentado matemáticamente constituía la solución diferen--

CIAL ACTUAL DEL PROBLEMA, QUE CONSISTE EN HALLAR DERIVA- - DAS PARCIALES CON RESPECTO A CADA UNA DE LAS VARIABLES, -- IGUALANDO LAS ECUACIONES RESULTANTES A CERO Y RESOLVIENDO EL SISTEMA DE ECUACIONES.

EL MÉTODO INDIRECTO, NO EXAMINA CONDICIONES NI REALIZA ENSAYOS; LA SOLUCIÓN SE OBTIENE DE LA SOLUCIÓN DEL - SISTEMA DE ECUACIONES GENERADO A PARTIR DEL FUNCIONAL EN - ESTUDIO. SI ESTE TIPO DE POLÍTICA PUEDE SER USADO EN LA - SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA, SIN QUE EL GRADO DE COMPUTACIÓN - SEA EXCESIVO, DEBE PREFERIRSE A CUALQUIERA DE LAS TÉCNICAS DIRECTAS.

LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL O QUE IMPLIQUEN SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES, SON DEL TIPO INDIREC-- TO.

EL MÉTODO, ES UNA EXTENSIÓN A VARIAS VARIABLES DEL USADO POR FERMAT Y EN ÉL SE INTRODUCE LA NOCIÓN DE DERIVA DAS PARCIALES.

TAYLOR DEMOSTRÓ QUE SI $\partial X$ ES UN VECTOR DE DESVIA-- CIONES PEQUEÑAS

$$\partial X = ( \partial x_1 , \ldots , \partial x_N )$$

LA DIFERENCIA ENTRE $Y(X+\partial X)$ Y $Y(X)$ LLAMADA $\partial Y$ ES-- TÁ DADA EN EL PUNTO X POR LA SERIE

$$\partial Y = \sum_{P'}^{n} (\partial Y / \partial x_J) \, \partial x_J + 0 \, (\partial X^2)$$

Se puede probar que la expresión $O(\partial X^2)$ desaparece en el límite cuando $\partial x_J$ tiende a cero.

Si se considera una expresión que envuelve desviaciones finitas $\Delta x_J$

$$\Delta Y = \sum (\partial Y / \partial x_J) \, \Delta x_J$$

La sumatoria expresa el producto vectorial de un vector de desviaciones por el de derivadas parciales.

$$\Delta Y = \nabla Y \, \Delta X$$

Para el caso de desviaciones finitas o

$$\partial Y = \nabla Y \, \Delta X$$

Para desviaciones infinitesimales.

Básicamente, la política indirecta, usa la propiedad de que el valor del gradiente en el óptimo es igual a cero.

La técnica indirecta es por lo general de difícil manejo, cuando el funcional es un polinomio de orden mayor que 2, o contiene funciones trascendentales, ya que la obtención de una solución tiene como paso intermedio la resolución de sistemas de ecuaciones simultáneas no lineales, lo cual trae consigo problemas bastante serios (Ver referencia 13).

**Direcciones Factibles.**(15)

El método más común de optimización es aquel en el cual partiendo de un punto $X_K$ mediante una aplicación D, hallamos una dirección $D_K$

Luego haciendo una nueva aplicación M1 maximizamos la función objetivo sobre segmento de la línea que pasa por $X_K$ en la dirección $D_K$

El nuevo punto hallado $X_{K+1}$ es

$$X_{K+1} = X_K + \lambda_K D_K$$

con

$$F(X_{K+1}) = \max (F(X_K + \lambda_K D_K))$$

Donde los límites del intervalo del parámetro $_K$ son infinito o un escalar; es importante este intervalo en el proceso de búsqueda lineal.

Expresando matemáticamente las aplicaciones D, M1 tenemos

$$D: E^N \longrightarrow E^{2N}$$

Dado X nos conduce a la pareja ( x, d)$\in E^{2N}$ donde d es una dirección en $E^N$ y cuya determinación depende del algoritmo.

$$M: E^{2N} \longrightarrow E^N$$

Se define como

$$M_1(X, D) = (Y \mid F(Y) = \max_{\lambda \in J} F(X + \lambda D), Y = Y + \lambda_0 D)$$

J ES EL INTERVALO DE VARIACIÓN DE $\lambda$.

PODEMOS HACER UNA COMPOSICIÓN DE LAS APLICACIONES D,M

$$A = M_1 \quad D$$

PARA QUE EL MAPA A, SEA CERRADO CADA UNO DE SUS COM-PUESTOS DEBE SERLO, CON EL FIN DE LOGRAR LAS PROPIEDADES DE CONVERGENCIA REQUERIDAS PARA LOGRAR EL ACERCAMIENTO AL ÓPTIMO.

LEMA: SEA F, UNA FUNCIÓN CONTINUA, M ES CERRADO SI J ES UN INTERVALO CERRADO Y ACOTADO.

PRUEBA: SEA

(A) $(X_K, D_K) \longrightarrow (X_\infty, D_\infty)$

(B) $Y_K \in M. \ (X_K, D)$

(C) $Y_K \longrightarrow Y_\infty$

DONDE EL SUBÍNDICE $\infty$ INDICA CONVERGENCIA HACIA EL ÓPTIMO. SEA

$$Y_K = X_K + \lambda_K \ D_K$$

DONDE $\lambda_K$ ES EL TAMAÑO ÓPTIMO DEL AVANCE SOBRE LA LÍNEA.

COMO $\lambda_K \in J$ Y COMO J ES CERRADO Y ACOTADO DEBE EXISTIR UNA SUBSECUENCIA CONVERGENTE

$$\lambda_K \longrightarrow \lambda_\infty$$

AHORA, PARA CUALQUIER $\lambda \in J$, FIJO POR LA DEFINICIÓN DE $Y_K$.

$$F(Y_K) \geqslant F(X_K + \lambda D_K)$$

Y POR LA CONTINUIDAD DE F, PODEMOS TOMAR LÍMITES OBTENIENDO
$F(Y_{\infty}) = \lim F(Y_K) \geq \lim F(X_K + \lambda D_K) = F(X_{\infty} + \lambda D_{\infty})$

ESTA ECUACIÓN VALE PARA CUALQUIER $\lambda \in Y$ Y DADO $Y' \in M, (X_{\infty}, D_{\infty})$

$$F(Y_{\infty}) \geq F(Y')$$

POR OTRO LADO, COMO $Y' \in M$, MAXIMIZA SOBRE TODAS LAS $\lambda \in J$

$$F(Y') \geq F(Y_{\infty})$$

CONCLUÍMOS QUE

$$Y_{\infty} \in M, (X_{\infty}\ D_{\infty})$$

CONSIDERACIONES IMPORTANTES: (14)

UNIMODALIDAD.

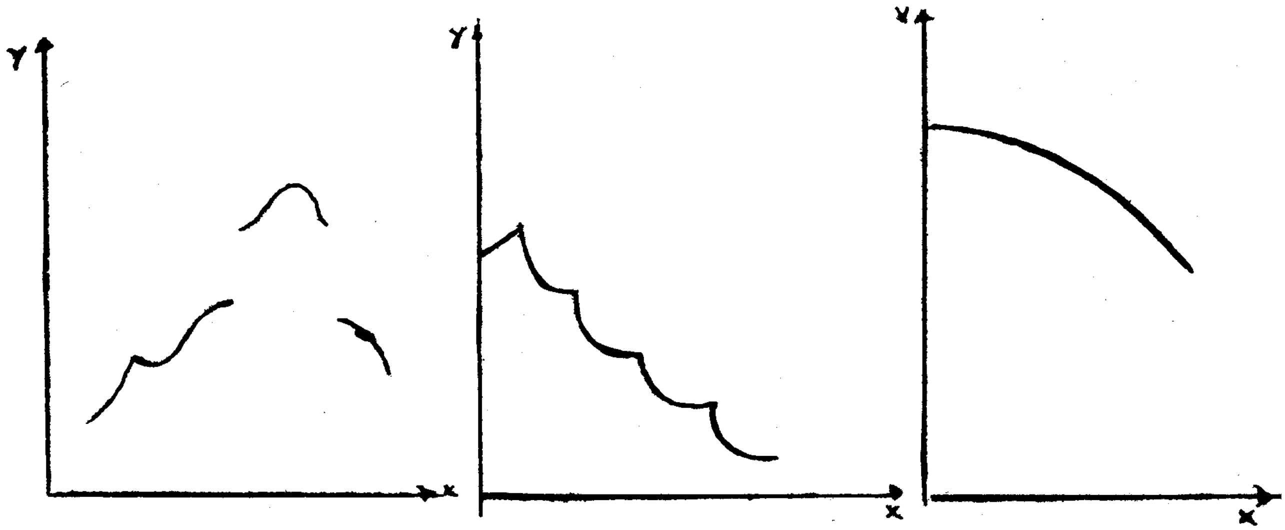
DEBIDO A QUE EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN CONSISTE EN DETERMINAR UN PUNTO EXTREMO LOCAL O GLOBAL, SE REQUIEREN CIERTAS CONDICIONES QUE DEBEN SER CUMPLIDAS POR EL FUNCIONAL EN LA REGIÓN DE BÚSQUEDA.

LA PROPIEDAD LLAMADA DE UNIMODALIDAD CONSTITUYE LA BASE CENTRAL DE TODO PROBLEMA DE BÚSQUEDA LINEAL.

LA PROPIEDAD DE UNIMODALIDAD NO REQUIERE QUE LA FUNCIÓN SEA DEL TIPO SUAVE (SMOOTH), O AÚN QUE SEA CONTINUA.

SI CONSIDERAMOS TRES TIPOS DE FUNCIONES UNIMODALES SE VE FÁCILMENTE QUE LAS RESTRICCIONES IMPUESTAS POR ESTA PROPIEDAD NO SON MUY FUERTES Y POR LO TANTO ASUMIR DICHA -

CONDICIÓN EN UN PROBLEMA DE BÚSQUEDA NO REPRESENTA UN GRAVE RIESGO Y ES VÁLIDA EN UN GRAN NÚMERO DE CASOS.




FUNCIONES UNIMODALES

LA DEFINICIÓN FORMAL DE UNIMODALIDAD SE PUEDE EXPRESAR DE LA SIGUIENTE FORMA:

SEA LA FUNCIÓN

$$Y = F\ (x_1(\lambda),\ x_2\ (\lambda),\ \ldots,\ x_K\ (\lambda) = F\ (\lambda)$$

CONSIDERAMOS QUE LA FUNCIÓN OBTIENE SU VALOR MÁXIMO (O MÍNIMO EN UN PUNTO QUE TIENE POR COORDENADA $(\lambda_M)$ Y SU VALOR ES M; ESTO ES

$$M = MAX\ \ Y\ \ (\lambda)$$

$$O\quad Y\ (X\ M\ )\ =\ M$$

SEAN $\lambda_1$, Y $\lambda_2$ $(\lambda_1 < \lambda_2)$ DOS VALORES DEL PARÁMETRO EN EL INTERVALO CONSIDERADO. ENTONCES DECIMOS QUE Y ES UNIMODAL EN EL INTERVALO SI

$$\lambda < \lambda_m$$

IMPLICA QUE

$$Y(\lambda_1) < Y(\lambda_2)$$

Y SI

$$\lambda_{i+1} < \lambda_i$$

IMPLICA

$$Y(\lambda_1) > Y(\lambda_2)$$

La definición de unimodalidad se puede formular en forma más simple introduciendo el concepto de trayectoria estrictamente creciente.

Si consideramos $\lambda_1$, $\lambda_2$ dos valores del parámetro $\lambda$, y con la condición

$$\lambda_1 < \lambda_2$$

si se cumple que

$$Y(\lambda_1) < Y(\lambda_2)$$

Se dice que la trayectoria seguida es estrictamente - creciente.

De esto podemos decir que una función Y (x) es unimo- dal si para cada punto de la región de búsqueda existe una - trayectoria creciente hacia el máximo $X^*$.

En el caso de que la región de búsqueda no sea unimo- dal sino multimodal, el punto de entrada a la búsqueda es un factor importante. Se pueden obtener varios óptimos locales con la variación del punto inicial, pues las condiciones - -

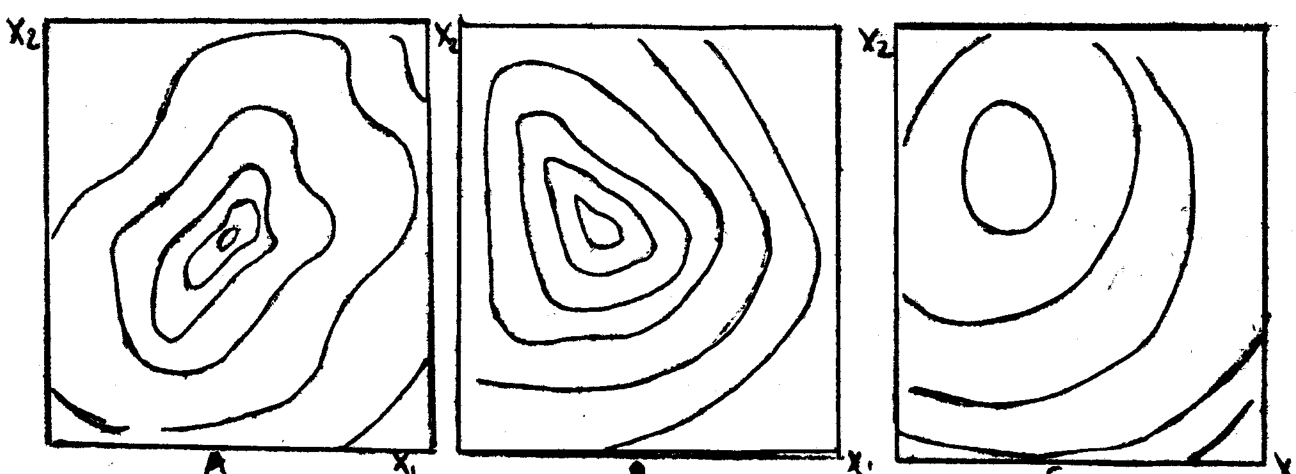
DE OPTIMALIDAD SE CUMPLEN EN CADA UNO DE LOS EXTREMOS DEL FUNCIONAL.

UNA FUNCIÓN CON UNA CONFIGURACIÓN AGUDA O AFILADA PUEDE DAR LUGAR A SERIOS PROBLEMAS DEBIDO A LA EXISTENCIA DE RISCOS CUYA DEFINICIÓN Y EXPLICACIÓN SE VERÁ MÁS ADELANTE.

DEBIDO A LA EXISTENCIA DE ESTOS PROBLEMAS ES CONVENIENTE DEFINIR FUNCIONES FUERTEMENTE UNIMODALES.

SE LLAMA FUNCIONAL FUERTEMENTE UNIMODAL AQUEL QUE CUMPLE LA INDICACIÓN DE QUE CUALQUIER LÍNEA RECTA DESDE UN PUNTO DE LA SUPERFICIE, AL ÓPTIMO X ES UNA TRAYECTORIA CRECIENTE. EN LA SIGUIENTE FIGURA SE MUESTRAN TRES FUNCIONES DE ESTE TIPO, DONDE LAS LÍNEAS REPRESENTAN CURVAS DE NIVEL.

ES NECESARIO MENCIONAR QUE EN UN FUNCIONAL CON UN BUEN ESCALAMIENTO DE SUS VARIABLES INDEPENDIENTES, SE REDUCEN MUCHO LOS PROBLEMAS PUES LA INTERACCIÓN DE LAS VARIABLES SE PUEDE REDUCIR O ELIMINAR AÚN, CON UN ADECUADO CAMBIO DE ESCALA; ESTO HACE QUE SEA MUY CONVENIENTE EXAMINAR CUALQUIER PROBLEMA ANTES DE APLICAR UN MÉTODO DE SOLUCIÓN DETERMINADO.




FUNCIONES FUERTEMENTE UNIMODALES

Una función del tipo (a) no ocurre muy frecuentemente por lo cual se puede hacer una nueva división que excluye funcionales de esa forma.

Definimos una funcional como linealmente unimodal si es unimodal a lo largo de <u>cualquier</u> línea recta en la región de búsqueda.

Una restricción final para ciertas clases de funciones se logra definiendo el concepto de funciones cóncavas hacia abajo.

Un funcional de estas características es cóncavo hacia abajo a lo largo de cualquier línea en la región de búsqueda, lo cual quiere decir que para dos puntos cualquiera $\underline{A}$, $\underline{B}$, el funcional cumple la condición.

$$Y\ (A + \lambda (B - A)) \geq Y(A) + \lambda (Y(B) - Y(A))$$

Donde $\lambda$ es el parámetro de la línea recta que pasa por los puntos A, B.

## CAPITULO III

## CONSIDERACIONES MULTIDIMENSIONALES

ANTES DE PRESENTAR LOS MÉTODOS DE BÚSQUEDA, ES CONVENIENTE CONOCER ALGUNAS CARACTERÍSTICAS SOBRE LOS ESPACIOS N DIMENSIONALES, SU DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS, ASÍ COMO ALGUNAS CONSIDERACIONES QUE DEBEN TENERSE EN CUENTA AL RESOLVER UN PROBLEMA DE BÚSQUEDA, DESDE SU INICIO, CON LAS EXPLORACIONES PREPARATORIAS, HASTA LA OBTENCIÓN DE UNA SOLUCIÓN FINAL QUE REQUIERE VERIFICACIONES ADICIONALES POR LAS CONDICIONES ESPECIALES QUE PRESENTAN LAS DERIVADAS PARCIALES DEL FUNCIONAL EN LA VECINDAD DEL ÓPTIMO.

### 3.1.- HIPERESPACIOS. (2)

SE PUEDE DEFINIR UN ESPACIO VECTORIAL N-DIMENSIONAL SOBRE EL CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES, EN LA SIGUIENTE FORMA: SEA R EL CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES Y SEA V UN CONJUNTO DE ELEMENTOS JUNTO CON UNA OPERACIÓN DE SUMA, UNA OPERACIÓN ESCALAR DE MULTIPLICACIÓN DE ELEMENTOS DE V POR ELEMENTOS DE R, QUE CUMPLEN LAS CONDICIONES:

1o.- SI $X, Y \in V(R)$ ENTONCES $X + Y \in V(R)$

2o.- SI $X, Y, Z \in V(R)$ ENTONCES

$$(X+Y) + Z = X + (Y + Z)$$

3o.- EXISTE UN VECTOR $0 \in V(R)$ TAL QUE

$$0 + X = X + 0 = X \quad \text{PARA TODO } X \in V(R)$$

4o.- PARA TODO $X \in V(R)$ EXISTE UN VECTOR $-X \in V(R)$ TAL QUE

$$X+(-X) = (-X) + X = 0$$

5o.- PARA X, Y $\in$ V(R) SE CUMPLE QUE

$$X+Y = Y+X$$

6o.- SI X $\in$ V(R) Y A ES UN NÚMERO REAL

$$aX \in V(R)$$

7o.- PARA A, B REALES Y X $\in$ V(R)

$$(a\,b)\,X = a\,(bX)$$

8o.- PARA A, B REALES

$$(a + b)\,X = aX + bX$$

9o.- PARA A REAL Y X, Y $\in$ V(R)

$$a\,(X + Y) = aX + aY$$

10o.- X = X PARA TODO X $\in$ V(R)

UN FUNCIONAL DE LA FORMA

$$Y = f\,(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n)$$

SE DEFINE COMO UNA HIPER-SUPERFICIE EN UN HIPER-ESPACIO

SE DEFINE UN HIPERCONTORNO COMO LA INTERSECCIÓN DE UNA SUPERFICIE DE RESPUESTA, QUE ES EL CONJUNTO DE TODOS LOS VALORES DE LA VARIABLE DEPENDIENTE PARA LAS POSIBLES COMBINACIONES DE VALORES DE LAS VARIABLES INDEPENDIENTES, CON UN HIPERPLANO DONDE Y ES UNA CONSTANTE.

El problema de optimización de hiperfunciones, es -- el de hallar puntos extremos de un funcional cuya forma - - puede ser aún desconocida para el experimentador pero que - puede ser probada para valores o eneadas que pertenecen - - al espacio.

## 3.2.- CONSIDERACIONES EN BUSQUEDA MULTIDIMENSIONAL.

Los problemas en búsquedas en espacios n-dimensio-- nales, no se reducen solamente a un aumento en computación con respecto a la búsqueda unidimensional.

Una de las mayores dificultades, es la que respecta a la definición de unimodalidad, debido a que se hace más - difícil asegurar el cumplimiento de esta condición a medida que aumenta la dimensión del espacio.

La medición del grado de efectividad del procedimien to de búsqueda empleado se hace más difícil, pues las condi ciones que son válidas en una dimensión no son fácilmente - generalizables.

Existe una dificultad adicional que se relaciona con la extensión de los espacios n-dimensionales. Se refiere - esta complicación a la forma como aumenta la extensión de - una región factible cuando el número de variables indepen-- dientes va creciendo.

## 3.3.- ESTRATEGIA MULTIDIMENSIONAL.

Según como se ha definido anteriormente, un problema de búsqueda consiste en encontrar, después del menor número de experimentos posibles, un conjunto de condiciones de ope ración que sea bastante cercano al valor óptimo del funcional considerado.

Geométricamente el problema consiste en realizar una serie de movimientos, tan rápido como sea posible, sobre una superficie de respuesta, aunque ésta sea de características no conocidas por el experimentador.

De esta forma, los propósitos centrales de una búsqueda, se pueden reducir a: lograr información útil para la localización de futuros experimentos y tratar de encontrar una buena aproximación al óptimo. Durante el proceso se debe estar decidiendo continuamente entre dos alternativas: descenso (o ascenso), e inspección. Es claro que una política óptima no se debe limitar a avanzar sin examinar las condiciones del punto actual.

Todo plan de búsqueda debe necesariamente comenzar con un examen de condiciones en un punto inicial o de entrada, que se escoge en muchas ocasiones en forma aleatoria.

Sigue a este proceso una segunda etapa o fase intermedia que empieza con un movimiento más rápido sobre la región.

La etapa final es aquella en la cual estamos cerca del óptimo y que requiere inspección extensiva para lograr un mejoramiento debido a las condiciones especiales de las derivadas parciales. El examen de la situación en esta fase debe ser extensivo para asegurarsos que el punto es en realidad un extremo, mediante la aplicación de las condiciones de optimalidad.

En resumen se ha hablado de tres fases esenciales (14) en todo procedimiento de optimización. Una fase inicial

QUE SIRVE PARA DEFINIR UN PUNTO INICIAL SOBRE LA REGIÓN. - SIGUE A ÉSTA UNA ETAPA INTERMEDIA QUE PROPORCIONA, DESPUÉS DE LA EXPLORACIÓN INICIAL, LOS PASOS PARA LLEGAR AL ÓPTIMO. VIENE LUEGO LA FASE FINAL QUE PERMITE VERIFICAR LA EXISTENCIA DE UN PUNTO EXTREMO.

LA VASE INTERMEDIA COMPRENDE LOS ALGORITMOS EXPLICADOS EN EL CAPÍTULO V.

### 3.3.1.- <u>FASE INICIAL.</u>

COMPRENDE EL PUNTO DE ENTRADA Y SÓLO DA INFORMACIÓN - DE LA ELEVACIÓN EN LA SUPERFICIE DE RESPUESTA Y DE QUÉ MANERA NOS DEBEMOS MOVER PARA SITUAR EL GRUPO DE ENSAYOS INICIALES.

PARA EFECTOS DE SIMPLICIDAD, SE VA A CONSIDERAR EN - EL SIGUIENTE DESARROLLO UN FUNCIONAL DE DOS VARIABLES. SE PARTE DE UN PUNTO INICIAL $X = (x_{01}, X_{02})$ Y SE HALLA EL VALOR DE LA FUNCIÓN, $Y_0$. DEBIDO A LA POCA INFORMACIÓN QUE -- BRINDA UN PUNTO, SE DEBE TRATAR DE CONOCER UNA ESTIMACIÓN - DE LA PENDIENTE DE LA SUPERFICIE EN LA VECINDAD DE ESE PUNTO.

PARA LOGRAR ESA ESTIMACIÓN, SE HACE UNA NUEVA OBSERVACIÓN EN EL PUNTO $(X_{01}, X_{12})$ DONDE LA PRIMERA COORDENADA - ES LA MISMA QUE LA DEL PUNTO INICIAL Y LA SEGUNDA DIFIERE - DE LA ORIGINAL POR UN PEQUEÑO INCREMENTO QUE DEPENDE DEL -- MARGEN USADO PARA SEPARACIÓN ENTRE DOS SALIDAS.

$Y_1$ ES EL VALOR DE LA FUNCIÓN EN ESTE NUEVO PUNTO. - UNA ESTIMACIÓN DE LA DERIVADA PARCIAL CON RESPECTO A $X_1$ ES EL SIGUIENTE:

$$\partial Y/\partial X_1 \cong (Y_1 - Y_0)/(X_{11} - X_{01})$$

De la misma forma se pueden hacer estimativos para la derivada parcial con respecto a $X_2$.

$$\partial Y / \partial X_2 \cong (Y_2 - Y_0)/(X_{22} - X_{02})$$

Una vez conocidas las pendientes de la superficie de respuesta en las direccionex $X_1$ y $X_2$ se puede hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $Y_0$ y que pasa además por $Y_1$ y $Y_2$. La ecuación de un -- plano en tres dimensiones es de la forma

$$Y(X_1 , X_2) = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$$

donde $M_0$, $M_1$ y $M_2$ son constantes.

La determinación de las constantes se logra mediante la solución de un sistema de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas, puesto que la ecuación general para el plano se debe cumplir para los tres puntos que hemos determinado.

Se puede resolver en forma más sencilla el sistema - anterior si se hace una traslación de coordenadas, del origen al punto de entrada de la búsqueda. De esta forma, se define

$$\Delta X_{11} = X_{11} - X_{01}$$

$$\Delta X_{12} = X_{12} - X_{02}$$

$$\Delta Y_1 = Y_1 - Y_0$$

Esta traslación evita el cálculo de la constante $M_0$

Se obtienen entonces expresiones de la forma

$$\Delta Y_i = m_1 \Delta X_{i1} + m_2 \Delta X_{i2}$$

Debido a la característica de que en la búsqueda se mantuvo constante una de las coordenadas para cada exploración, se obtiene

$$m_1 = (\Delta Y_1 / \Delta X_{11}) \simeq (\partial Y / \partial X_1)$$

$$m_2 = (\Delta Y_2 / \Delta X_{22}) \simeq (\partial Y / \partial X_2)$$

con lo cual se puede deducir una expresión para el plano - tangente.

La fase inicial requiere por lo tanto tres ensayos para determinar el plano de aproximación. Hay una condi-- ción para que exista una solución única para la m's y es - que los puntos no sean colineales.

La aproximación del funcional por medio de un plano coincide parcialmente con la aproximación de Taylor

$$\Delta Y = (\partial Y / \partial X_1) \Delta X_1 + (\partial Y / \partial X_2) \Delta X_2 + 0 \ (\Delta X^2)$$

donde los términos de orden mayor que dos se desprecian.

La generalización del procedimiento anterior para -- casos de más de dos variables es la siguiente:

Sea $Y = F(x_1, x_2, \ldots, x_0)$ un funcional con k variables independientes.

$$X_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0k})$$

ES EL PUNTO DE ENTRADA PARA LA BÚSQUEDA Y CON UN VALOR -- ASOCIADO DEL FUNCIONAL, $Y_0$.

$$\Delta x_J = x_J - x_{0J}$$

$$J = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ K$$

$$\Delta Y = Y - Y_0$$

CORRESPONDEN A LA TRASLACIÓN DE COORDENADAS.

SEA $M_J$ LA DERIVADA $(\partial Y / \partial x_J)$ EN $Y_0$

LA APROXIMACIÓN LINEAL DE Y EN EL PUNTO $Y_0$ ES

$$\Delta Y = \sum_{J} M_J \quad x_J$$

DONDE, PARA EVALUAR LAS CONSTANTES M ES NECESARIO REALIZAR K ENSAYOS ADEMÁS DEL INICIAL. SI COMO EN EL CASO DE DOS - DIMENSIONES, SE HACE

$$\Delta x_{IJ} = 0 \qquad \text{PARA TODO } I \neq J$$

SE OBTIENEN LAS EXPRESIONES PARA M

$$M_I = \Delta Y_I / \Delta x_{II} \qquad I = 1, 2, \ldots\ldots, K$$

CON LO CUAL SE OBTIENE LA ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE A -- LA SUPERFICIE EN $Y_0$.

LA FASE INICIAL COMPRENDE POR LO TANTO, UNA APROXIMACIÓN LINEAL PARA PODER ESTIMAR LA PENDIENTE DE LA SUPERFICIE EN EL PUNTO DE ENTRADA Y PODER TENER UN CONOCIMIENTO -- DE LA DIRECCIÓN HACIA LA CUAL SE DEBE ORIENTAR LA BÚSQUEDA.

### 3.3.2.- Fase final.

Esta etapa del proceso de búsqueda, comprende una exploración de tipo local pero con ciertas consideraciones que dependen de la magnitud de las desviaciones o incrementos definidos en la sección anterior.

La aproximación lineal es válida en la etapa inicial pero por lo general no se ajusta a las exigencias de una región, en la vecindad del óptimo. Es por lo tanto necesario realizar un acercamiento que comprenda términos de orden mayor en la expresión para el funcional por el desarrollo de Taylor.

Considerando el caso de dos variables independientes, se tiene

$$\Delta Y=(\partial Y/\partial x_1)\Delta x_1+(\partial Y/\partial x_2)\Delta x_2+(1/2)((\partial^2 Y/\partial x_1^2)\Delta x_1^2$$

$$+2(\partial^2 Y/\partial x_1\ \partial x_2)(\Delta x_1)(\Delta x_2)+(\partial^2 Y/\partial x_2^2)\Delta x_2^2)\ +\ O(\Delta x^2)$$

donde las derivadas parciales se evalúan en $Y_0$.

Si se denota

$$M_{JK}=(\partial^2 Y/\partial x_J\partial x_K)$$

y se obtiene

$$\Delta Y = M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+(1/2)(M_{11}\Delta x_1^2+2M_{12}\Delta x_1\Delta x_2+M_{22}\Delta x_2^2)$$

donde las M's se obtienen mediante la realización de cinco experimentos.

Se hace el ajuste de tipo cuadrático cuando se em-- plean métodos que no usan la información sobre derivadas - parciales o su cálculo es difícil de hacer con el margen - de exactitud requerido.

Esta política de ajustar una función cuadrática --- permite obtener una mejor información de las condiciones - de la función en las cercanías del óptimo y se ajusta más a las características de curvatura existentes en la vecin- dad de un extremo. La computación necesaria para ajustar la expresión cuadrática, se ve compensada por la ventaja - de estar logrando el objetivo, teniendo en cuenta además - que el número de exploraciones requeridas en la fase final, de acuerdo a la definición dada anteriormente, no es muy -- grande comparado con el requerido para la fase media.

Este análisis supone que se cumple la condición -- de unimodalidad. No es fácil determinar si esta caracte- rística se cumple. En muchos casos, lo que se hace es -- tomar puntos iniciales al azar y examinar si siempre se - llega al mismo valor óptimo, lo cual se trata de concluir el supuesto antes mencionado; esto es, la unimodalidad no es muy exigente en lo que al funcional se refiere, pero -- la existencia de ella no es de fácil verificación.

# CAPITULO IV

## PROCESOS DE BUSQUEDA SOBRE UNA LINEA

### 4.1.- CONSIDERACIONES GENERALES.

AL USAR MÉTODOS DIRECTOS DE OPTIMIZACIÓN BASADOS EN DIRECCIONES FACTIBLES, SE DETERMINA LA DIRECCIÓN DE MOVIMIENTO, PARA LUEGO HACER UN AVANCE DE MAGNITUD ÓPTIMA EN ESA DIRECCIÓN.

SE REQUIERE ENTONCES, REALIZAR UN DESPLAZAMIENTO A PARTIR DEL PÚNTO DE ITERACIÓN ACTUAL EN FORMA TAL QUE PERMITA LOCALIZAR EL PUNTO SIGUIENTE EN LA MEJOR FORMA POSIBLE HACIENDO QUE EL ACERCAMIENTO A LA SOLUCIÓN FINAL SEA RÁPIDO.

EXISTEN DIVERSOS MÉTODOS DE BÚSQUEDA LINEAL (9) SIENDO EL MÁS EFICIENTE DE ELLOS EL DE FIBONACCI. ES EL QUE LOGRA LA MÁS RÁPIDA REDUCCIÓN DEL INTERVALO DE BÚSQUEDA, PERO REQUIERE LA DETERMINACIÓN ANTERIOR DEL NÚMERO DE ENSAYOS QUE SE VAN A HACER EN EL MISMO.

EL PROBLEMA BÁSICO DE LA BÚSQUEDA DE VALORES EXTREMOS, CONSISTE EN DETERMINAR UN INTERVALO DONDE SE ENCUENTRA EL VALOR ÓPTIMO (ASUMIENDO UNIMODALIDAD), PARA POSTERIORMENTE EMPLEAR ALGUNA TÉCNICA DE REDUCCIÓN QUE LOCALICE EL EXTREMO CON LA PRECISIÓN REQUERIDA Y CON EL MENOR ESFUERZO COMPUTACIONAL POSIBLE.

SE PUEDE DE ESTA FORMA DEFINIR UN PROCESO DE BÚSQUEDA LINEAL, EN FORMA GENERAL, COMO AQUÉL QUE CONSTA DE LAS SIGUIENTES FASES:

A).- LOCALIZACIÓN DEL INTERVALO QUE CONTIENE EL ÓPTIMO.

B).- DETERMINACIÓN DEL VALOR ÓPTIMO.

LA MAYOR PARTE DE LOS MÉTODOS CONOCIDOS PARA BÚSQUEDA SOBRE UNA LÍNEA NO INCLUYEN COMO PARTE DEL PROCESO LA PRIMERA FASE POR LO CUAL ES NECESARIO DETERMINAR CON ANTERIORIDAD EL INTERVALO QUE CONTIENE LA SOLUCIÓN. EL PRINCIPIO BÁSICO, SI ES EN TODOS ELLOS EVITAR LA BÚSQUEDA POR MÉTODOS EXHAUSTIVOS.

## 4.2.- METODO DE DAVIES, SWANN Y CAMPEY. (1)

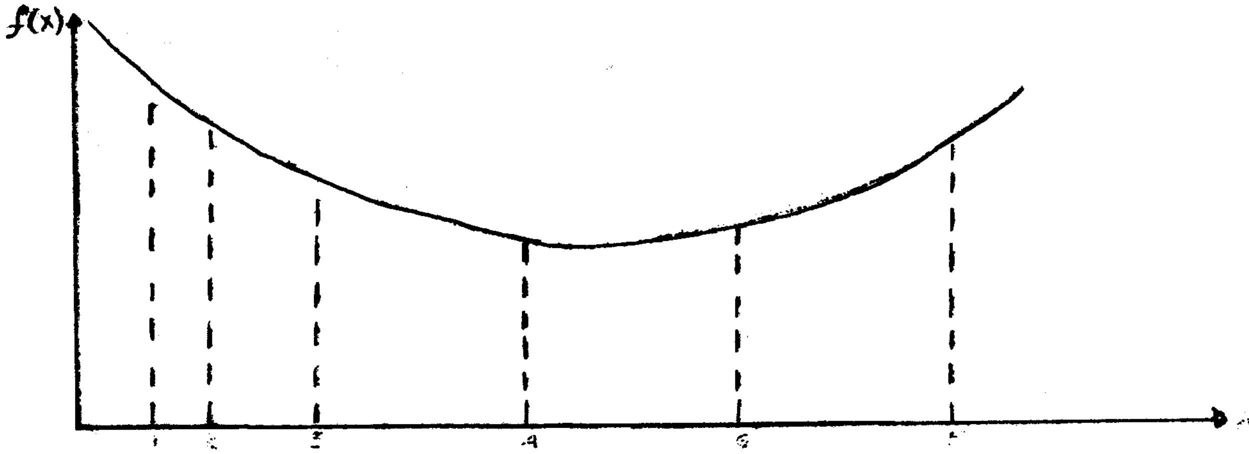
EL PRINCIPIO BÁSICO DEL MÉTODO ES DESARROLLAR UN PROCEDIMIENTO ACELERADO PARA LA LOCALIZACIÓN DEL INTERVALO Y UNA SEGUNDA FASE DONDE SE REALIZAN INTERPOLACIONES DEL TIPO CUADRÁTICO.

EL MÉTODO PROCEDE EN LA SIGUIENTE FORMA: SE EVALÚA LA FUNCIÓN EN UN PUNTO INICIAL; SE AVANZA LUEGO EN LA DIRECCIÓN DE BÚSQUEDA UNA DISTANCIA IGUAL AL TAMAÑO DEL PASO Y SE EVALÚA LA FUNCIÓN EN ESTE NUEVO PUNTO. SI EL VALOR DE LA FUNCIÓN EN ESTE PUNTO ES MENOR O IGUAL QUE EN EL ANTERIOR, SE DOBLA EL TAMAÑO DEL PASO Y SE HACE UN NUEVO MOVIMIENTO. EL PROCESO SE REPITE HASTA QUE EL VALOR DE LA FUNCIÓN AUMENTA, LO CUAL INDICA QUE EXISTE UN PUNTO EXTREMO.

CUANDO SE PRODUCE ESTA SITUACIÓN, SE REDUCE EL TAMAÑO DE PASO A LA MITAD Y SE HACE UNA NUEVA EVALUACIÓN DE LA FUNCIÓN EN UN PUNTO INTERMEDIO A LOS DOS ÚLTIMOS CONSIDERADOS. ESTO PRODUCE CUATRO PUNTOS CON IGUAL ESPACIAMIENTO ENTRE ELLOS; SE ELIMINA UNO DE ELLOS, ESCOGIENDO EL MENOR Y LOS DOS ADYACENTES, QUERIENDO SIGNIFICAR POR MENOR EL

PUNTO QUE CORRESPONDE A LA ORDENADA O VALOR DE LA FUNCIÓN, MÁS PEQUEÑO.

UN DIAGRAMA DEL AVANCE DEL MÉTODO PARA LA PRIMERA FASE SE REPRESENTA EN LA FIGURA.




UNA ACLARACIÓN IMPORTANTE ES QUE SI EN EL PRIMER AVANCE NO SE CUMPLE LA CONDICIÓN DE MENOR VALOR DE LA FUNCIÓN, SE DEBE REALIZAR LA EXPLORACIÓN EN LA DIRECCIÓN CONTRARIA CAMBIANDO EL SIGNO DEL PASO.

COMO CONSECUENCIA DE LO ANTERIOR, CUANDO LOS AVANCES INICIALES EN LAS DOS DIRECCIONES SON FRACASOS, SE TIENE EN ESE MOMENTO EL INTERVALO BUSCADO EN LA PRIMERA FASE Y SE PUEDE PASAR A LA FASE DE REDUCCIÓN.

SE TIENEN ENTONCES TRES PUNTOS $x_1$, $x_2$, $x_3$ CON SUS CORRESPONDIENTES EVALUACIONES DE LA FUNCIÓN $F_1$, $F_2$, $F_3$. SE AJUSTA UNA CUADRÁTICA POR ESTOS PUNTOS CON LO CUAL SE OBTIENE UNA FUNCIÓN DE LA FORMA

$$H(U) = AU^2 + BU + C$$

QUE SE DEBE SATISFACER PARA CADA UNO DE LOS TRES PUNTOS -- ANTERIORES DANDO LUGAR A UN SISTEMA DE ECUACIONES CON - -- TRES INCÓGNITAS.

EL VALOR ÓPTIMO DE U SE OBTIENE EN FORMA ANALÍTICA POR DERIVACIÓN

$$H'(U)=2AU + B = 0$$

DE DONDE $$U = - B/2A \qquad (4.2.3.)$$

PARA EL PROBLEMA, EXISTE UNA CONDICIÓN ESPECIAL - QUE ES LA IGUAL SEPARACIÓN ENTRE LOS TRES PUNTOS. LA RELACIÓN ENTRE ELLOS ESTÁ DADA POR

$$X_3 = X_2 + S$$
$$X_1 = X_2 + S$$

DONDE S ES EL TAMAÑO DE PASO USADO EN EL ÚLTIMO AVANCE

SI FORMAMOS EL SISTEMA DE ECUACIONES CON LOS 3 PUNTOS $X_1$, $X_2$, $X_3$

$$F_1 = AX_1^2 + BX_1 + C$$
$$F_2 = AX_2^2 + BX_2 + C$$
$$F_3 = AX_3^2 + BX_3 + C$$

SI SE HACE LA SOLUCIÓN EN FORMA PARAMÉTRICA, CON $X_1 = 0$ • $X_2 = T$, $X_3 = 2T$ SE OBTIENE AL RESOLVER EL SISTEMA.

$$F_1 = C$$

$$A = (F_1 + F_3 - 2F_3) / 2T^2$$

$$B = (4F_2 - 3F_1 - F_3) / 2T.$$

Despejando para u en (4.2.1.)

$$u = T\,(3\,F_1 - 4\,F_2 + F_3)/(2F_1 - 4F_2 + 2F_3)$$

Para comprobar que u es un mínimo

$$H''(u) = 2\,A > 0 \Rightarrow A > 0$$

se deberá cumplir que

$$F_1 + F_3 > 2F_2$$

El óptimo de esta parábola está en un punto con -- abcisa igual a $x_2 + S_M$, donde $S_M$ está dado por

$$S_M = \tfrac{1}{2}\,S(F_1 - F_3)/(F_1 - 2F_2 - F_3) \qquad (4.2.2)$$

El valor óptimo para u, obtenido mediante la solución para A y B, se hace igual a:

$$u = x_2 + S_M$$

de donde se obtiene la fórmula (4.2.2) para el factor de corrección.

La realización de un ciclo completo del proceso se cumple con la terminación de las dos fases. En el caso - de obtener un valor óptimo que no cumpla las necesidades de precisión, se inicia el proceso nuevamente en uno de - los dos puntos $x_2$ o $x_2 + S_M$; se escoge aquel que tenga menor valor de la función. Es necesario también al ini--

CIAR UN NUEVO CICLO REDUCIR EL TAMAÑO DEL PASO.

El factor de reducción del intervalo no se puede - hallar en forma general, pues depende del tamaño de paso utilizado. Además el factor de corrección $S_M$ depende de la función objetivo del problema.

## 4.3.- METODO COMBINADO.

Tiene como el método anterior dos fases. La primera de ellas, localización del intervalo que contiene el -- óptimo. Esta fase es idéntica a la usada en el procedi- - miento de Davies, Swann y Campey.

La segunda fase se hace por el método de Golden --- Search. Se escogió este procedimiento sobre el de Fibo--- nacci, por no depender del número de experimentos aunque - es menos eficiente que aquel.

El método es básicamente una técnica para la reducción de un intervalo en forma acelerada sin hacer examen - exhaustivo, mediante la colocación de observaciones dentro del mismo. Basado en la diferencia entre los valores del funcional o valores de salida, se eliminan ciertas secciones del intervalo, donde se sabe que no se encuentra el -- punto óptimo.

Al realizar una búsqueda por Fibonacci se puede probar (14) que

$$L_{N-J} = L_{N-J+1} + L_{N-J+2} \qquad (4.3.1)$$

DONDE N ES EL NÚMERO DE ENSAYOS QUE SE VAN A REALIZAR Y J ES EL ENSAYO ACTUAL. $L_{N-J}$ LA LONGITUD DEL INTERVALO QUE SE VA A INVESTIGAR EN LA OBSERVACIÓN N-J

EN EL PROCEDIMIENTO DE GOLDEN-SEARCH, NO SE CONOCE -- EL VALOR DE N, LO CUAL HACE QUE LA ECUACIÓN ANTERIOR NO SEA DE MUCHA UTILIDAD COMO TAL, PERO SÍ ALGUNAS RELACIONES QUE - SE PUEDEN DEDUCIR DE ELLA.

SEA

$$\frac{L_{N-J}}{L_{N-J+1}} = \tau = \frac{L_{N-J-1}}{L_{N-J}}$$

SI SE DIVIDE (4.3.1) POR $L_{N-J} + 2$ Y TENIENDO EN - - CUENTA QUE

$$L_{N-J-1} / L_{N-J+1} = \tau^2$$

SE OBTIENE

$$\tau^2 = \tau + 1$$

DONDE SOLO ES DE INTERÉS LA RAÍZ POSITIVA

$$\tau = (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1.6180339$$

EL VALOR $\tau$ SIRVE PARA DETERMINAR LA MAGNITUD DE UN INTERVALO DESPUÉS DE N ENSAYOS.

$$L_N = 1/ \tau^{N-1}$$

SE PUEDE HACER UNA COMPARACIÓN ENTRE EL MÉTODO DE --

FIBANACCI Y EL DE GOLDEN-SEARCH, USANDO LA RELACIÓN DESA-- RROLLADA POR LUCAS, ENTRE LOS NÚMEROS DE FIBONACCI Y $\tau$

$$F_N = ( \tau^{N+1} - (-\tau)^{-(N+1)} ) / \sqrt{5}$$

LA RELACIÓN SE DEDUCE DEL HECHO QUE

$$F_{N+2} = F_{N+1} + F_N \qquad (4.3.2)$$

EL N-ESIMO NÚMERO DE FIBONACCI SE PUEDE CONSIDERAR - COMO UNA FUNCIÓN $F_N$ DE LOS ENTEROS NO NEGATIVOS. CONSTRU-- YENDO UNA SERIE DE POTENCIA CUYOS TÉRMINOS SON POTENCIAS -- DECRECIENTES NEGATIVAS DE UN PARÉMTRO $Z$ Y DONDE EL COEFI-- CIENTE DEL I-ÉSIMO TÉRMINO ES FI

$$F_N(\ ) = F_0 + F_1 Z^{-1} + F_2 Z^{-2} + \dots = \sum_{I=0}^{00} F_I Z^{-I}$$

SE VE QUE ESTA FUNCIÓN ES LA TRANSFORMADA $Z$ DE LA -- FUNCIÓN $F_N$. LA TRANSFORMADA -$Z$ DEL (N+1) NÚMERO DE FIBONACCI ES:

$$F_{N+1}(Z) = F_1 + F_2 Z^{-1} + F_3 Z^{-2} + \dots$$

$$= Z (F_0 + F_1 Z^{-1} + F_2 Z^{-2} + \dots) - Z F_0$$

$$= Z F_N (Z) - Z F_0$$

DE LA MISMA FORMA SE OBTIENE

$$F_{N+2} (Z) = Z F_{N+1} (Z) - Z F_1$$

Combinando estas dos ecuaciones

$$F_{N+2}(z) = z^2 \; F_N(z) - z^2 - z$$

Si se aplica la transformada $z$ a (4.3.2)

$$F_{N+2}(z) = F_{N+1}(z) + F_N(z)$$

de la cual se obtiene por reemplazo

$$F_N(z) = z^2/(z^2 - z - 1)$$

El lado derecho de esta ecuación, se puede expresar - como

$$1 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 5z^{-4} + \dots .$$

o también se puede hacer

$$F_N(z) = \frac{z^2}{(z-\tau)(z+\tau^{-1})} = \frac{z^2}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{z-\tau} - \frac{1}{z+\tau^{-1}}\right]$$

pero

$$\frac{1}{z-\tau} = \frac{z^{-1}}{1-\tau z^{-1}} = z^{-1}(1+ z^{-1}+ {}^{2}z^{-2}+\dots)$$

$$\frac{1}{z+{}^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1+\tau^{-1}z^{-1}} = z^{-1}(1- \tau^{-1} z^{-1} + \tau^{-2} z^{-2} - \tau^{-3} z^{-3} + \dots .)$$

Según esto

$$F_N(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{0}^{\infty} \left[\tau^{I+1} - (-\tau)^{-(I+1)}\right] z^{-I} = \sum_{0}^{\infty} F_I z^{-I}$$

De esta ecuación, se puede deducir la relación

$$F_{N-2}^{2} - F_{N-1}\, F_{N-3} = (-1)^{N}$$

Cuando N es bastante grande, el segundo término se vuelve despreciable, obteniéndose

$$F_N \approx \tau^{N+1} / \sqrt{5}$$

Si $L_N$ es el intervalo resultante después de N ensayos por Golden-Search y $S_N$ es el obtenido por Fibonacci

$$L_N / S_N = (\tau^{N+1}) / (\sqrt{5}\, \tau^{N-1})$$

$$= \tau^{2} / \sqrt{5} = 1.1708$$

De esta forma se ve que el intervalo obtenido por - Golden-Search es un 17% mayor que el obtenido usando Fibonacci.

El método halla puntos mínimos a lo largo de una -- línea. Su descripción es bastante sencilla.

Una vez que se han obtenido los límites superior e- inferior correspondientes a la fase I, se sitúan dos experimentos en el intervalo. Sean U y V los límites inferior y superior respectivamente

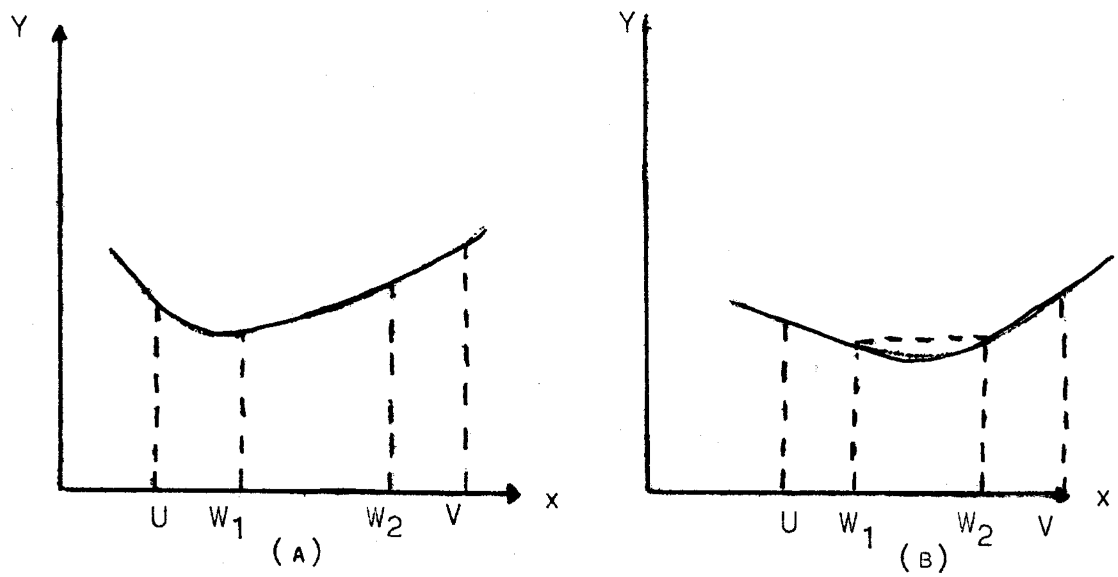
$$F_1 = (3 - \sqrt{5}) / 2 = 0.382$$

$$F_2 = 1 - F_1 = 0.618$$

LAS OBSERVACIONES SE SITÚAN EN DOS PUNTOS

$$W_1 = U + F_1 \; (V - U)$$
$$W_2 = U + F_2 \; (V - U)$$

SE PUEDEN PRESENTAR LAS DOS SITUACIONES SIGUIENTES:




SITUACIONES POSIBLES EN GOLDEN-SEARCH

EN (A) $F(W_1) < F(W_2)$. EN ESTE CASO SE ELIMINA UNA PARTE DEL INTERVALO, PRODUCIENDO UN INTERVALO RESULTANTE - MENOR QUE ES $[U, W_2] = L_1$

EN (B) $F(W_1) > F(W_2)$. EL INTERVALO RESULTANTE -- PARA LA NUEVA LOCALIZACIÓN DE ENSAYOS ES $[W_1, V] = L_2$ EN CASO DE IGUALDAD DE LOS DOS VALORES DEL FUNCIONAL SE -- PUEDE ESCOGER CUALQUIERA DE $L_1$ O $L_2$.

SE PUEDE VER UNA GRAN DIFERENCIA ENTRE LOS DOS MÉTO DOS USADOS EN LA FASE FINAL DE LA BÚSQUEDA LINEAL. LA IM-

PLEMENTACIÓN DEL GOLDEN-SEARCH ES MUY SENCILLA Y REQUIERE -- SÓLO EFECTUAR UNA COMPARACIÓN PARA DETERMINAR EL INTERVALO - PARA LA SIGUIENTE SERIE DE ENSAYOS. ESTE MENOR NÚMERO DE -- COMPARACIONES ES YA UNA VENTAJA CONSIDERABLE.

# CAPITULO V

## DESCRIPCION DE LOS METODOS MULTIDIMENSIONALES

### 5.1.- GENERALIDADES.

Los métodos considerados tienen como objetivo la optimización de funcionales sin restricciones. Existe una característica común a todos los métodos, que es la de ser procedimientos de búsqueda del tipo directo y trabajar en base a direcciones factibles.

Dentro de los métodos directos existe una gran variedad de algoritmos, algunos de ellos con aplicaciones muy específicas, y con diferentes grados de complejidad para su desarrollo como proceso computacional. Algunos muy simples, como el método de tabulación o el de búsqueda al azar, pero con las desventajas obvias de requerir un gran número de cálculos.

Los métodos secuenciales, o sea aquellos que van avanzando a partir de una solución inicial en forma progresiva, son los que han tenido más vasta aceptación. Además de los presentados en este capítulo, se pueden mencionar entre otros: el método simplex, desarrollado por Spendley, Hext y Hinsnorth (12), métodos de alternación de variables (1), métodos que emplean rotación de coordenadas como el de Rosembrock (10), además de una gran cantidad de algoritmos que utilizan las propiedades de las derivadas parciales para determinar los avances.

## 5.2.- Metodo de Davies, Swann y Campey multidimensional.(1)

Este método, similar en algunas de sus partes al desarrollado por Rosembrock, trabaja en base a búsquedas en direcciones ortonormales.

Se define una etapa del procedimiento como la serie de localización de óptimos en todas y cada una de las direcciones. Al final de cada etapa se hace una redefinición de las mismas por el procedimiento de Gram-Schmidt.

Se definen las direcciones originales como los vectores unitarios $E_i$, o sea, el sistema original de coordenadas que cumplen las condiciones de ortonormalidad

$$\xi_i = E_i$$

$\Delta_i$ es la suma algebraica de los avances en la dirección denotada por

$\xi_i^j$ durante la etapa $j$.

$\xi_1^j, \xi_2^j, \ldots\ldots\ldots, \xi_N^j$ son los vectores dirección ortonormales para la etapa $j$.

Se define un proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt (2) como aquel que produce a partir de $N$ vectores, un conjunto base para un espacio vectorial $N$ dimensional con la característica adicional de ser vectores unitarios y ortonormales.

Se definen los vectores $A_1$, $A_2$, ...., $A_N$ en la forma

$$A_I = \sum_{K=1}^{N} \Delta_K \, \xi_K^J \qquad (5.2.1.)$$

DE ESTA FORMA SE PUEDE CONSIDERAR CADA UNO DE LOS VECTORES $A_I$ COMO EL ACUMULADO DE LOS AVANCES DURANTE LA ETAPA J, SIENDO $A_1$ EL ACUMULADO O AVANCE TOTAL, $A_2$ EL AVANCE TOTAL EXCEPTUANDO EL AVANCE EN LA PRIMERA DIRECCIÓN, ETC.

EL VECTOR ORTONORMAL $\xi_1'$ SE OBTIENE

$$\xi_1' = A_1 / |A_1|$$

LOS VECTORES AUXILIARES, D, SIRVEN PARA DETERMINAR LOS $\xi_1'$ FINALES, Y ESTÁN DEFINIDOS POR

$$D_K = A_K - \sum_{I=1}^{K-1} \left( A_K^T \xi_I^{J+1} \right) \xi_I^{J+1} \qquad K \geq 2$$

$$\xi_K' = D_K / |D_K| \qquad K = 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ N$$

DURANTE LA FASE DE BÚSQUEDA LINEAL A LO LARGO DE CADA EJE, ES POSIBLE QUE EL AVANCE $\Delta_I$, EN ALGUNOS DE ELLOS SEA CERO O MUY PEQUEÑO; BAJO ESTA CIRCUNSTANCIA EL PROCESO DE ORTONORMALIZACIÓN NO FUNCIONA ADECUADAMENTE.

SEA $P > 0$ EL NÚMERO DE VECTORES ASOCIADOS CON UN $\Delta$ IGUAL A CERO. EXISTEN N-P VECTORES DIRECCIONALES SOBRE LOS CUALES HUBO AVANCE EFECTIVO. SE HACE UN REORDENAMIENTO DE LOS VECTORES DE TAL FORMA QUE LOS PRIMEROS N-P, ESTO ES -

LOS CORRESPONDIENTES A LOS SUBÍNDICES 1, ....., N-P, SEAN -- PRECISAMENTE AQUELLOS QUE ESTÁN ASOCIADOS CON UN $\Delta_I$ DIFERENTE DE CERO, Y ES EN ÉSTOS DONDE SE EFECTÚA EL PROCESO DE - - ORTONORMALIZACIÓN. LOS DEMÁS VECTORES PERMANECEN SIN CAMBIO, ESTO ES

$$\xi_I^{J+1} = \xi_I^{J} \qquad I = N-P+1, \ldots\ldots, N$$

POR LAS CARACTERÍSTICAS DEL PROCEDIMIENTO DE GRAM - - SCHMIDT, LOS PRIMEROS N-P VECTORES SON ORTONORMALES. POR -- LA CONDICIÓN

$$\Delta_K = 0 \qquad K = N - P+1, \ldots\ldots, N$$

Y LA FÓRMULA (5.2.1), LOS VECTORES $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N-P}$ NO TIENEN COMPONENTES EN LAS DIRECCIONES RESTANTES, QUE - - SON A SU VEZ ORTONORMALES. DE ESTO SE CONCLUYE QUE EL SISTEMA TOTAL ES MUTUAMENTE ORTONORMAL.

LAS CONSIDERACIONES ANTERIORES DESCRIBEN EN FORMA -- COMPLETA LA TOTALIDAD DE PASOS QUE CONTIENE EL ALGORITMO. - EL CRITERIO DE CONVERGENCIA ES BASTANTE SENCILLO Y SE REDUCE A LA CONSIDERACIÓN DEL AVANCE TOTAL EN UNA ETAPA. ESTE AVANCE ESTÁ DADO POR LA SUMA DE LOS COMPONENTES DEL VECTOR $A_1$ Y SE DENOTA POR $\Delta$. SI $\Delta < \delta$, DONDE $\delta$ ES EL TAMAÑO DE PASO USADO EN LA BÚSQUEDA LINEAL, SE DIVIDE $\delta$ POR UNA CONSTANTE Y SE EFECTÚAN NUEVAMENTE OPTIMIZACIONES LINEALES EN - LAS N DIRECCIONES. EL PROCESO TERMINA CUANDO $\delta$ ES UN VALOR LO SUFICIENTEMENTE PEQUEÑO.

SI $\Delta > \delta$ SE PASA A UNA NUEVA ETAPA DIRECTAMENTE.

## 5.3.- METODO DE POWELL (8)

ESTE MÉTODO ES UNO DE LOS MÁS EFECTIVOS CUANDO SE TRATA DE MINIMIZAR UNA EXPRESIÓN CUADRÁTICA, YA QUE LLEGA A LA SOLUCIÓN ÓPTIMA DESPUÉS DE UN NÚMERO N DE ITERACIONES; EL ALGORITMO GENERA ADEMÁS DIRECCIONES MUTUAMENTE CONJUGADAS DESPUÉS DE N PASOS.

CADA ETAPA DEL PROCESO ITERATIVO EMPIEZA CON LA BÚSQUEDA LINEAL A LO LARGO DE N DIRECCIONES LINEALMENTE INDEPENDIENTES, A PARTIR DE LA MEJOR APROXIMACIÓN AL ÓPTIMO, $P_0$. LAS DIRECCIONES INICIALES SE ESCOGEN COMO LOS EJES COORDENADOS Y SE CAMBIA EN CADA ITERACIÓN UN VECTOR DIRECCIÓN $\xi$ A LO SUMO. ESTE PROCEDIMIENTO ASEGURA QUE LA CONVERGENCIA AL MÍNIMO ES SATISFACTORIA AUNQUE LA APROXIMACIÓN INICIAL NO SEA MUY BUENA.

EL ALGORITMO CONSIDERA LA POSIBILIDAD, Y ÉSTA ES UNA DE LAS PRINCIPALES VENTAJAS DEL MISMO, DE QUE SE ESCOJAN DIRECCIONES QUE SON APROXIMADAMENTE DEPENDIENTES, LO CUAL ES UNA SERIA DIFICULTAD CUANDO EL NÚMERO DE VARIABLES INDEPENDIENTES CRECE, PUES LAS DIRECCIONES RESULTANTES PUEDEN NO GENERAR EL ESPACIO COMPLETAMENTE.

LOS PASOS DEL ALGORITMO DE POWELL SON LOS SIGUIENTES:

I.-) PARA $R = 1, 2, \ldots\ldots, N$, CALCULAR $\lambda_R$ TAL QUE

$$F(P_{R-1} + \lambda_R \xi_R)$$

SEA UN MÍNIMO Y SE DEFINEN

$$P_R = P_{R-1} + \lambda_R \xi_R$$

ESTO ES, SE HACE UNA BÚSQUEDA LINEAL A LO LARGO DE -- CADA DIRECCIÓN Y SE SITÚA EL PUNTO INICIAL DE EXPLORACIÓN -- DE CADA EJE COMO EL ÓPTIMO OBTENIDO HASTA LA BÚSQUEDA ANTE-- RIOR.

II.-) HALLAR EL NÚMERO ENTERO M, $1 \leq M \leq N$, TAL - QUE

$$F(P_{M-1})-F(P_M)$$

SEA UN MÁXIMO Y SE DEFINE

$$\Delta = F(P_{M-1}) - F(P_M)$$

EN ESTE PASO SE BUSCA UNA DIRECCIÓN DE MÁXIMO AVANCE.

III.-) CALCULAR $F_3 = F(2P_N - P_0)$

$$F_1 = F(P_0) \quad Y \quad F_2 = F(P_N)$$

SE HACEN TRES OBSERVACIONES SOBRE LA FUNCIÓN PARA -- DETERMINAR SUS CONDICIONES DE PENDIENTE.

IV.-) SI $F_3 \geqslant F_1$ Y/O

$$(F_1 - 2F_2 + F_3)(F_1 - F_2 - \Delta)^2 \geqslant 1/2\ \Delta (F_1 - F_3)^2$$

SE DEBEN USAR LAS DIRECCIONES ACTUALES SIN CAMBIO, PARA LA SIGUIENTE ITERACIÓN Y TOMAR COMO PUNTO DE PARTIDA $P_0$, EL - VECTOR $P_N$.

SI NO SE CUMPLE NINGUNA DE ESTAS DOS CONDICIONES, - PASAR AL PASO V)

V.-) En esta fase se hace el cambio de uno de los vectores dirección.

Se define $\xi = P_N - P_0$ y se calcula el valor $\lambda$ tal que $F(P_N + \lambda \xi)$ sea mínimo (búsqueda lineal). Se usan como vectores dirección todos los anteriores a excepción de $\xi_M$, quedando los nuevos direccionales en el siguiente orden.

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{M-1}, \xi_{M+1}, \ldots, \xi_N,$$

El criterio de convergencia se logra cuando los cambios en las variables independientes, $X_I$, son menores que la precisión requerida.

Powell en la descripción del algoritmo describe un criterio de convergencia que es bastante seguro pues verifica en forma un poco exagerada quizás, que se cumplan realmente las condiciones de optimalidad. La descripción del procedimiento para determinar si se ha hallado un punto óptimo es como sigue:

I.- Seguir los pasos del algoritmo general hasta que los cambios obtenidos en cada variable sean menores que un $\varepsilon$ especificado. El punto que se obtiene al final de este paso es <u>A</u>.

II.- Aumentar cada variable en una cantidad igual a diez veces la precisión requerida.

III.- Repetir el proceso determinado por el algoritmo hasta lograr un cambio pequeño en cada variable. El punto obtenido es <u>B</u>.

IV.- Hallar el mínimo C sobre la línea que pasa por A y B.

V.- Se logró convergencia si los componentes de - - (A-C) y (B-C) son todos menores que un décimo de la precisión requerida. Si no se cumple esto,

VI.- La dirección $\xi_{11}$ del algoritmo se cambia por -- (A-C) y se va al paso I)

El criterio, como se ve, es excesivamente seguro. - Tiene la ventaja de cambiar el óptimo inicial hacia direcciones donde la función varía muy lentamente.

## 5.4.- METODO DE STEEPEST. (1)

La diferencia esencial entre los métodos anteriores y los que se describen a continuación, es la necesidad que tienen estos últimos del cálculo de derivadas parciales.

La determinación de las direcciones de búsqueda requieren el conocimiento del valor del gradiente y aún de - derivadas de orden mayor, en el punto considerado. Se pueden emplear dos políticas para solucionar esta situación: expresar las derivadas en forma explícita o evaluar numéricamente mediante ecuaciones de diferencia. En el caso de usar la segunda posibilidad, surgen algunos problemas que es conveniente mencionar: se aumenta notoriamente el número de evaluaciones de la función objetivo, pues se requiere hacer exámenes cerca del punto considerado. En general, la precisión obtenida por ecuaciones de diferencia es muy pobre y por lo tanto se obtiene una estimación no -

MUY CONVENIENTE DEL VECTOR DIRECCIÓN $\underline{D}$

SI SE USA POR EJEMPLO, LA EXPRESIÓN

$$\frac{\partial F}{\partial X_J} = \frac{F(X_I + H) - F(X_I)}{H_J} + O(H_J^2)$$

PARA ESTIMAR EL GRADIENTE DE F (X), LA ESCOGENCIA DEL INCREMENTO H, PUEDE CAUSAR PROBLEMAS. SI H ES MUY PEQUEÑO, SE PRODUCE UN ERROR DE CANCELACIÓN DE DÍGITOS SIGNIFICATIVOS CUANDO SE EFECTÚA LA RESTA EN LA OPERACIÓN ANTERIOR, MIENTRAS QUE SI H ES GRANDE, EL ERROR SURGE POR TRUNCACIÓN EN LA FÓRMULA DE DIFERENCIAS.

EL PROBLEMA ES MAYOR AÚN SI SE TRATA DE ESTIMAR DERIVADAS DE ORDEN MAYOR QUE UNO Y SE PUEDE CASI AFIRMAR QUE EL USO DE MÉTODOS NUMÉRICOS, PARA ESTE TIPO DE CONSIDERACIONES, DEBE EVITARSE HASTA DONDE SEA POSIBLE, AUNQUE TAMBIÉN ES CIERTO QUE LA EXPRESIÓN ANALÍTICA PARA LAS DERIVADAS PARCIALES NO SIEMPRE ES FÁCIL DE OBTENER.

EL MÉTODO DE STEEPEST, ASCENT O DESCENT, ES UNO DE LOS MÁS CONOCIDOS Y DEBE SUS FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y REALIZACIÓN AL MATEMÁTICO CAUCHY.

LA DIRECCIÓN DADA POR EL GRADIENTE DEL FUNCIONAL EN UN PUNTO, ES PROPORCIONAL AL VECTOR DE PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES.

SI SE CONSIDERA UNA PEQUEÑA PERTURBACIÓN AL PUNTO EN CONSIDERACIÓN $X_I$ DADA POR EL VECTOR $(\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_N)$ LA FUNCIÓN OBJETIVO CAMBIARÁ, SI SE CONSIDERA UNA APROXIMACIÓN DE PRIMER ORDEN, POR UNA CANTIDAD

$$dF = \sum_{J=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial x_J} \delta x_J$$

DE TODAS LAS POSIBLES PERTURBACIONES A $x_I$, , DE -- MAGNITUD

$$\Delta = \left[ \sum \delta x_J^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

EL MÉTODO DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE, INDICA CÓMO OBTENER LA PERTURBACIÓN CON MAYOR CAMBIO EN EL FUNCIONAL, A -- PARTIR DEL LAGRANGIANO

$$\phi(X, \lambda) = dF + \lambda\left( \sum \delta x_J^2 - \Delta^2 \right)$$
$$= \sum \frac{\partial F}{\partial x_J} \delta x_J + \lambda\left( \sum \delta x_J^2 - \Delta^2 \right)$$

DERIVANDO CON RESPECTO A $\delta x_J$

$$\frac{\partial F}{\partial x_J} + 2 \lambda \delta x_J = 0 \qquad J = 1, 2, \ldots, N$$

SE OBTIENE ASÍ UNA CONDICIÓN QUE DEBEN CUMPLIRSE -- PARA TODAS LAS PERTURBACIONES

$$\frac{\delta x_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \frac{\delta x_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} = \cdots\cdots = \frac{\delta x_N}{\frac{\partial F}{\partial x_N}}$$

LO CUAL MUESTRA QUE EL MAYOR CAMBIO EN EL FUNCIONAL, SE -- LOGRA CUANDO LOS $\delta x_J$ SE ESCOGEN PROPORCIONALES A LOS CORRES PONDIENTES $\partial F / \partial x_J$.

LA CONDICIÓN DE CAMBIO EN LA FUNCIÓN, SE PUEDE CONSI DERAR EN DOS SENTIDOS: POSITIVO O NEGATIVO SEGÚN SE QUIE-- RA MAXIMIZAR O MINIMIZAR. EN EL ÚLTIMO CASO, LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD ES NEGATIVA Y LA DIRECCIÓN ES LA DE -- STEEPEST-DESCENT.

SE PUEDE FORMALIZAR EL PROCESO DE OPTIMIZACIÓN POR - GRADIENTE, CON EL SIGUIENTE TEOREMA (15) QUE INDICA LA OP-- TIMALIDAD DEL PROCESO DE BÚSQUEDA.

TEOREMA: SEA F UNA FUNCIÓN DIFERENCIABLE EN EL -- PUNTO X. SE SUPONE QUE EXISTE UNA DIRECCIÓN D TAL QUE

$$\nabla F(x) \cdot D < 0$$

ENTONCES EXISTE UN $\alpha > 0$ TAL QUE, PARA TODO $\lambda$ QUE CUMPLA

$$0 < \lambda < \alpha$$

$$F(X + \lambda D) < F(X)$$

LA PRUEBA DEL TEOREMA, SE CONSIDERA COMO UNA APLICACIÓN DE LA DEFINICIÓN DE DERIVADA PARCIAL YA QUE

$$\lim_{\lambda \to 0} \left( F(X + \lambda D) - F(X) \right) / \lambda = \nabla F(X) \cdot D$$

QUE POR LA SUPOSICIÓN EXPRESADA EN EL TEOREMA, DEBE SER -- MENOR QUE CERO. LA DEFINICIÓN DE LÍMITE INDICA QUE DEBE -- EXISTIR UN $\alpha > 0$, TAL QUE PARA $\lambda \neq 0$ Y

$$F(X + \lambda D) - F(X) / \lambda < 0$$

SI SE SELECCIONA $\lambda > 0$, SE CUMPLE LA CONDICIÓN.

ESTE RESULTADO INDICA QUE SI $\nabla F(x) \neq 0$ Y SE SELECCIONA LA DIRECCIÓN DE AVANCE, COMO LA DEL GRADIENTE, SE PUEDE OBTENER UNA DISMINUCIÓN EN EL VALOR DEL OBJETIVO.

EL PROCEDIMIENTO PARA EFECTOS COMPUTACIONALES, SE PUEDE REPRESENTAR ASÍ:

SEA A, UN CONJUNTO FORMADO POR EL COMPUESTO DE DOS FUNCIONES

$$A = M\ D$$

DONDE $D: E_N \longrightarrow E_{2N}$ ES LA FUNCIÓN DE X DADA POR

$$D(X) = (X, \nabla F(X))$$

O SEA, D ASIGNA A CADA PUNTO MEDIANTE UNA APLICACIÓN, EL PUNTO MISMO Y SU GRADIENTE; M ES LA APLICACIÓN CORRESPONDIENTE AL PARÁMETRO OPTIMIZADOR $\lambda$.

EL PROCESO DA UNA SECUENCIA DE PUNTOS, QUE PERTENECEN A A, Y QUE DEBE SER CONVERGENTE A UN PUNTO QUE CUMPLE LA CONDICIÓN

$$\nabla F(X) = 0$$

PARA LOGRAR ESTO, EL CONJUNTO A DEBE SER COMPACTO Y SI $\nabla F(X) \neq 0$ SE DEBE CUMPLIR QUE

$$\max_{\lambda} \quad F(X_K + \lambda \nabla F(X_K)) < F(X_K)$$

O SEA $\quad F(X_{K+1}) < F(X_K)$

De estas dos ecuaciones se puede deducir el criterio para determinar nuevos puntos, o fórmula recurrente del algoritmo.

$$X_{K+1} = X_K - \lambda_K \nabla F(X_K)$$

Una propiedad importante es que gradientes sucesivos en el proceso, son ortagonales, esto es

$$\nabla F(X_{K+1}) \nabla F(X_K) = 0$$

El método produce buenos resultados en cierto tipo de funciones, pero su aplicación está muy limitada por sus características propias.

## 5.5.- Metodo de Newton.

También se llama este procedimiento de segundo orden pues tiene la característica de considerar derivadas parciales de segundo orden; es por esta razón más ventajoso que el de Steepest pues considera mayor información sobre el funcional y su principio es la expansión de Taylor para $F(X)$, con respecto al punto mínimo $X^*$, donde las $X$ representan vectores multidimensionales.

$$F(X) = F(X^* + H)$$

$$= F(X^*) + \sum_{J=1}^{N} H_J \left[\frac{\partial F}{\partial X_J}\right]_{X^*} + \frac{1}{2}\sum\sum H_J H_K \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X_J \partial X_K}\right]_{X^*}$$

DONDE $X = X^* + H$ Y LAS DERIVADAS SE EVALÚAN EN $X^*$.

DERIVANDO LA ECUACIÓN ANTERIOR

$$\frac{\partial F}{\partial X_L} = \left[\frac{\partial F}{\partial X_L}\right]_{X^*} + \sum H_J \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X_J \quad \partial X_L}\right]_{X^*}$$

PARA $L = 1, 2, \ldots\ldots, N$

COMO EN EL MÍNIMO EL GRADIENTE ES CERO,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial X_L}\right]_{X^*} = 0$$

Y LA COMPONENTE L DEL GRADIENTE DE $F(X)$, $\nabla_L F$ SATISFACE LA RELACIÓN.

$$\nabla_L F = \frac{\partial F}{\partial X_L} = \sum H_J \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X_J \, \partial X_L}\right]_{X^*} \qquad L = 1, 2, \ldots, N \tag{5.5.1}$$

EL MÍNIMO SE OBTIENE EN ESTE CASO HACIENDO QUE -

$X^* = X - H$

DONDE LOS COMPONENTES DEL VECTOR $H$, SE HALLAN RESOLVIENDO EL SISTEMA DE ECUACIONES (5.5.1 )

SI SE DEFINE H COMO LA MATRIZ HESSIANA O SEA, LA MATRIZ SIMÉTRICA DE DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN DOS, CON $H_{JK} = \partial^2 F / \partial x_J \partial x_K$ SE TIENE QUE (5.5.1) SE PUEDE EXPRESAR COMO:

$$\nabla F(X) = H H$$

$$H = H^{-1} \nabla F(x)$$

$$X^* = X - H^{-1} \nabla F(x) \qquad (5.5.2)$$

SE OBTIENE DE ESTA FORMA EL ESQUEMA GENERAL DE ITERACIÓN DEL PROCESO. EN VISTA DE QUE EL AVANCE DADO POR (5.5.2) NO CONDUCE GENERALMENTE AL ÓPTIMO A LO LARGO DE LA DIRECCIÓN $-H^{-1} \nabla F(x)$, SE HACE LA MODIFICACIÓN

$$x_{I+1} = x_I - \lambda_I \; H^{-1} \nabla F(x)$$

DONDE $\lambda_I$ ES EL VALOR DEL AVANCE ÓPTIMO SOBRE LA LÍNEA A PARTIR DE $x_I$ EN LA DIRECCIÓN $- H^{-1} \nabla F(x)$.

LA FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA DEL PROCESO SE PUEDE HACER EN FORMA ANÁLOGA AL CASO DE STEEPEST. SE REQUIERE UN COMPACTO A, Y UNA APLICACIÓN D

$$D: E_N \longrightarrow E_{3N}$$

TAL QUE $D(X) = (X, \nabla F, H)$.

LA APLICACIÓN M, QUE ES EL CONJUNTO DE TODOS LOS VALORES DEL PARÁMETRO $\lambda$,

$$M(\lambda) = \lambda^* \text{ O VALOR ÓPTIMO}$$

Y

$$A = M.\ D$$

ZANGWILL (15) PRUEBA QUE $A$ ES UN COMPACTO Y GA-- RANTIZA QUE EL MÉTODO BAJO CIERTAS CONDICIONES, CONVERGE - HACIA EL ÓPTIMO.

## CAPITULO VI

## RESULTADOS

### 6.1.- DESCRIPCION.

Como se ha mencionado anteriormente, se usaron -- dos métodos de búsqueda lineal como base para la comparación. Se adoptó la siguiente notación en la presentación de resultados:

Método A: Búsqueda lineal por el método de Davies, Swann y Campey.

Método B: Método combinado.

Además de éstos, se usaron los cuatro algoritmos -- multidimensionales descritos en el Capítulo V.

Para efectuar las pruebas, se utilizaron tres funcionales, tratando de que presentaran problemas y situaciones diferentes. La notación y descripción de éstos es como sigue:

Funcional I: Es del tipo cuadrático

$$F(X) = \sum^{N} A_I \; X_I^2$$

donde $A_I$ y $X_I$ son números reales. Este tipo de funcionales es el que presenta menos inconvenientes por sus características de simetría con respecto a los ejes, si se logra tener un escalamiento adecuado.

En este tipo de funcionales, la interacción entre variables no existe y se logra mejor adecuación a medida que se hacen más circulares las representaciones del funcional, lo cual en último término se reduce a un problema de escala.

Funcional II: Es de características muy especiales y fue ideado por Rosembrock (10). Su expresión analítica es:

$$F(x_1, x_2) = 100\ (x_2 - x_1^2)^2 + (1-x_1)^2$$

Funcional III: Tiene como el anterior, términos compuestos, o sea, interacción entre las variables. Su expresión analítica es:

$$F(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2)^2 + (x_1-1)^2 + 4$$

El punto inicial para todas las pruebas fue (3,2) y se escogió arbitrariamente. Debe aclararse que el punto inicial es un factor importante, pero no era el propósito de las pruebas observar sus efectos en las soluciones de los problemas.

Las soluciones óptimas son: el punto (1,1) para los funcionales II y III, y (0,0) para el primero de ellos.

Los resultados obtenidos están contenidos en las tablas y figuras que se presentan a continuación.

LAS TABLAS Y GRÁFICAS 1 A 4 CORRESPONDEN A LAS PRUEBAS CON EL FUNCIONAL I. LOS RESULTADOS PARA EL SEGUNDO -- FUNCIONAL CORRESPONDEN A LAS TABLAS 5 Y 6, FIGURA 5. LAS - RESTANTES CORRESPONDEN AL FUNCIONAL III. SE INCLUYE ADEMÁS (TABLA 10) EL TIEMPO TOTAL, COMPILACIÓN Y EJECUCIÓN, REQUERIDO PARA CADA ALGORITMO Y CADA MÉTODO DE BÚSQUEDA LINEAL, EN UN COMPUTADOR CDC - 3300 CON 64 K PALABRAS DE 24 BITS CADA UNA.

EN LAS GRÁFICAS SE USÓ LA SIGUIENTE NOTACIÓN:

| | |
|---|---|
| ○ | ITERACIONES |
| △ | EVALUACIONES DEL OBJETIVO |
| ——— | LÍNEA CONTINUA PARA EL MÉTODO B |
| - - - - | MÉTODO A. |

TABLA 1

FUNCIONAL I METODO DE NEWTON

| TAMAÑO DEL PASO. | NÚMERO DE ITERACIONES A | NÚMERO DE ITERACIONES B | EVALUACIONES DEL OBJETIVO A | EVALUACIONES DEL OBJETIVO B | SOLUCIÓN OBTENIDA A | SOLUCIÓN OBTENIDA B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 1 | 2 | 15 | 70 | 0.00, 0.00 | 0,00, 0.00 |
| 0.2 | 1 | 2 | 16 | 68 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.3 | 1 | 2 | 16 | 72 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.4 | 1 | 2 | 16 | 72 | 0.00, 0.00 | 0,00, 0.00 |
| 0.5 | 1 | 2 | 16 | 76 | 0.00, 0.00 | 0,00, 0.00 |
| 0.6 | 1 | 2 | 15 | 70 | 0.00, 0.00 | 0,00, 0.00 |
| 0.7 | 1 | 2 | 17 | 70 | 0.00, 0.00 | 0,00, 0.00 |
| 0.8 | 1 | 2 | 17 | 70 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.9 | 1 | 2 | 17 | 70 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 1.0 | 1 | 2 | 17 | 70 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |

TABLA 2

FUNCIONAL I METODO DE STEEPEST-DESCENT

| TAMAÑO DEL PASO | NÚMERO DE ITERACIONES A | NÚMERO DE ITERACIONES B | EVALUACIONES DEL OBJETIVO A | EVALUACIONES DEL OBJETIVO B | SOLUCIÓN OBTENIDA A | SOLUCIÓN OBTENIDA B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 12 | 12 | 180 | 372 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.2 | 12 | 12 | 306 | 360 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.3 | 12 | 12 | 192 | 384 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.4 | 12 | 12 | 201 | 378 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.5 | 12 | 12 | 303 | 368 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.6 | 12 | 12 | 186 | 372 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.7 | 12 | 12 | 198 | 370 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.8 | 12 | 12 | 254 | 370 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.9 | 12 | 12 | 312 | 366 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 1.0 | 12 | 12 | 321 | 374 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |

TABLA 3

FUNCIONAL I METODO DE POWELL

| TAMAÑO DEL PASO. | NÚMERO DE ITERACIONES A | NÚMERO DE ITERACIONES B | EVALUACIONES DEL OBJETIVO A | EVALUACIONES DEL OBJETIVO B | SOLUCIÓN OBTENIDA A | SOLUCIÓN OBTENIDA B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 2 | 2 | 72 | 124 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.2 | 2 | 2 | 56 | 126 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.3 | 2 | 2 | 55 | 131 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.4 | 2 | 2 | 55 | 135 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.5 | 2 | 2 | 55 | 139 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.6 | 2 | 2 | 77 | 137 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.7 | 2 | 2 | 61 | 137 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.8 | 2 | 2 | 61 | 137 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.9 | 2 | 2 | 61 | 145 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 1.0 | 2 | 2 | 61 | 145 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |

TABLA 4

FUNCIONAL I METODO DE DAVIES, SWANN Y CAMPEY

| TAMAÑO DEL PASO | NÚMERO DE ITERACIONES A | NÚMERO DE ITERACIONES B | EVALUACIONES DEL OBJETIVO A | EVALUACIONES DEL OBJETIVO B | SOLUCIÓN OBTENIDA A | SOLUCIÓN OBTENIDA B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 2 | 2 | 79 | 201 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.2 | 2 | 2 | 88 | 204 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.3 | 2 | 2 | 128 | 203 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.4 | 2 | 2 | 85 | 213 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.5 | 2 | 2 | 85 | 215 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.6 | 2 | 2 | 83 | 211 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.7 | 2 | 2 | 110 | 213 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.8 | 2 | 2 | 116 | 213 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 0.9 | 2 | 2 | 121 | 204 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |
| 1.0 | 2 | 2 | 94 | 213 | 0.00, 0.00 | 0.00, 0.00 |

TABLA 5

FUNCIONAL II — METODO DE POWELL

* SOLUCION NO OPTIMA

| Tamaño del Paso | Número de Iteraciones A | Número de Iteraciones B | Evaluaciones del Objetivo A | Evaluaciones del Objetivo B | Solución Obtenida A | Solución Obtenida B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 2 | 2 | 86 | 114 | 1.413,* 1.998 | 1.4135,* 1.997* |
| 0.2 | 7 | 2 | 290 | 119 | 1.000, 1.000 | 1.413, 2,000* |
| 0.3 | 2 | 14 | 78 | 984 | 1.413,*1.997 | 1,000, 1,000 |
| 0.4 | 2 | 2 | 90 | 130 | 1.413,*1.997 | 1.413, 1.997 |
| 0.5 | 2 | 2 | 82 | 132 | 1.413,*2.000 | 1.413,* 2.000 |
| 0.6 | 9 | 2 | 286 | 138 | 1.413, 1.998 | 1.413,* 1.997 |
| 0.7 | 2 | 2 | 92 | 138 | 1.000, 1.000 | 1.413,* 1.998 |
| 0.8 | 2 | 13 | 96 | 962 | 1.413,*1.998 | 1,000 1.000 |
| 0.9 | 2 | 13 | 84 | 980 | 1.413,*2,000 | 0.999, 0.999 |
| 1.0 | 2 | 2 | 98 | 146 | 1.413,*1.997 | 1.413,* 1.998 |

TABLA 6

FUNCIONAL II — METODO DE DAVIES, SWANN Y CAMPEY

* SODUCION NO OPTIMA.

| Tamaño del Paso | Número de Iteraciones A | Número de Iteraciones B | Evaluaciones del Objetivo A | Evaluaciones del Objetivo B | Solución Obtenida A | Solución Obtenida B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 11 | 16 | 375 | 829 | 1.000 1.001 | 1.000, 1.002 |
| 0.2 | 11 | 15 | 408 | 829 | 1.001,1.002 | 0.997, 0.995 |
| 0.3 | 27 | 25 | 1043 | 1483 | 0.999,0.998 | 1.000, 1.000 |
| 0.4 | 11 | 14 | 445 | 876 | 1.001,1.002 | 1.00236, 1.00536 |
| 0.5 | 11 | 15 | 472 | 938 | 1.000,1.000 | 1.00205, 1.00299 |
| 0.6 | 13 | 2 | 742 | 138 | 0.999,0.999 | 1.41329,*1.99770 |
| 0.7 | 11 | 11 | 451 | 734 | 1.000,0.999 | 1.0025, 1.00476 |
| 0.8 | 13 | 33 | 634 | 2188 | 1.000,1.000 | 1.00256, 1.00469 |
| 0.9 | 11 | 26 | 458 | 1828 | 1.000,1.000 | 1.00103, 1.00268 |
| 1.0 | 11 | 9 | 482 | 636 | 0.999,0.999 | 1.005, 1.010 |

TABLA 7

FUNCIONAL III METODO DE NEWTON

| Tamaño del Paso | Número de Iteraciones | | Evaluaciones del Objetivo | | Solución Obtenida | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | A | B | A | B |
| 0.1 | 8 | 9 | 209 | 316 | 1.000, 0.999 | 0.999, 1.000 |
| 0.2 | 6 | 8 | 150 | 274 | 1.000, 1.000 | 1.000, 0.999 |
| 0.3 | 7 | 13 | 175 | 441 | 1.000, 0.999 | 1.000, 1.000 |
| 0.4 | 6 | 9 | 161 | 310 | 0.999, 1.000 | 1.000, 0.999 |
| 0.5 | 7 | 6 | 199 | 218 | 1.000, 0.999 | 1.000, 1.000 |
| 0.6 | 6 | 8 | 193 | 286 | 1.000, 1.000 | 1.000, 0.999 |
| 0.7 | 11 | 12 | 375 | 422 | 1.000, 0.999 | 1.000, 0.999 |
| 0.8 | 6 | 8 | 158 | 283 | 1.000, 1.000 | 1.000, 0.999 |
| 0.9 | 6 | 12 | 154 | 443 | 0.999, 1.000 | 1.000, 0.999 |
| 1.0 | 6 | 7 | 166 | 257 | 1.000, 1.000 | 1.000, 0.999 |

TABLA 8

FUNCIONAL III METODO DE POWELL

| Tamaño del Paso | Número de Iteraciones | | Evaluaciones del Objetivo | | Solución Obtenida | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | A | B | A | B |
| 0.1 | 4 | 4 | 132 | 225 | 1.000, 1.000 | 1.000, 1.000 |
| 0.2 | 5 | 5 | 183 | 289 | 1.000, 1.000 | 1.000, 1.000 |
| 0.3 | 4 | 5 | 158 | 303 | 1,000, 1.000 | 1.000, 1.000 |
| 0.4 | 5 | 5 | 246 | 316 | 1.000, 1.000 | 1.000, 1.000 |
| 0.5 | 4 | 4 | 139 | 256 | 1.000, 1.000 | 1.000, 1.000 |
| 0.6 | 5 | 4 | 214 | 270 | 1.000, 1.000 | 1.000, 1.000 |
| 0.7 | 5 | 5 | 202 | 336 | 1.000, 1.000 | 1.000, 1.000 |
| 0.8 | 4 | 4 | 198 | 272 | 1.000, 1.000 | 1.000, 1.000 |
| 0.9 | 4 | 4 | 176 | 286 | 1.000, 1.000 | 1.000, 1.000 |
| 1.0 | 4 | 4 | 185 | 286 | 1.000, 1.000 | 1.000, 1.000 |

TABLA 9

FUNCIONAL III METODO DE DAVIES, SWANN Y CAMPEY

| Tamaño del Paso | Número de Iteraciones A | Número de Iteraciones B | Evaluaciones del Objetivo A | Evaluaciones del Objetivo B | Solución Obtenida A | Solución Obtenida B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 5 | 5 | 162 | 279 | 0.999, 1.000 | 1.000, 0.999 |
| 0.2 | 5 | 5 | 185 | 191 | 0.999, 1.000 | 1.000, 0.999 |
| 0.3 | 5 | 5 | 203 | 308 | 1.000, 1.000 | 0.999, 0.999 |
| 0.4 | 5 | 5 | 203 | 318 | 0.999, 1.000 | 1.000, 1.000 |
| 0.5 | 5 | 21 | 175 | 1312 | 0.999, 1.000 | 0.999, 0.999 |
| 0.6 | 5 | 5 | 180 | 338 | 0.999, 1.000 | 0.999, 1.000 |
| 0.7 | 5 | 5 | 196 | 338 | 1.000, 1.000 | 1.000, 0.999 |
| 0.8 | 5 | 5 | 210 | 340 | 1.000, 1.000 | 0.999, 0.999 |
| 0.9 | 5 | 5 | 199 | 358 | 1.000, 1.000 | 0.999, 1.000 |
| 1.0 | 5 | 5 | 202 | 358 | 0.999, 1.000 | 1.000, 1.000 |

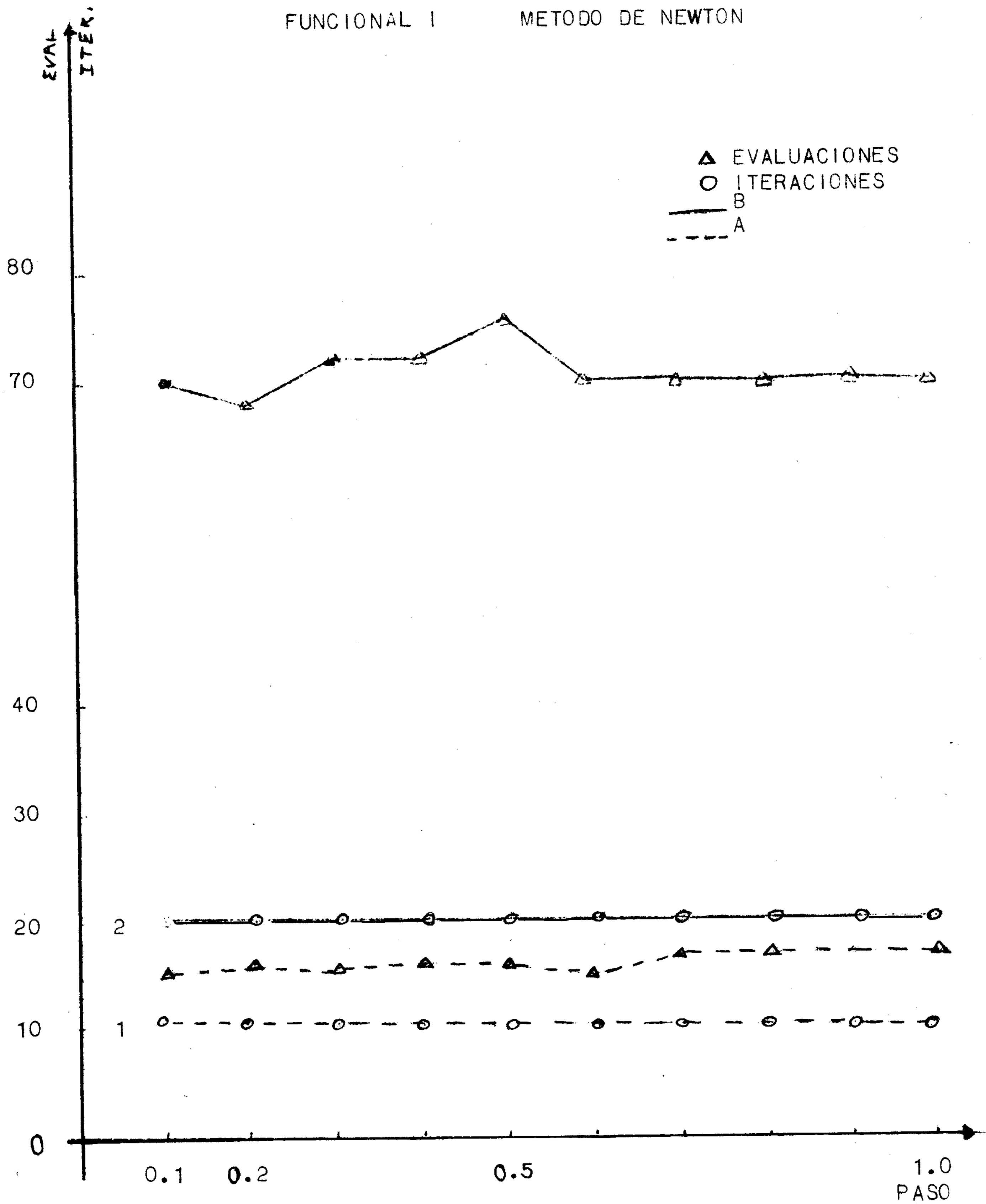
TABLA 10

TIEMPOS PARA CADA CORRIDA
(Segundos)

| FUNCIONAL | I | | II | | III | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | A | B | A | B |
| STEEPEST | 278 | 282 | - | - | - | - |
| NEWTON | 44 | 61 | - | - | 247 | 270 |
| POWELL | 32 | 95 | 327 | 352 | 151 | 382 |
| DAVIES SWANN Y CAMPEY | 70 | 144 | 280 | 361 | 203 | 242 |

FIGURA 1

FUNCIONAL I METODO DE NEWTON



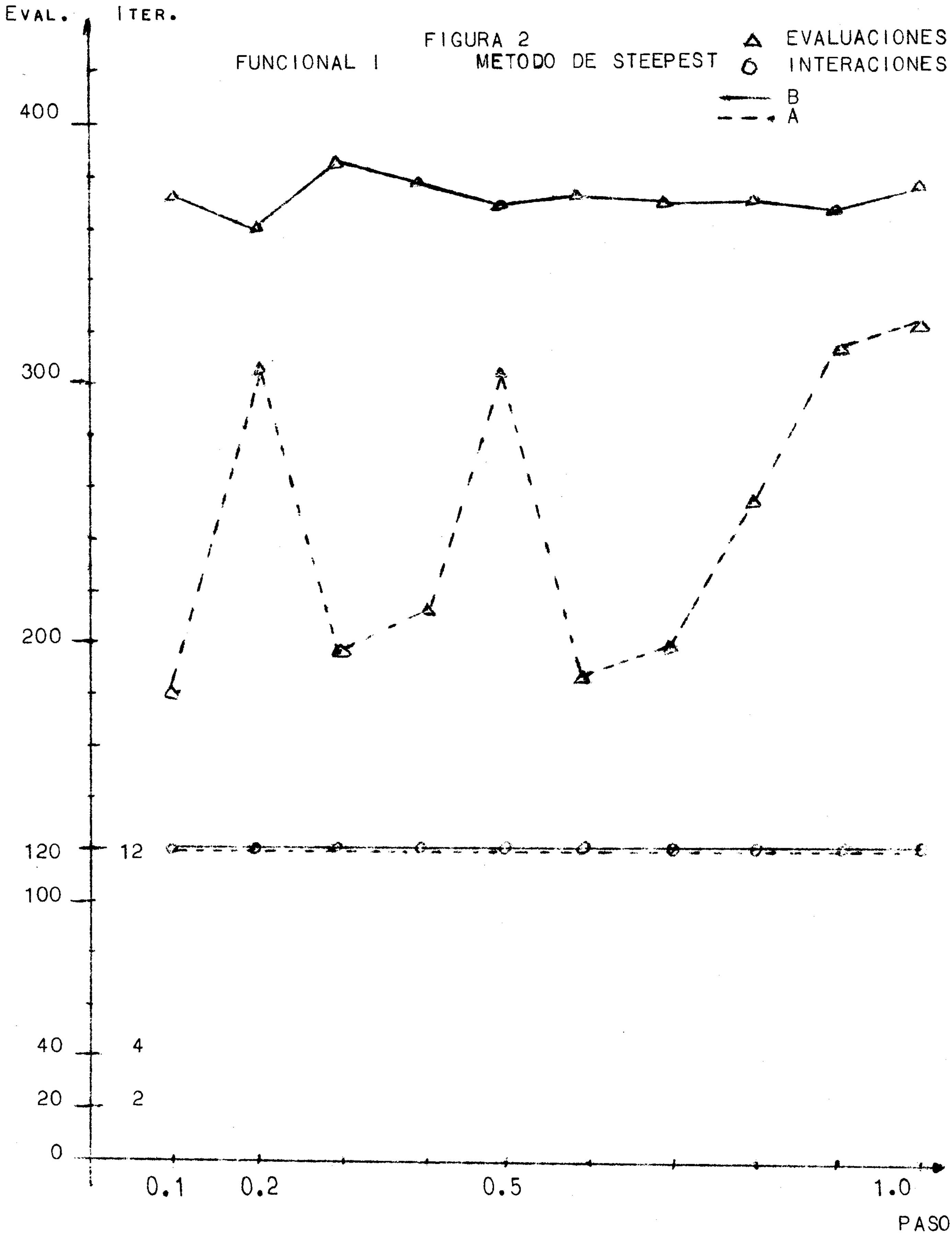

EVAL.
ITER.
FIGURA 2
FUNCIONAL I
METODO DE STEEPEST
EVALUACIONES
INTERACIONES
B
A
400
300
200
120
12
100
40
4
20
2
0
0.1
0.2
0.5
1.0
PASO

FIGURA 3

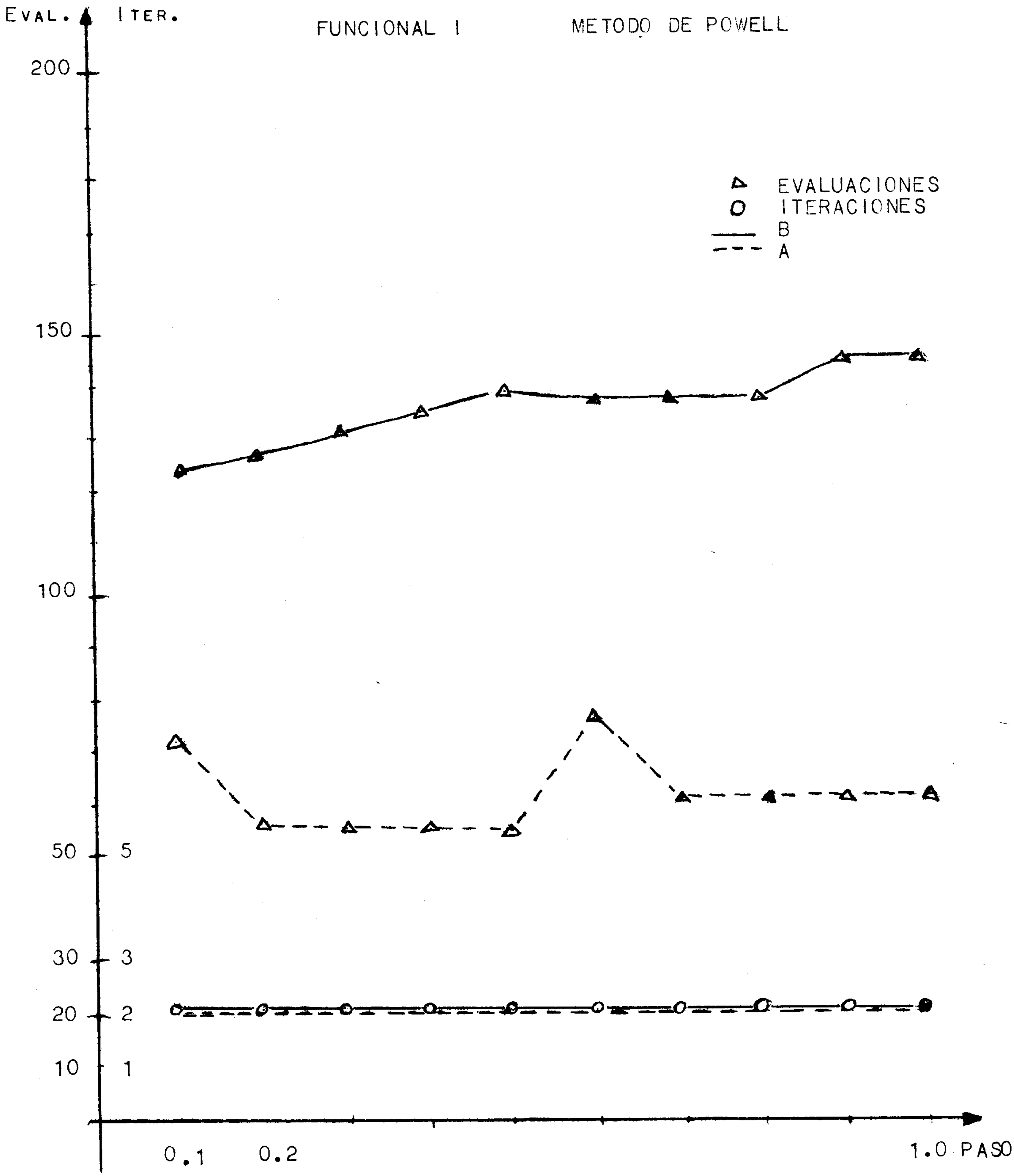

EVAL.
ITER.
FUNCIONAL I
METODO DE POWELL
200
150
100
50
5
30
3
20
2
10
1
EVALUACIONES
ITERACIONES
B
A
0.1
0.2
1.0 PASO

FIGURA 4

FUNCIONAL I     METODO DE DAVIES, SEANN Y CAMPEY

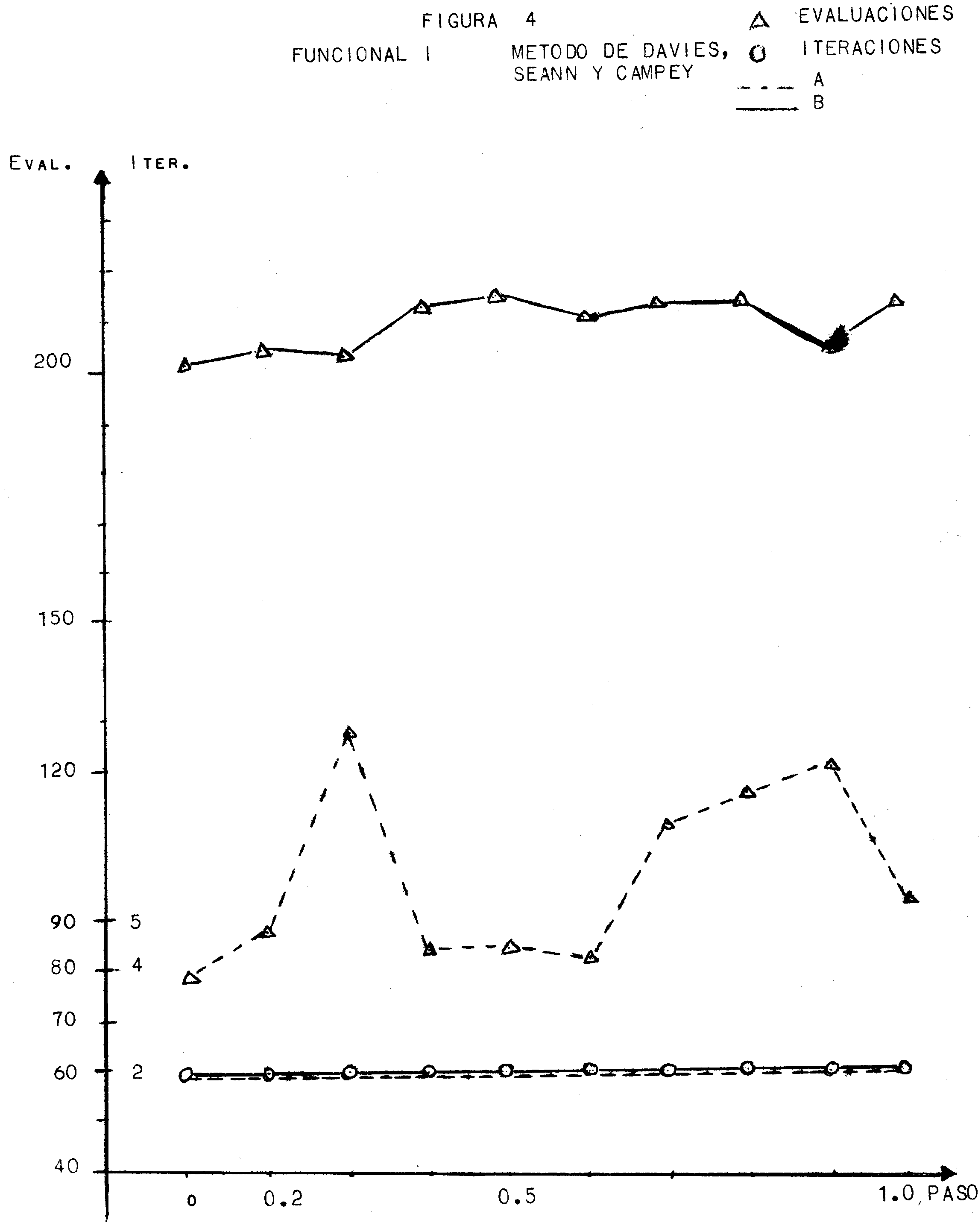


FIGURA 5
FUNCIONAL II METODO DE DAVIES

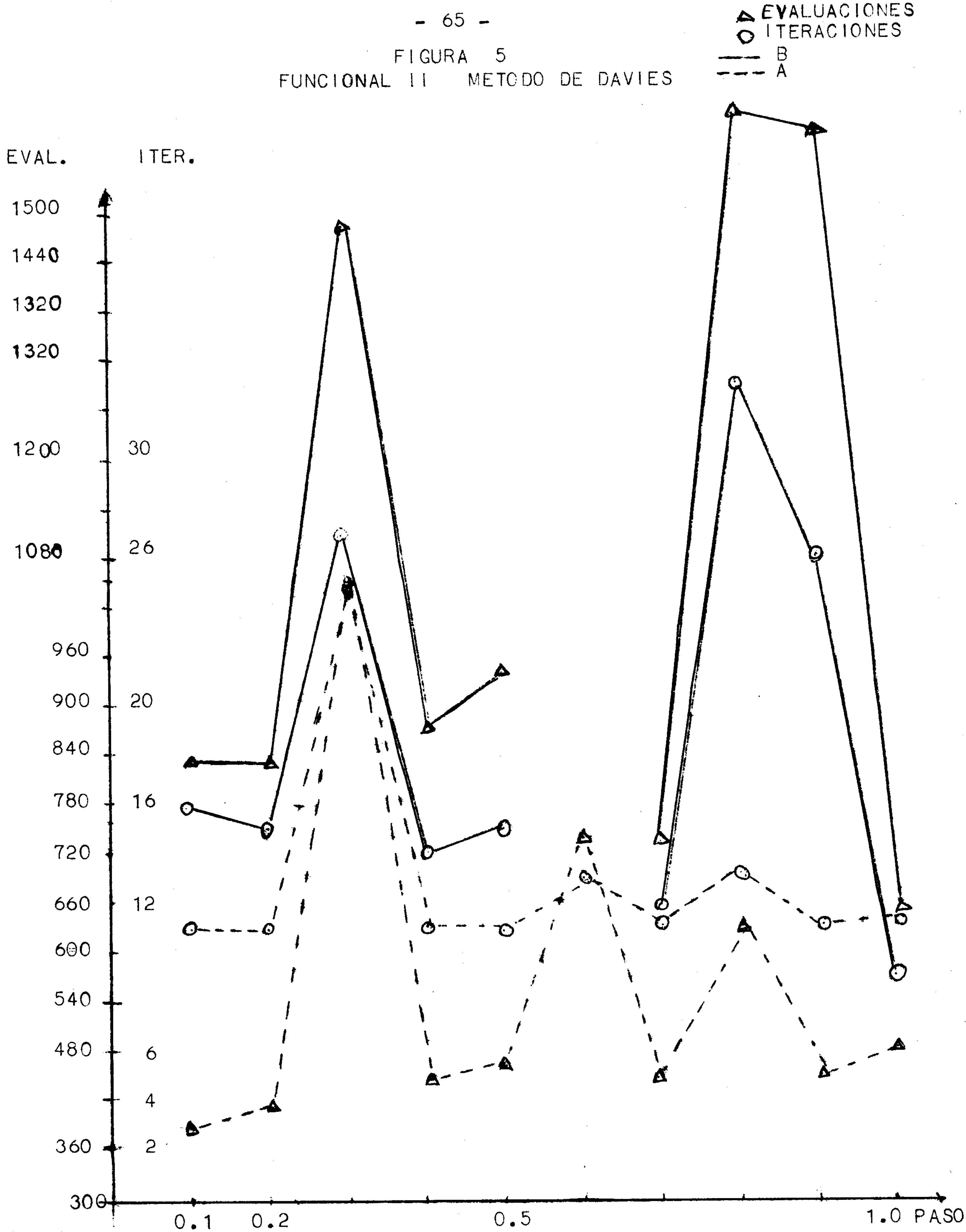


FIGURA 6

FUNCIONAL III METODO DE NEWTON

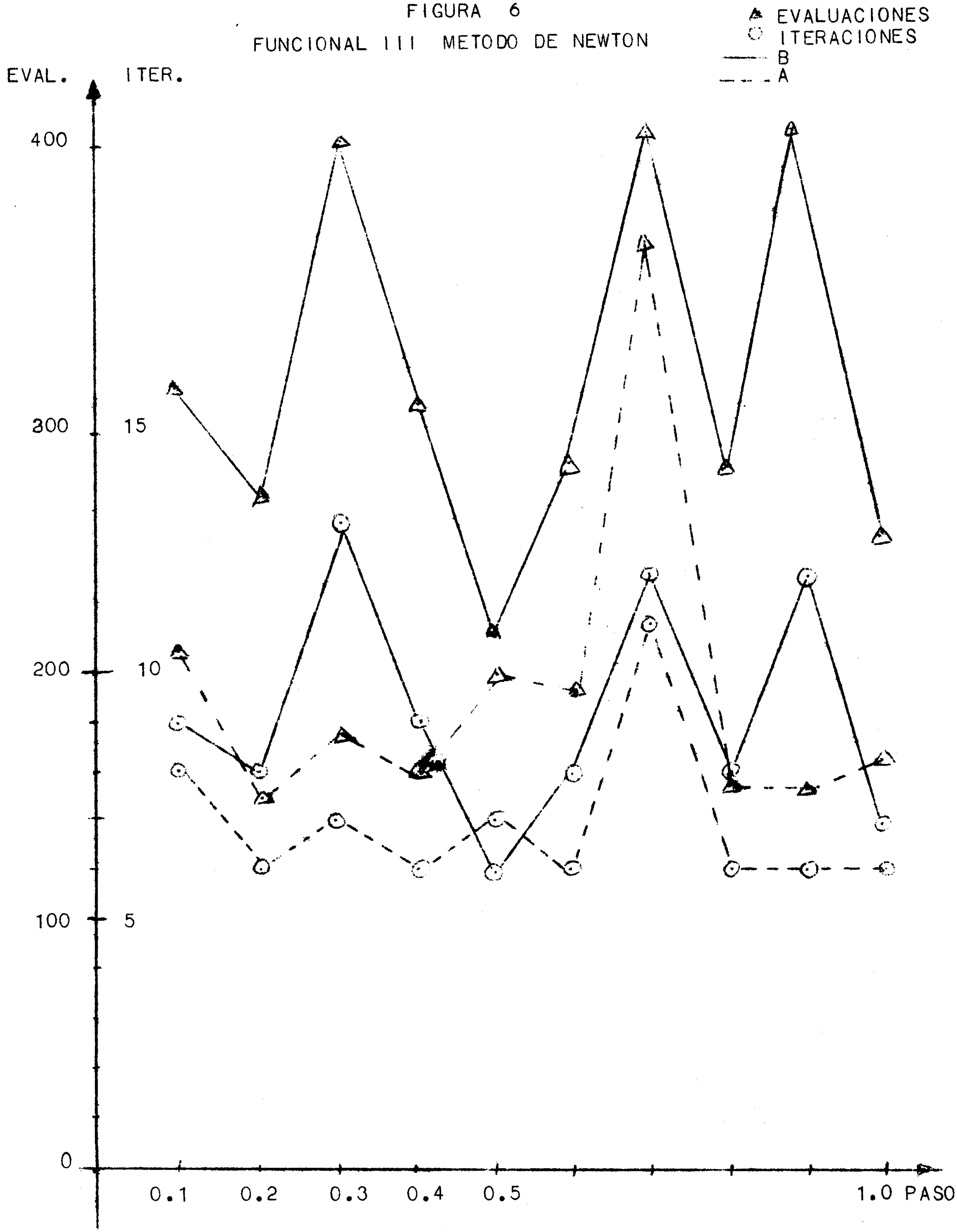


FIGURA 7

FUNCION III METODO DE POWELL

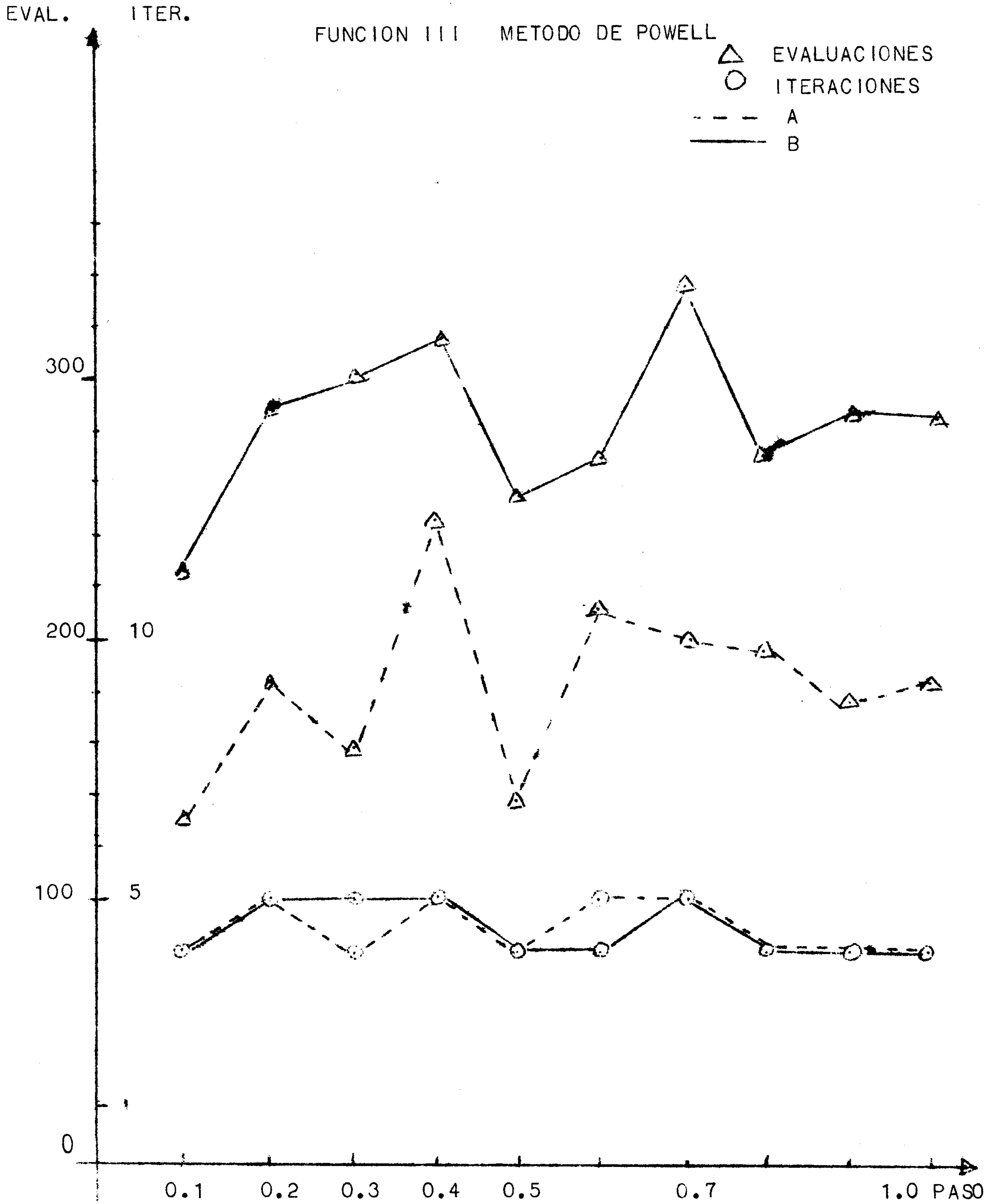
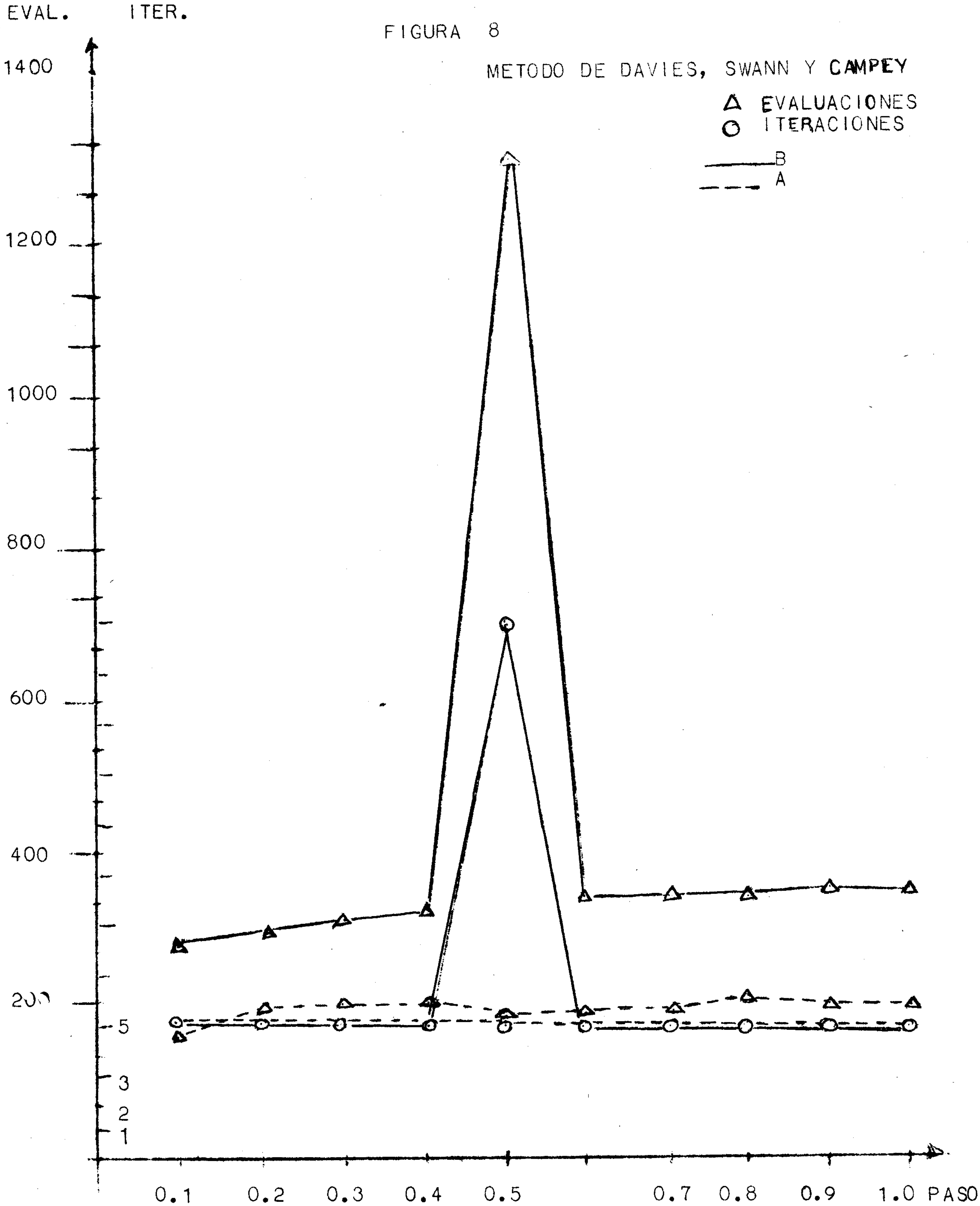


FIGURA 8


EVAL.
ITER.
1400
1200
1000
800
600
400
200
5
3
2
1
METODO DE DAVIES, SWANN Y CAMPEY
EVALUACIONES
ITERACIONES
B
A
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.7
0.8
0.9
1.0
PASO

# CAPITULO VII

## ANALISIS Y CONCLUSIONES

SE TRATA EN ESTE CAPÍTULO DE MOSTRAR LAS PRUEBAS -- QUE SE EFECTUARON Y BAJO QUÉ CONDICIONES SE REALIZARON, -- ASÍ COMO UN ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS.

CADA ALGORITMO DE BÚSQUEDA MULTIDIMENSIONAL SE PROBÓ CON LOS DOS MÉTODOS DE BÚSQUEDA LINEAL, PARA LOS TRES - FUNCIONALES DE PRUEBA. ESTO DA UN TOTAL DE 24 CORRIDAS, - CUYOS RESULTADOS APARECEN EN LAS TABLAS DEL CAPÍTULO VI.

DENTRO DE CADA UNO DE LOS CUATRO PROCEDIMIENTOS MULTIDIMENSIONALES, SE HIZO LA BÚSQUEDA CON 10 TAMAÑOS DE PASO DIFERENTES. A PARTIR DE UN PASO DE MAGNITUD 01, SE HACÍAN INCREMENTOS DE 0.1 HASTA LLEGAR AL VALOR DE 1.0, PUES SE CONSIDERÓ QUE DENTRO DE ESTE RANGO DE VALORES SE PODRÍA OBTENER UNIFORMACIÓN SOBRE LA INFLUENCIA DEL PASO EN EL -- PROCESO TOTAL.

SE REGISTRÓ EL TOTAL DE ITERACIONES, NÚMERO DE EVALUACIONES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO Y SOLUCIÓN OBTENIDA PARA CADA MÉTODO CON LOS DIFERENTES TAMAÑOS DE PASO Y PROCE- -- DIMIENTOS DE BÚSQUEDA LINEAL MENCIONADOS ANTERIORMENTE, Y EL TIEMPO TOTAL USADO POR CADA PROGRAMA EN REALIZAR TODO - EL PROCESO.

### 7.1.- ANALISIS DE RESULTADOS OBTENIDOS.

#### 7.1.1.- ANÁLISIS PARA EL FUNCIONAL I.

SI SE OBSERVAN LAS TABLAS 1 A 4 SE PUEDE APRECIAR -

LO SIGUIENTE: LA DIFERENCIA EN EL NÚMERO DE ITERACIONES -- PARA LOS MÉTODOS A Y B SÓLO APARECE EN EL ALGORITMO DE - - NEWTON. SE OBSERVA QUE AL USAR EL MÉTODO A SE HALLA EL ÓPTIMO EN UNA SOLA ITERACIÓN, MIENTRAS QUE CON B SE REQUIEREN DOS. AL USAR B, DESPUÉS DE LA PRIMERA ITERACIÓN, EL PUNTO OBTENIDO ESTÁ CERCA DEL ÓPTIMO PERO NO CUMPLE LAS NECESIDADES REQUERIDAS EN UNA SITUACIÓN DE OPTIMALIDAD PARA LAS TOLERANCIAS ESPECIFICADAS. INDICA QUE LA PRECISIÓN AL OBTENER EL ÓPTIMO SOBRE LA LÍNEA, EN CADA ITERACIÓN, NO ES LO - SUFICIENTEMENTE BUENA, REQUIRIÉNDOSE LA REALIZACIÓN DE UNA NUEVA ITERACIÓN.

PARA LOS MÉTODOS DE BÚSQUEDA LINEAL, SE USÓ EL SIGUIENTE CRITERIO: CUANDO LA DIFERENCIA ENTRE EL VALOR - DE UNA ITERACIÓN Y LA ANTERIOR ES MENOR QUE 0.0005 SE CONSIDERA LOCALIZADO EL ÓPTIMO.

SI SE OBSERVA LA TABLA 10, SE APRECIA QUE EXISTE - - UNA NOTABLE DIFERENCIA DE TIEMPO PARA LOS MÉTODOS A Y B. - EL TIEMPO TOTAL PARA B ES 39% MAYOR QUE EL EMPLEADO EN A. - NO SÓLO INFLUYE EL MAYOR NÚMERO DE ITERACIONES SINO EL - - MAYOR NÚMERO DE EVALUACIONES DEL FUNCIONAL, QUE ESTÁN, EN - PROMEDIO, EN LA RELACIÓN 1:4.4 PARA A Y B.

DE ACUERDO A LOS CRITERIOS DE COMPARACIÓN CONSIDERADOS, EL MÉTODO DE NEWTON ES EL MÁS EFECTIVO CUANDO SE TRATA DE FUNCIONALES DEL TIPO I, EXCEPTUANDO EL CRITERIO DE TIEMPO, EN EL CUAL EL MÉTODO DE POWELL ES MUCHO MÁS EFICIENTE - DE ACUERDO A LA TABLA 10.

UNA CARACTERÍSTICA IMPORTANTE DE LOS MÉTODOS DE----- NEWTON Y STEEPEST, ES LA QUE SE REFIERE A LAS PROPIEDADES - DEL VECTOR DIRECCIÓN. EN EL MÉTODO DE STEEPEST LOS VECTO--

RES DIRECCIÓN APUNTAN SIEMPRE EN DIRECCIÓN AL ORIGEN CUANDO SE TRATA DE FUNCIONALES TIPO I. EN EL MÉTODO DE NEWTON - - LAS DIRECCIONES GENERADAS SON SIEMPRE PROPORCIONALES AL GRADIENTE, POR EL HECHO DE SER LA MATRIZ HESSIANA, DE VALORES CONSTANTES, ESTO ES, SUS ELEMENTOS NO DEPENDEN DE LOS VALORES DE LAS VARIABLES INDEPENDIENTES, Y ADEMÁS SÓLO POSEE -- ELEMENTOS DIFERENTES DE CERO, EN LA DIAGONAL, YA QUE SI

$$F(X) = \sum^{N} A_I X_I^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_I} = 2A_I X_I$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X_I \partial X_J} = \begin{cases} 0 & I \neq J \\ 2A_I & I = J \end{cases}$$

Y EN EL MÉTODO DE NEWTON LA DIRECCIÓN SE CALCULA DE ACUERDO A LA RELACIÓN

$$S = - H^{-1} \nabla f$$

LAS CARACTERÍSTICAS DE H HACEN QUE EL GRADIENTE SOLO SEA MULTIPLICADO POR CONSTANTES.

LA SIMETRÍA CON RESPECTO AL ORIGEN HACE QUE MÉTODOS COMO EL DE NEWTON PRODUZCAN SOLUCIONES EN FORMA RÁPIDA.

DE LA OBSERVACIÓN DE LAS GRÁFICAS, PARA EL NÚMERO DE EVALUACIONES DEL FUNCIONAL, SE PUEDE DECIR: EN EL MÉTODO - DE DAVIES AL USAR B, LA VARIACIÓN PARA DIFERENTES TAMAÑOS -

DE PASO ES PEQUEÑA, LO CUAL PRODUCE UNA RELACIÓN CASI UNIFORME PARA LAS DESVIACIONES ENTRE ELLAS, CON MÁXIMA DIFERENCIA DE 14 (215-201). SI SE USA $A_1$ EL COMPORTAMIENTO GRÁFICO, NO MUESTRA UNA TENDENCIA DEFINIDA. LA DIFERENCIA MÁXIMA ES 49 (128-79) AUNQUE EN TODOS LOS CASOS EL NÚMERO DE EVALUACIONES ES **MAYOR** QUE PARA B.

AL USAR STEEPEST, EL ACERCAMIENTO AL ÓPTIMO EN MUCHOS CASOS ES LENTO Y DE AHÍ QUE SE NECESITE UN NÚMERO ELEVADO DE EVALUACIONES.

DE LOS CUATRO ALGORITMOS USADOS, CON EL PROCEDIMIENTO DE STEEPEST, SE OBTIENEN LOS MAYORES TOTALES PARA LAS EVALUACIONES, CON UN VALOR MÁXIMO DE 384, PRODUCIDO AL EMPLEAR EL MÉTODO B. CON A, EL NÚMERO SE REDUCE APRECIABLEMENTE PERO SIGUE SIENDO BASTANTE GRANDE COMPARADO A LOS REQUERIDOS POR OTROS PROCEDIMIENTOS. LA RELACIÓN DE EVALUACIONES A TAMAÑO DE PASO, NO TIENEN UN COMPORTAMIENTO DEFINIDO PARA EL MÉTODO B, PUES SON APRECIABLES LAS VARIACIONES PARA DIFERENTES MAGNITUDES. SÓLO EN ALGUNOS CASOS, SE OBSERVA UNA TENDENCIA ACERCA DE LA CUAL SE PODRÍAN FORMULAR CONCLUSIONES. EL TAMAÑO ÓPTIMO DE $\lambda$ PUEDE HALLARSE POR EXPERIMENTACIÓN O EN FORMA ANALÍTICA POR DERIVACIÓN DEL FUNCIONAL $F(\lambda)$. EXISTE UNA TÉCNICA QUE PERMITE CALCULAR EN FORMA DIRECTA EL VALOR ÓPTIMO DE $\lambda$ PARA CADA ITERACIÓN, PERO SÓLO ES APLICABLE PARA CIERTO TIPO DE FUNCIONALES (3).

EL TAMAÑO DE PASO ES UN VALOR TENTATIVO DEL AVANCE EN UNA DIRECCIÓN Y SIRVE PARA LOCALIZAR EL INTERVALO QUE ENCIERRA EL ÓPTIMO CON MAYOR O MENOR RAPIDEZ, POR LO CUAL TIENE GRAN INFLUENCIA SOBRE EL ESFUERZO COMPUTACIONAL TOTAL, AUNQUE NO SE OBTUVIERON CONCLUSIONES VÁLI-

DAS AL RESPECTO EN ESTE TRABAJO.

Si se usa el criterio del tiempo, Powell es el método más conveniente, aún sobre el de Newton que es el que presenta mayores ventajas absolutas en computación. La diferencia de tiempo para los dos métodos, usando A en la búsqueda lineal, es de 12 segundos.

El tamaño de paso óptimo es 0.1 para Newton y 0.2 a 0.5 para Powell, pues con estas magnitudes se minimiza el esfuerzo de cálculo.

### 7.1.2.- Funcional de Rosembrock

Esta ecuación, es una de las más conocidas en la literatura de optimización, pues sus condiciones especiales y forma, hacen que sea una buena prueba para cualquier algoritmo de búsqueda.

El método de Steepest no condujo a ningún resultado y lo mismo sucedió al emplear el algoritmo de Newton. La existencia de riscos delgados hace que el proceso dado por el algoritmo, genere direcciones y puntos consiguientes que no avanzan hacia el óptimo. Aún el método de Powell para la mayoría de los pasos usados no dió la solución óptima. Se obtuvo en muchos de ellos una solución (1.41, 2) que dista bastante de la óptima. Para algunos tamaños de paso se llegó al óptimo verdadero (1,1) y no siempre se logró esto en forma simultánea para un tamaño de paso al usar A y B.

Al investigar las condiciones en la vecindad de este punto, se observó que corresponde a un mínimo local, siendo el global el punto con coordenadas (1,1).

Este hecho es bastante curioso, pero refleja las diferencias que sobre uno y otro método de búsqueda lineal -- puede provocar el tamaño del paso.

El algoritmo de Davies se comporta bastante bien con este tipo de funcionales debido a la rotación de coordenadas en cada iteración, lo cual hace que se generen direcciones que evitan los problemas que presentan los riscos en un funcional. El método llega a la solución óptima en todos los casos (Tabla 6) y para los dos procedimientos A y B.

El criterio de comparación entre los dos métodos en tiempo y cómputo, por las razones expuestas no es válido; sólo se pueden hacer consideraciones de cada método en particular y del método de Davies en especial. En este caso se notaron diferencias apreciables en el número de evaluaciones e iteraciones. Para A, hay un rango en las iteraciones de 11 a 27 y de evaluaciones de 375 a 1043. Para B los rangos correspondientes son 11 a 33 y 639 a 2188. El número de evaluaciones es elevado, pues el algoritmo realiza búsquedas lineales en cada dirección ortonormal - - - y esto hace que cada iteración represente un apreciable -- esfuerzo de cálculo, pero por los resultados obtenidos es el único recomendable para funcionales de este tipo. Nuevamente, el método A sigue siendo más ventajoso que B y -- se puede concluir que 0.1 es el tamaño de paso más apropiado.

El tiempo necesario en este algoritmo para hacer el proceso de búsqueda total, se aprecia en la Tabla 10, siendo el necesario para el método B, 28.9% mayor que el de A.

Todos los criterios coinciden en designar a A como -

EL MÁS FAVORABLE.

### 7.1.3.- Funcional III

El método de Steepest no produjo ningún resultado - al usar este funcional. Los demás algoritmos sí conducen siempre a la solución óptima con variaciones en el aspecto computacional que son la base para las comparaciones.

Existe en este caso una fuerte dominancia en todos los criterios, del método de Powell. El funcional no presente características de simetría bajo el escalamiento en que está presentado pero sí tiene una diferencia notable - respecto del funcional II que es la carencia de riscos - - fuertes.

Métodos como el de Newton tienen buen comportamiento en estos problemas y aún el tiempo de computador necesario es comparable con el requerido por métodos como el de Davies, aunque no sean aconsejables si se comparan con los tiempos para el método de Powell (Tabla 10). La característica del algoritmo de Powell, de cambiar uno de - los vectores linealmente independientes por la dirección donde se logró el mayor avance, hace que la aproximación al óptimo sea rápida.

La variación máxima en el número de iteraciones -- para Powell, es de 1 con un mínimo de 4 y máximo de 5. El menor número de evaluaciones se logra con un paso de 0.1 y es 132. Aún el método de Davies es bastante eficiente en número de iteraciones pero el tiempo necesario en cada iteración es mayor que requerido en el algoritmo de -- Powell, como se puede observar en la Tabla de tiempos.

De los anteriores análisis se puede concluir que el método de Newton es el más conveniente para funcionales -- del tipo I, usado con un tamaño de paso igual a 0.1 y de - acuerdo al número de iteraciones, pero Powell es mucho más rápido.

Para el tipo II, Davies es la mejor alternativa con un paso igual a 0.1.

En funcionales tipo III, con iteración pero sin riscos fuertes, Powell es el más conveniente para cualquiera - de los criterios considerados.

El método de búsqueda lineal de Davies es el que produce resultados más satisfactorios y debe por tanto preferirse sobre el método combinado.

Son tantas y tan diversas las situaciones que se -- pueden presentar en problemas de optimización que dar reglas generales es muy difícil si no imposible.

Cada logaritmo de optimización tiene sus caracterís-- ticas propias y puede ser ventajoso en muchos casos e ineficiente en otros. Es por esto que el análisis de los resul-- tados se hace con referencia sólo a los resultados obtenidos y las conclusiones sólo son válidas para los casos considerados.

# CAPITULO VIII

## RECOMENDACIONES

EL USO DE MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN QUE CONTIENE PROBLEMAS DE BÚSQUEDA LINEAL DEBE HACERSE DESPUÉS DE UN ESTUDIO DETALLADO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL FUNCIONAL EN CONSIDERACIÓN, YA QUE LA UNIMODALIDAD NO ES FÁCIL DE SUPONER Y SÍ ES LA BASE ESENCIAL PARA LA APLICACIÓN DE LOS ALGORITMOS DE BÚSQUEDA LINEAL. EN GENERAL DEBE SUPONERSE COMO CIERTA ESTA PROPIEDAD Y OBSERVAR SI LOS MÉTODOS APLICADOS PRODUCEN SOLUCIONES ACEPTABLES; SI NO SE LOGRA OBTENER UNA SOLUCIÓN, DEBE INTENTARSE CON OTRO TIPO DE ALGORITMO QUE NO REQUIERA DE ESTA PROPIEDAD.

DEBE ACLARARSE QUE LA UNIMODALIDAD NO ES DEL FUNCIONAL CON RESPECTO A LAS VARIABLES INDEPENDIENTES SINO DEL PARÁMETRO $\lambda$, PUES EL PROCESO DE BÚSQUEDA A LO LARGO DE UNA DIRECCIÓN LINEAL CONSIDERA FUNCIONALES EN $\lambda$ Y NO EN X. YA QUE LAS VARIABLES INDEPENDIENTES, AL HACER LA RELACIÓN

$$X_i + \lambda S_i$$

DONDE S ES EL VECTOR DIRECCIÓN Y $X_i$ EL PUNTO ACTUAL, SE CONVIERTEN EN FUNCIONES DE $\lambda$ ÚNICAMENTE Y EL FUNCIONAL SE CONVIERTE EN UNA FUNCIÓN DE $\lambda$, $F(\lambda)$.

EN EL CAPÍTULO II SE MENCIONÓ EL PROBLEMA DEL ESCALAMIENTO, QUE DEBE TENERSE PRESENTE AL INTENTAR RESOLVER UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN. MÉTODOS COMO EL DE STEEPEST FUNCIONAN ADECUADAMENTE CON UN BUEN ESCALAMIENTO Y EVITAN EN MUCHOS CASOS LA APLICACIÓN DE MÉTODOS MÁS COMPLEJOS. -

Keefer ( 7 ) cita algunos métodos para resolver el problema de escalamiento mediante el uso de métodos heurísticos y Wilde ( 13 cita métodos analíticos de escalamiento que deben ser considerados por el experimentador que desee resolver problemas de optimización.

El método de Steepest, aunque es muy conocido, tiene algunos problemas que es necesario mencionar: a).- La información de cada iteración no se aprovecha en las siguientes para tratar de mejorar la convergencia. b).- La tasa de convergencia depende bastante de la forma del funcional o lo que es lo mismo, de los valores propios. Estas desventajas hacen que el método de Steepest sea considerado como un procedimiento poco poderoso y que sólo sea usado en circunstancias especiales.

El método Newton, presenta también algunos inconvenientes:

a).- El inverso de la matriz Hessiana puede no existir.

b).- El cálculo de las segundas derivadas puede en algunos casos ser muy complicado.

c).- Requiere mayor cantidad de memoria pues es necesario almacenar la Hessiana y su inverso.

d).- Si la Hessiana no es positiva definida un movimiento en la dirección dada por el algoritmo puede resultar en un aumento y no en una disminución de f (x)

Fiacco y Mc Cormick (6) han presentado una modificación al método tradicional que resuelve esta dificultad y que se basa en las características de los valores propios

La modificación hace que el método de Newton sea - aplicable a un mayor número de casos aunque los requisi-- tos de memoria aumentan considerablemente.

Los métodos aquí considerados, no son aplicables - a problemas con restricciones, por lo cual es conveniente mencionar un método desarrollado por Fiacco y Mc Cormick (5) que incluye las restricciones dentro del funcional -- mediante la introducción de una función de castigo, con-- virtiendo el problema en uno de un funcional sin restric- ciones. Las características del método hacen mucho más - general la aplicación de algoritmos como los considerados anteriormente, aunque las restricciones deben cumplir - - ciertas condiciones de signo.

De los resultados de las corridas y pruebas de los algoritmos se puede decir: no se pueden formular reglas precisas sobre el tamaño óptimo del paso pues depende del problema específico que se quiera resolver y del método - que se va a usar para hallar la solución.

El modelo de búsqueda lineal de Davies, Swann y -- Campey, debe preferirse de acuerdo a los resultados obte- nidos, sobre el método combinado aunque se pueden inten-- tar variaciones y nuevos métodos. El método combinado -- fue más que todo una idea personal y sólo se trató de pro bar su posible eficiencia respecto a métodos más conoci-- dos. Su principal desventaja radica en el hecho de inclu ir un proceso que depende demasiado de valores o evalua-- ciones del funcional y que no aprovecha la información -- dada por estos valores, totalmente, como si lo hace el -- método de Davies. No se debe pensar en que los algorit-- mos escogidos son los mejores, pues existe una gran - -

VARIEDAD DE MÉTODOS CON CARACTERÍSTICAS MUY DIFERENTES, -- PARA LOCALIZAR EXTREMOS. SU ESCOGENCIA NO OBEDECIÓ A NINGÚN CRITERIO EN PARTICULAR PERO SÍ SE TRATÓ DE USAR MÉTODOS CONOCIDOS.

EL TRABAJO DEBE CONSIDERARSE MÁS COMO UNA ILUSTRACIÓN Y NO COMO UNA GUÍA, SOBRE ALGUNOS ASPECTOS QUE SON -- IMPORTANTES EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y SÓLO SE INTENTÓ ESTUDIAR UNA DIFICULTAD QUE SE PRESENTA EN ALGUNOS PROCEDIMIENTOS DE BÚSQUEDA.

# APENDICE

## DIAGRAMAS DE FLUJO Y LISTADOS.

LOS PROGRAMAS, REQUIEREN COMO DATO DE ENTRADA, EL VALOR DE N O NÚMERO DE VARIABLES INDEPENDIENTES Y EL PUNTO INICIAL. LOS SUB-PROGRAMAS DE BÚSQUEDA LINEAL SON: - DSC: MÉTODO DE DAVIES, SWANN Y CAMPEY.

BARON: MÉTODO COMBINADO.

SU FORMA DE LLAMADA ES:

CALL XXX(PASO, X, S, N. HLAN, KTEST)

DONDE:

PASO: TAMAÑO DEL PASO USADO EN EL MÉTODO.
X : PUNTO A PARTIR DEL CUAL SE HACE LA BÚSQUEDA.
S : VECTOR DIRECCIÓN.
HLAN: AL TERMINAR, CONTIENE EL VALOR ÓPTIMO DE $\lambda$
KTEST: CONTADOR DE EVALUACIONES DEL FUNCIONAL.
N : NÚMERO DE VARIABLES INDEPENDIENTES.

LOS PROGRAMAS REQUIEREN, ADEMÁS DE LOS SUB-PROGRAMAS ANTES MENCIONADOS, LOS SIGUIENTES:

STEEPEST: REQUIERE TEST Y GRADI
NEWTON: REQUIERE TEST, HESS Y GRADI
DAVIES: REQUIERE TEST.
POWELL: REQUIERE TEST.

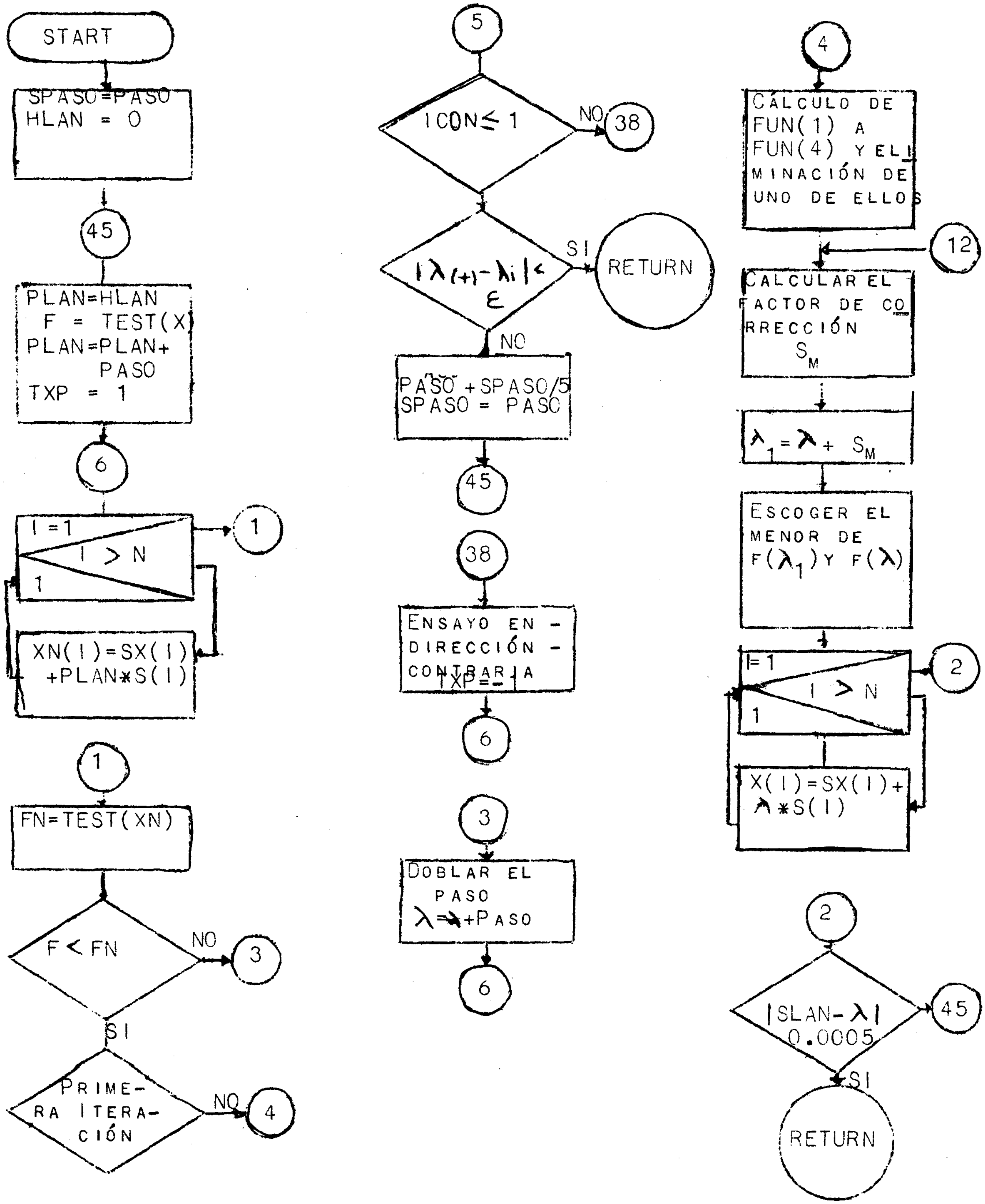
DONDE:

TEST: SUB-PROGRAMA DEL TIPO FUNCTION QUE INCLUYE EL FUNCIONAL A OPTIMIZAR; ES LA FORMA FUNCTION TEST (X).

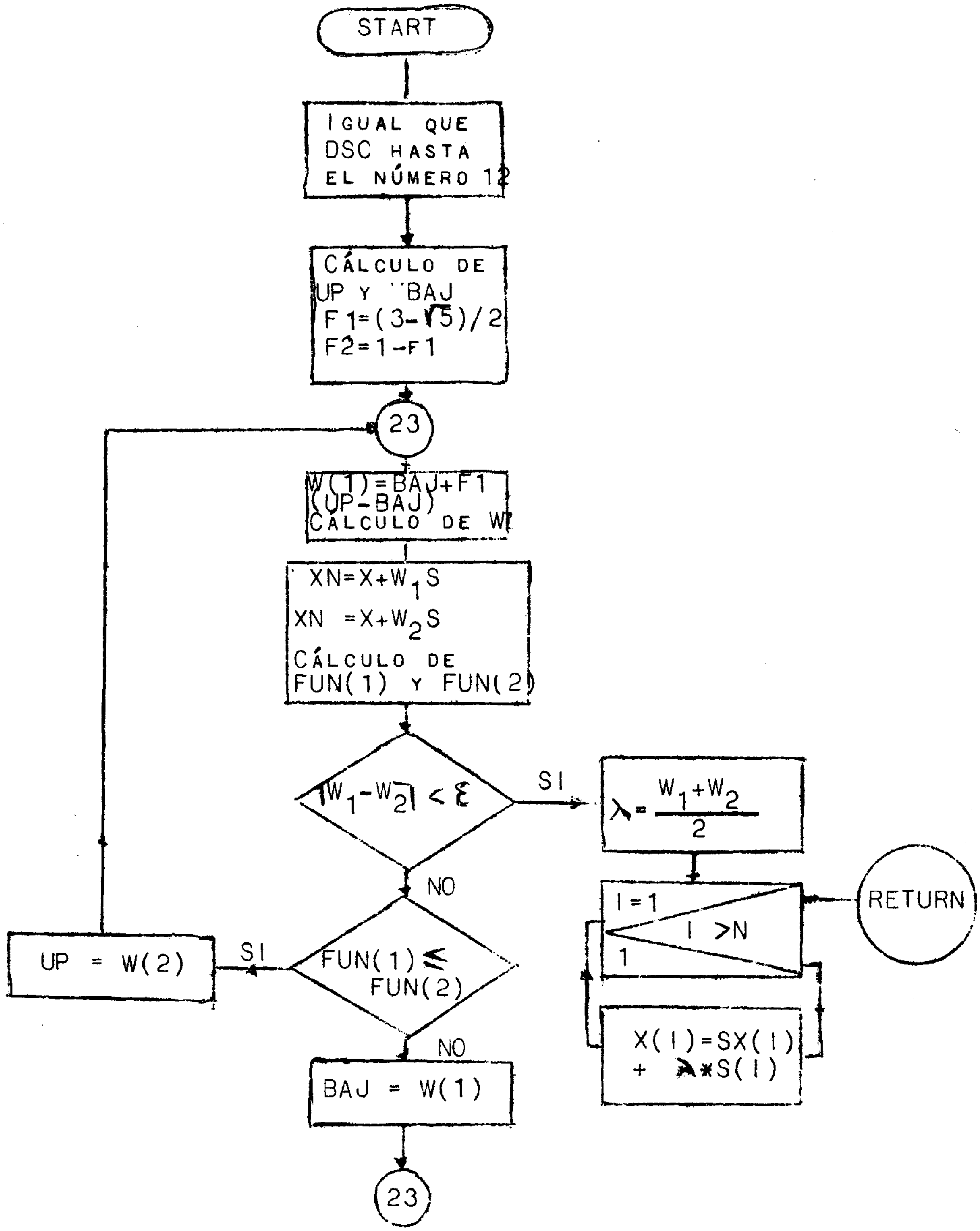
GRADI : SUBRUTINA QUE DEVUELVE EL VALOR DEL - GRADIENTE EN UN PUNTO X. SU FORMA DE -- LLAMADA ES CALL GRADI (GRAD, X, N.)

HESS: ESTA SUBRUTINA DEVUELVE LA MATRIZ HESSI<u>A</u> NA DEL FUNCIONAL. SE LLAMA EN LA FORMA - CALL HESS (F, X, N) DONDE F ES LA HESSI<u>A</u> NA Y X EL PUNTO CONSIDERADO.

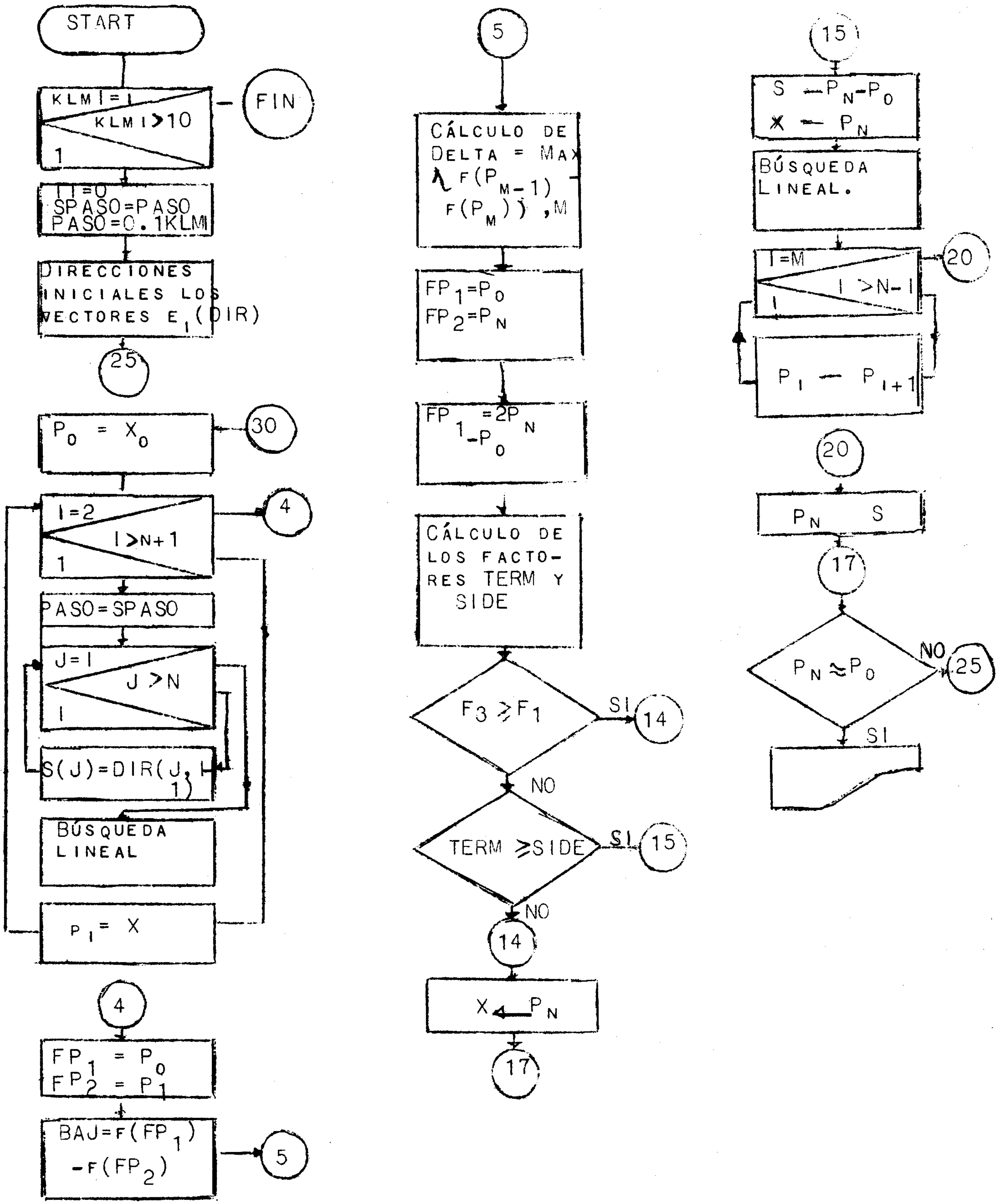
SUBRUTINA DSC



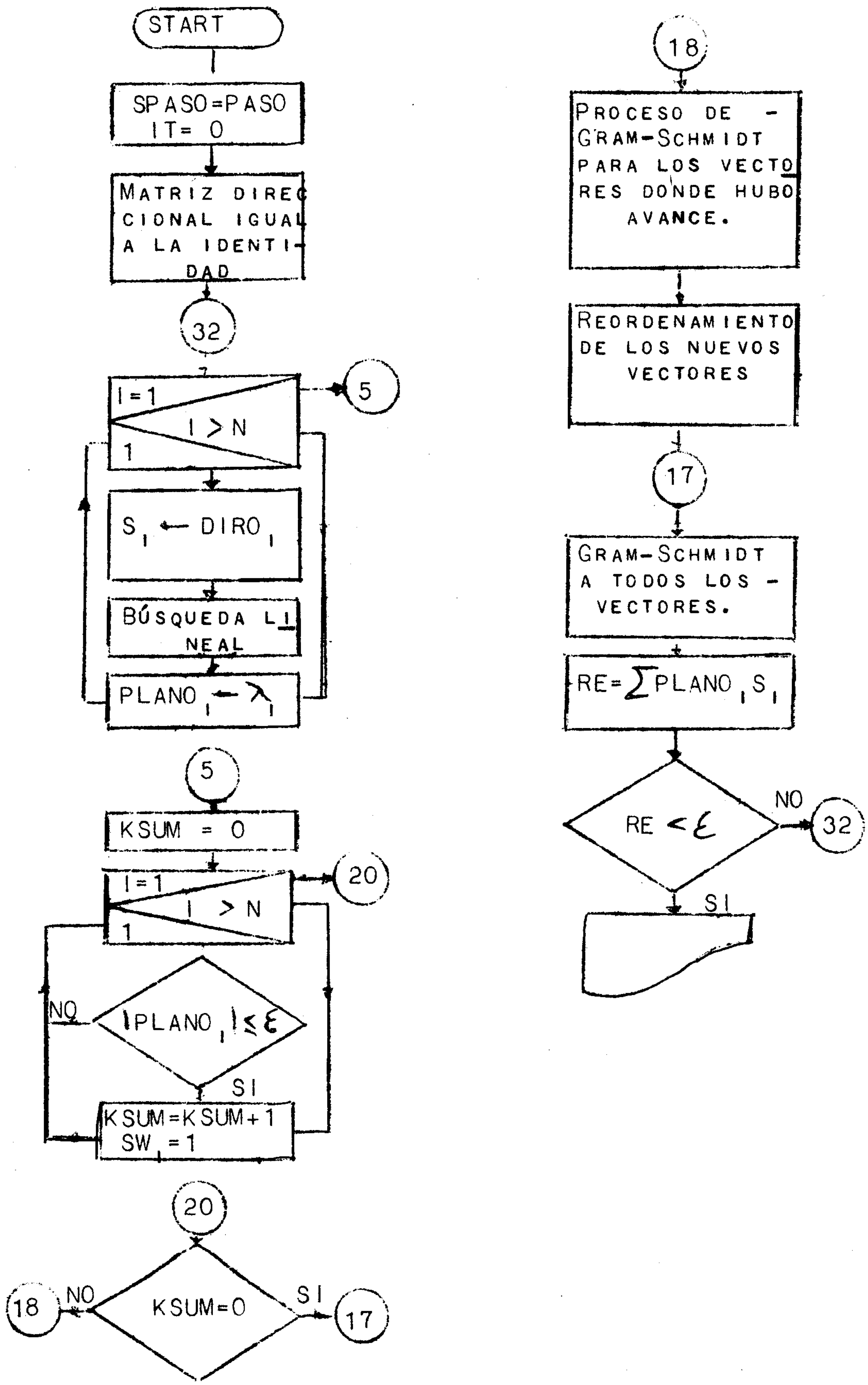
SUBRUTINA BARON



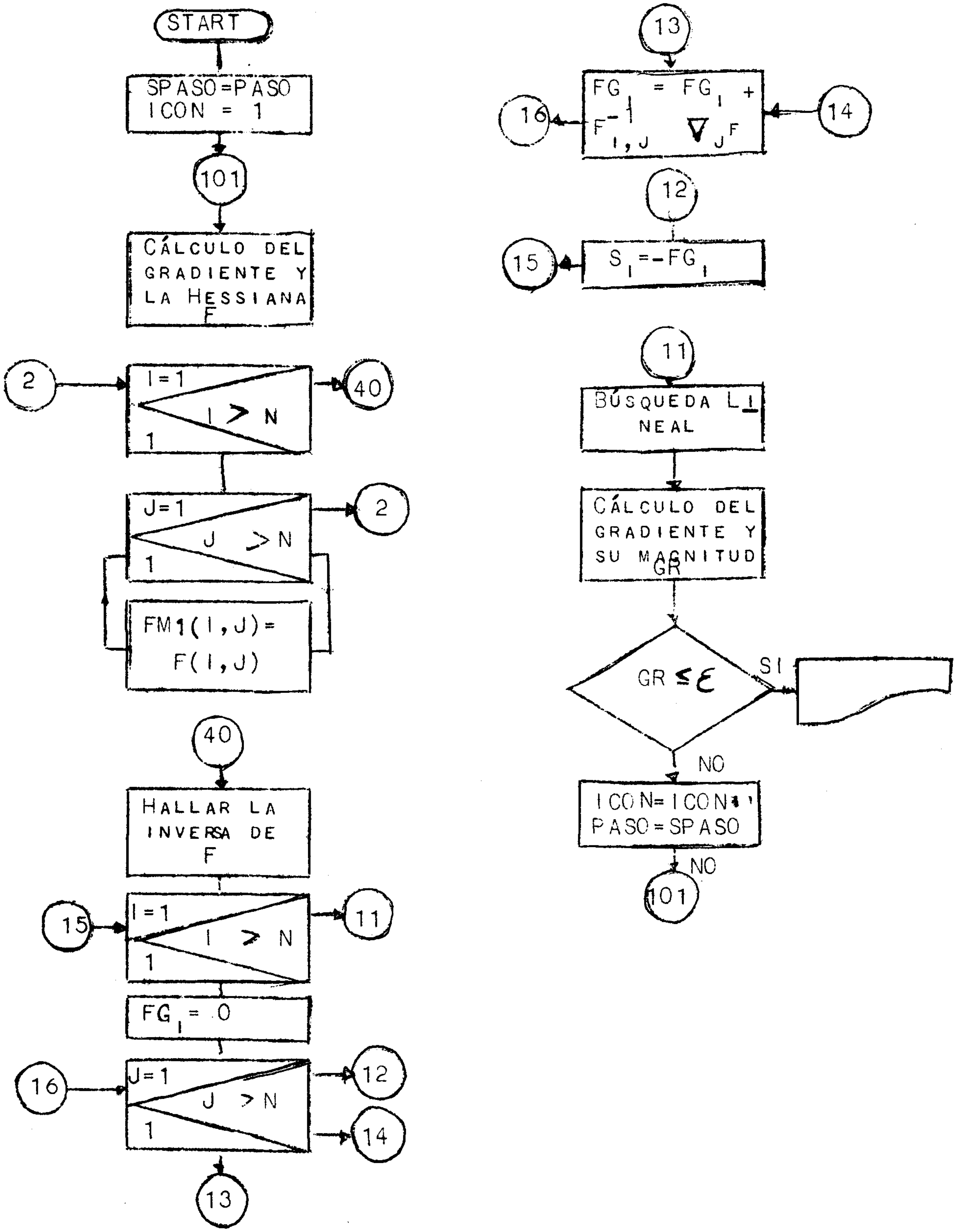
METODO DE POWELL



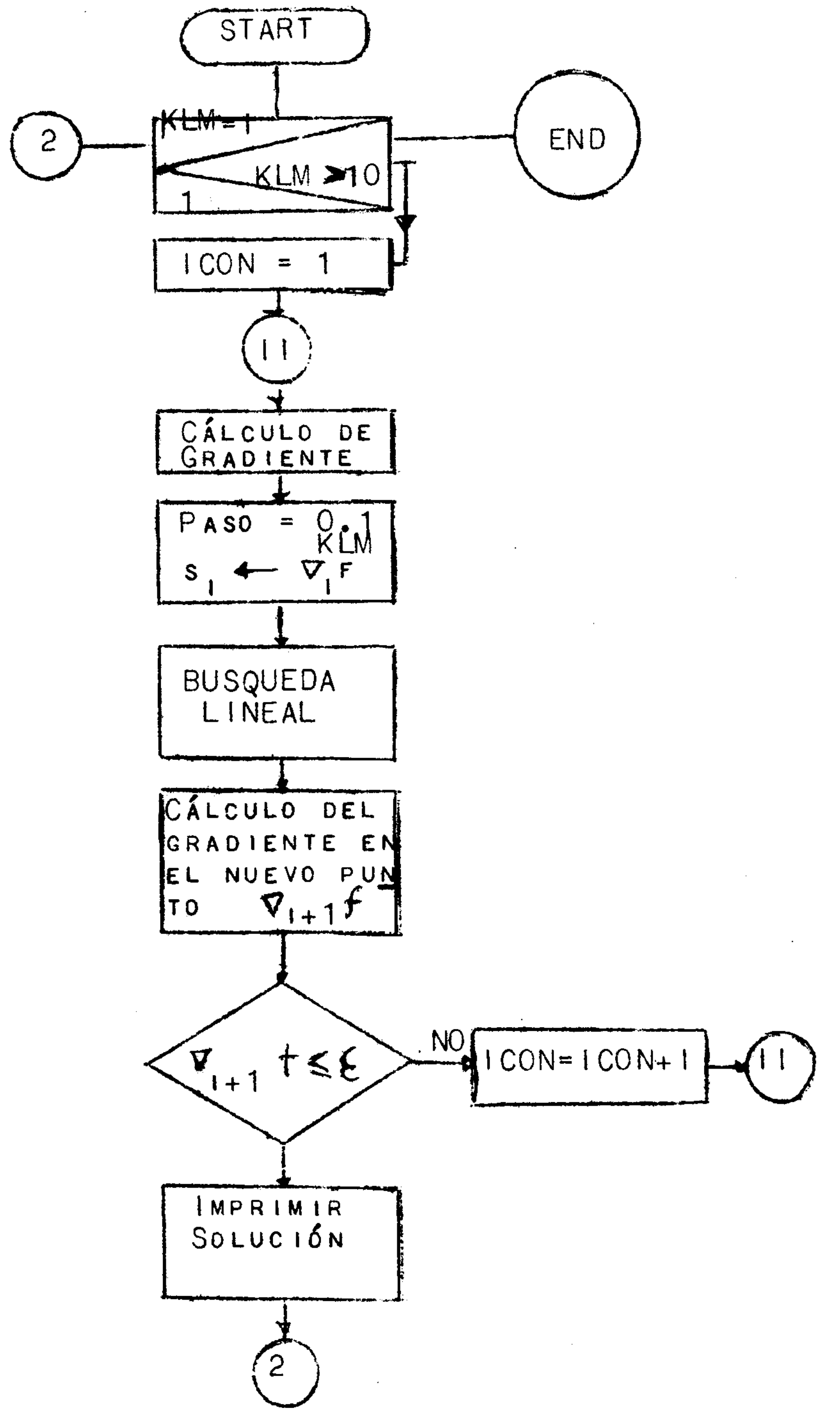
METODO DE DAVIES, SWANN Y CAMPEY



## METODO DE NEWTON



METODO DE STEEPEST



# B I B L I O G R A F I A


1.- BOX, M. J., DAVIES, D., W. SWANN. NON-LINEAR OPTIMIZATION TECHNIQUES, MONOGRAFÍA NO. 5. IMPERIAL - - CHEMICAL INDUSTRIES LTD. 1969.

2.- BIRKHOFF, G., MACLANE S, LINEAR ALGEBRA. BLAISDELL - - PUBLISHING CO. (1966)

3.- BROYDEN, A. H. QUASI-NEWTONIAN METHODS. JSIAM, 21 (1971) P. 368

4.- DORN, W. S. NON-LINEAR PROGRAMMING. A SURVEY. MANAGEMENT SCIENCE. VOL. 9 (1963), 171-208

5.- FIACCO, A., MC CORMICK, G., COMPUTATIONAL ALGORITHM - - FOR THE SEQUENTIAL UNCONSTRAINED MINIMIZATION -- TECHNIQUE. MANAGEMENT SCIENCE. VOL. 10, NO. 4

6.- FIACCO, A. MC CORMICK, G. NON-LINEAR PROGRAMMING. JOHN WILEY AND SONS INC. 1968.

7.- KEEFER, DONALD. GOTTFRIED, BYRON. DIFFERENTIAL CONS-- TRAINT SCALING IN PENALTY FUNCTION OPTIMIZATION AIEE. TRANSACTIONS. VOL. 2, NO. 4 (1970)

8.- POWELL, M. J. D. AN EFFICIENT METHOD FOR FINDING THE - MINIMUM OF A FUNCTION OF SEVERAL VARIABLES WITHOUT CALCULATING DERIVATIVES, THE COMPUTER JOURNAL, 7, 155-162.

9.- POWELL, M. J. D. A SURVEY OF NUMERICAL METHODS FOR UNCONSTRAINED OPTIMIZATION. SIAM REVIEW, 12, 79 - 97.

10.- ROSEMBROCK, H. H. AN AUTOMATIC METHOD FOR FINDING THE - GREATEST OR LEAST VALUE OF A FUNCTION. THE COMPUTER JOURNAL, 3, 175-184.

11.- SHAH, BEUHLER, SOME ALGORITHMS FOR MINIMIZING A FUNCTION OF SEVERAL VARIABLES. JSIAM, 12, P. 74.

12.- SPENDLEY W., HEXT, G. R. HIMOWORTH F. R. SEQUENTIAL - APLICATION OF SIMPLEX DESIGNS IN OPTIMIZATION,- TECHNOMETRICS, 4, 441-461.

13.- WILDE, D. J. BEIGHTLER, A. FOUNDATIONS OF OPTIMIZATION, PRENTICE, HALL, 1967.

14.- WILDE, D. J. OPTIMUM SEEKING METHODS. PRENTICE HALL, - 1964.

15.- ZANGWILL W. NON LINEAR PROGRAMMING, PRENTICE-HALL -- (1969).

- - - - - - - - - - -

```
$JOB,0135JFKI,OTALORA,300,5000
$SCHED,CORE=40,SCR=10
$FTN(L,X)
      PROGRAM STEEPEST
      DIMENSION X(20),XN(20),GRAD(20),S(20),T(20)
C
C  ******************** METODO DE STEEPEST  **********************
C
      READ 1100,N
 1100 FORMAT(I1)
      READ 1101,(X(I),I=1,N)
C
C---------- LECTURA DE N Y DEL PUNTO INICIAL
C
 1101 FORMAT(8F10.0)
      PRINT 1105,(X(I),I=1,N)
 1105 FORMAT(8(F10.5,3X))
      DO 21 I=1,N
   21 T(I)=X(I)
      DO  1500 KLM=1,10
      NTEST=0
      DO 22 I=1,N
   22 X(I)=T(I)
      ICON=1
   11 CALL GRADI(GRAD,X,N)
      PASO=0.1*KLM
C
C        EL VECTOR DIRECCION --- S --- ES EL GRADIENTE
C
      DO 20 I=1,N
   20 S(I)=-GRAD(I)
C
C----------  BUSQUEDA LINEAL
C
      CALL BARON(PASO,X,S,N,HLAN,KTEST)
      NTEST=NTEST+KTEST
      DO 30 I=1,N
   30 XN(I)=X(I)
      SUM=0
      EPS=0.00001
      DO 31 I=1,N
   31 SUM=SUM+XN(I)**2
      CALL GRADI(GRAD,XN,N)
      DO 40 I=1,N
C
C----------  CRITERIO DE OPTIMALIDAD
C
      IF(ABS(GRAD(I))-EPS)40,40,50
   40 CONTINUE
      GO TO 70
   50 DO 60 I=1,N
   60 X(I)=XN(I)
      ICON=ICON+1
      GO TO 11
   70 PRINT 1110
      PRINT 1105,(XN(I),I=1,N)
      PRINT 711,ICON
 1110 FORMAT(1H1,///,53X,15HSOLUCION OPTIMA,//)
  711 FORMAT(10X,18HNO. DE ITERACIONES,3X,I6)
      PRINT 932,NTEST
  932 FORMAT(10X,42HNO. DE EVALUACIONES DE LA FUNCION OBJETIVO,I8)
 1500 CONTINUE
      END
```

```
      SUBROUTINE GRADI(GRAD,X,N)
      DIMENSION GRAD(20),X(20)
C
C----------  CALCULO DEL GRADIENTE
C
      DO 1 I=2,N
    1 GRAD(I)=-2.*X(I)
      GRAD(1)=-4.*X(1)
      RETURN
      END
      FUNCTION TEST(X)
      DIMENSION X(20)
C
C----------  FUNCIONAL OBJETIVO
C
      TEST=(-2.*X(1)**2)-(X(2)**2)-(X(3)**2)
      TEST=-TEST
      RETURN
      END
      SUBROUTINE BARON(PASO,X,S,N,HLAN,KTEST)
      DIMENSION FUN(4),X(20),SX(20),XN(20),FR(4),S(20),W(2)
C
C----------X  PUNTO DE ENTRADA
C    -------X S VECTOR DIRECCION
C    ------ HLAN  VALOR DE LAMBDA
C    ------  PASO  TAMANO DEL PASO
      DO 55 I=1,N
   55 SX(I)=X(I)
      SPASO=PASO
      HLAN=0
      KRED=0
      KTEST=1
   45 PLAN=HLAN
      SLAN=HLAN
      F=TEST(X)
   70 ICON=0
      IT=1
      TXP=1
      PLAN=PLAN+PASO
    6 DO 1 I=1,N
    1 XN(I)=SX(I)+PLAN*S(I)
      FN=TEST(XN)
      KTEST=KTEST+1
      IF(F-FN)2,3,3
    2 ICON=ICON+1
      IF(IT-1)4,5,4
    5 IF(ICON-1)38,38,101
  101 UP=PLAN+2.*PASO
      BAJ=PLAN
      GO TO 102
   38 PLAN=HLAN
C
C----------SE INVIERTE LA DIRECCION DE BUSQUEDA
C
      TXP=-1
      PLAN=PLAN+TXP*PASO
      GO TO 6
    3 PASO=2*PASO
      PLAN=PLAN+TXP*PASO
      F=FN
      IT=IT+1
      GO TO 6
    4 FUN(4)=FN
```

```
C
C---------- SE DETERMINA EL INTERVALO DONDE ESTA EL OPTIMO
C
      FUN(2)=F
      SPL=PLAN-TXP*PASO
      DO 10 I=1,2
      IF(PLAN)93,93,94
   93 KK=I+1
      GO TO 95
   94 KK=I
   95 FACT=SPL+(-1)**KK*(PASO/2)
      DO 7 K3=1,N
    7 XN(K3)=SX(K3)+FACT*S(K3)
   10 FUN(2*I-1)=TEST(XN)
C
C----------- SE CALCULAN LOS CUATRO VALORES DEL FUNCIONAL Y SE  ELIMINA
C----------- UNO DE ELLOS
C
      KTEST=KTEST+2
      PASO=PASO/2
      IF(FUN(2)-FUN(3))12,12,13
   12 KL1=4
      PLAN =PLAN-2*TXP*PASO
      GO TO 21
   13 PLAN=PLAN-TXP*PASO
C
C--------------- UP  Y  BAJ SON LOS LIMITES DEL INTERVALO
C----------  F1 Y F2 SON LOS FACTORES DE PESO PARA LA LOCALIZACION
C----------  DE PUNTOS DE PRUEBA
C
   21 UP=PLAN+TXP*PASO
      BAJ=PLAN-TXP*PASO
  102 F1=(3.-5**0.5)/2.
      F2=1-F1
   23 W(1)=BAJ+(UP-BAJ)*F1
      W(2)=BAJ+(UP-BAJ)*F2
      KRED=KRED+1
      DINT=ABS(UP-BAJ)
      IF(KRED-1)903,904,903
  904 DINTIN=DINT
  903 DO 20 I=1,2
      DO 22 J=1,N
   22 XN(J)=X(J)+W(I)*S(J)
   20 FUN(I)=TEST(XN)
      KTEST=KTEST+2
C
C----------  CRITERIO DE CONVERGENCIA
C
      IF(ABS(W(1)-W(2))-0.0005)24,24,25
   25 IF(FUN(1)-FUN(2))26,26,27
C
C----------  CAMBIO EN LOS LIMITES DEL INTERVALO
C
   26 UP=W(2)
      GO TO 23
   27 BAJ=W(1)
      GO TO 23
   24 HLAN=(W(1)+W(2))/2
      IF(ABS(HLAN)-0.001)967,967,966
  967 HLAN=0.
  966 DO 100 I=1,N
  100 X(I)=SX(I)+HLAN*S(I)
   66 RETURN
```

```
$JOB,0135JFKI,OTALORA,300,5000
$SCHED,CORE=40,SCR=10
$FTN(L,X)
      PROGRAM IRENE
      DIMENSION  P(10,11),DIR(10,10),X(10),XP(10),XT(10),XN(10),S(10),
     1FP1(10),FP2(10),HJK(1),TX(20)
      READ 40,N,(X(I),I=1,N)
   40 FORMAT(I2,7F10.0)
C
3---------- LECTURA DE N Y DEL PUNTO INICIAL
C
      DO 2223 KJ9=1,N
 2223 TX(KJ9)=X(KJ9)
      DO 2222 KLMI=1,10
      PASO=0.1*KLMI
      IT=0
      NTEST=0
      DO 2224 KJ9=1,N
 2224 X(KJ9)=TX(KJ9)
      SPASO=PASO
C
C  ............       METODO DE POWELL
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
      IF(I-J)2,3,2
    3 DIR(I,J)=1
      GO TO 1
    2 DIR(I,J)=0
    1 CONTINUE
C
C----------     LOS EJES INICIALES SON LOS ORIGINALES
C -------    LA MATRIZ P CONTIENE LOS  N+1 VECTORES P DEL ALGORITMO
C
   25 DO 7 I=1,N
      P(I,1)=X(I)
    7 XP(I)=X(I)
      IT=IT+1
      N1=N+1
      DO 4 I=2,N1
      PASO=SPASO
      DO 5 J=1,N
    5 S(J)=DIR(J,I-1)
C
C---------- BUXQUEDA LINEAL A LO LARGO DE  CADA DIRECCION DE LA MATRIZ DIR
C
      CALL DSC(PASO,X,S,N,HLAN,KTEST)
      NTEST=NTEST+KTEST
      DO 6 J=1,N
      XN(J)=X(J)
    6 P(J,I)=X(J)
    4 CONTINUE
C
C---------    SE CALCULARON  LOS NUEVOS VECTORES P
      DO 27 I=1,N
      FP1(I)=P(I,1)
   27 FP2(I)=P(I,2)
      M=2
      BAJ=TEST(FP1)-TEST(FP2)
      DO 8 I=2,N
      DO 9 J=1,N
      FP1(J)=P(J,I)
    9 FP2(J)=P(J,I+1)
      DELTA=TEST(FP1)-TEST(FP2)
```

```
C----------CALCULO DE M,DELTA=MAX(F(P(M-1))-F(P(M)))
C
      IF(DELTA-BAJ)8,10,10
   10 BAJ=DELTA
      M=I+1
    8 CONTINUE
C
C--------  CALCULO DE  F(1),F(2),F(3)
C
      DO 11 I=1,N
      FP1(I)=P(I,1)
   11 FP2(I)=P(I,N1)
      F1=TEST(FP1)
      F2=TEST(FP2)
      DO 12 I=1,N
   12 FP1(I)=2.*FP2(I)-FP1(I)
      F3=TEST(FP1)
      TERM=(F1-2*F2+F3)*(F1-F2-BAJ)**2
      SIDE=0.5*BAJ*(F1-F3)**2
      IF(F3-F1)13,14,14
C
C-----------  PRUEBA DE CONDICIONES DE CAMBIO DE BASE
C
   13 IF(TERM-SIDE)15,14,14
   14 DO 16 I=1,N
   16 X(I)=P(I,N1)
      GO TO 17
   15 DO 18 I=1,N
      S(I)=P(I,N1)-P(I,1)
   18 FP1(I)=P(I,N1)
C
C----------  SE GENERA UN NUEVO VECTOR DIRECCION
C
      PASO=SPASO
      CALL DSC(PASO,FP1,S,N,HLAN,KTEST)
      M=M-1
      IF(M-N)32,33,32
   32 DO 38 I=1,N
   38 DIR(I,N1)=0
C
C--------- SE CAMBIA UNO DE LOS VECTORES DE LA BASE
C
      DO 20 I=M,N
      DO 20 J=1,N
   20 DIR(J,I)=DIR(J,I+1)
   33 DO 28 I=1,N
      X(I)=FP1(I)
   28 DIR(I,N)=S(I)
   17 DO 21 I=1,N
C
C----------- CRITERIO DE OPTIMALIDAD
C
      IF(ABS(P(I,N1)-P(I,1))-0.0001)21,21,25
   21 CONTINUE
      PRINT 99
   99 FORMAT(20X,16H SOLUCION OPTIMA)
      PRINT 42,(X(I),I=1,N)
   42 FORMAT(4X,8(F10.5,2X))
      PRINT 933,IT
  933 FORMAT(10X,18HNO. DE ITERACIONES,I8)
      PRINT 932,NTEST
  932 FORMAT(10X,42HNO. DE EVALUACIONES DE LA FUNCION OBJETIVO,I8)
 2222 CONTINUE
```

```
      END
      SUBROUTINE OSC(PASO,X,S,N,HLAN,KTEST)
      DIMENSION FUN(4),X(20),SX(20),XN(20),FR(4),S(20)
      PRINT 222,PASO
  222 FORMAT(//////,10X,15HTAMANO DEL PASO,F10.5,////)
C
C------- X... PUNTO  DE ENTRADA
C-------S ... VECTOR DIRECCION
C------- HLAN ....... VALOR DE LAMBDA
C--------PASO ..... TAMANO DEL PASO
      DO 55 I=1,N
   55 SX(I)=X(I)
      SPASO=PASO
      KRED=0
      HLAN=0
      KTEST=1
   45 PLAN=HLAN
      SLAN=HLAN
      F=TEST(X)
   70 ICON=0
      IT=1
      TXP=1
      PLAN=PLAN+PASO
    6 DO 1 I=1,N
    1 XN(I)=SX(I)+PLAN*S(I)
      FN=TEST(XN)
      KTEST=KTEST+1
      IF(F-FN)2,3,3
    2 ICON=ICON+1
      IF(IT-1)4,5,4
    5 IF(ICON-1)38,38,98
   98 IF(ABS(PLAN-HLAN)-0.001)66,66,91
   91 PASO=SPASO/5
      SPASO=PASO
      GO TO 45
   38 PLAN=HLAN
C
C----------  SE HACE LA BUSQUEDA EN DIRECCION CONTRARIA A LA INICIAL
C----------  , O-DEN IZQUIERDO.
C
      TXP=-1
      PLAN=PLAN+TXP*PASO
      GO TO 6
    3 PASO=2*PASO
      PLAN=PLAN+TXP*PASO
      F=FN
      IT=IT+1
      GO TO 6
    4 FUN(4)=FN
C
C----------  SE LOCALIZO EL INTERVALO DONDE ESTA EL OPTIMO
C
      FUN(2)=F
      UP=PLAN
      KRED=KRED+1
      SPL=PLAN-TXP*PASO
      DO 10 I=1,2
      IF(PLAN)93,93,94
   93 KK=I+1
      GO TO 95
   94 KK=I
   95 FACT=SPL+(-1)**KK*(PASO/2)
C
C
```

```
C---------- SE CALCULAN LOS CUATRO VALORES DE F ...... EL ORDEN DE
C---------- ENTRADA PUEDE SER IZQUIERDO O DERECHOK
C
      IF(I-1)900,901,900
  901 BAJ=FACT
  900 DO 7 K3=1,N
    7 XN(K3)=SX(K3)+FACT*S(K3)
   10 FUN(2*I-1)=TEST(XN)
      KTEST=KTEST+2
      PASO=PASO/2
      DINT=ABS(UP-BAJ)
      IF(KRED-1)903,904,903
  904 DINTIN=DINT
  903 PRINT 902,DINT
  902 FORMAT(/,10X,22HLONGITUD DEL INTERVALO,F10.3,/)
      IF(FUN(2)-FUN(3))12,12,13
   12 KL1=4
      GO TO 21
   13 KL1=1
C
C---------SE ELIMINA EL PUNTO EXTREMO MAS ALEJADO DEL  MENOR DE ACUERDO AL
C-------VALOR DE KL1
C
      DO 20 I=1,3
   20 FUN(I)=FUN(I+1)
   21 IF(TXP-1)22,23,22
C
C------- EXP=1 INDICA  ORDEN IZQ-DER. EXP=-1 INDICA LO CONTRARIO. C1ANDO
C---------ESTO OCURRE RENOMBAR LOS INDICES DE LAO -- FUN---
C
   22 IF(KL1-4)24,25,24
   25 FR(1)=FUN(3)
      FR(2)=FUN(2)
      FR(3)=FUN(1)
      PLAN=PLAN+2*PASO
      GO TO 26
   24 FR(1)=FUN(4)
      FR(2)=FUN(3)
      FR(3)=FUN(2)
      PLAN=PLAN+PASO
   26 DO 27 I=1,3
   27 FUN(I)=FR(I)
      GO TO 30
   23 IF(KL1-4)28,29,28
   29 PLAN=PLAN-2*PASO
      GO TO 30
   28 PLAN=PLAN-PASO
C
C---------- CALCULO DEL FACTOR DE CORRECCIONP
C
   30 SM=PASO*(FUN(1)-FUN(3))/(FUN(1)-2*FUN(2)+FUN(3))
   76 SM=SM/2
      HLAN=PLAN+SM
  101 DO 40 I=1,N
   40 XN(I)=SX(I)+PLAN*S(I)
      F1=TEST(XN)
      DO 41 I=1,N
   41 XN(I)=SX(I)+HLAN*S(I)
      F2=TEST(XN)
      KTEST=KTEST+2
      IF(F1-F2)42,42,43
   42 DO 48 I=1,N
   48 X(I)=SX(I)+PLAN*S(I)
```

```
      HLAN=PLAN
      GO TO 44
   43 DO 75 I=1,N
   75 X(I)=SX(I)+HLAN*S(I)
   44 PASO=SPASO/5
      PRINT 96, HLAN
   96 FORMAT(///,20X,4HHLAN,4X,F10.5)
      SPASO=PASO
C
C----------  CRITERIO DE OPTIMALIDAD
C
      IF(ABS(SLAN-HLAN)-0.0005)103,103,45
  103 HLAN=(SLAN+HLAN)/2.
   66 PRINT 96,HLAN
      FACTRE=DINTIN/DINT
      PRINT 905,FACTRE,KRED
  905 FORMAT(//,10X,33HFACTOR DE REDUCCION DEL INTERVALO,E16.7,/,10X,21H
     1NUMERO DE REDUCCIONES,I8)
      END
      FUNCTION TEST(X)
      DIMENSION X(10)
C
C-----------  FUNCIONAL OBJETIVO
C
      TEST=-X(1)**2-X(2)**2
      TEST=-TEST
      RETURN
      END
         FINIS
$X,LGO
 2 -1.2      1.
```

```
$JOB,0135JFKI,OTALORA,300,5000
$SCHED,CORE=40,SCR=10
$*DEF(O,W,10,TEC,COSY,15,****)
$COSY
MINV      DECK/      I=10,L,H
          ENDCOSY/
$FTN(I=SHO,L,X)
$FTN(L,X)
      PROGRAM NEWREVIS
C
C     GERMAN BARON MACIAS * 35395
C     MAESTRIA EN INGENIERIA INDUSTRIAL
      REAL L(15,15),LT(15,15)
      REAL LTM1(4,4)
      DIMENSION TX(20)
      DIMENSION T(20),D(15,15),A(20),S(20),PIVOT(20),FG(20),F1(15,15),XN
     1(20),X(20),GRAD(20),F(15,15),W1(20)
      DIMENSION FM1(4,4)
C
C ---------------      METODO DE NEWTON DE SEGUNDO ORDEN,REVISADO --------
C
      READ 1140,N
 1140 FORMAT(I2)
      READ 1141,(X(I),I=1,N)
C
C---------- LECTURA DE N Y DEL PUNTO INICIAL
C
      DO 2223 KJ9=1,N
 2223 TX(KJ9)=X(KJ9)
 1141 FORMAT(8F10.0)
      DO 2222 KLMI=1,10
      NTEST=0
      PASO=0.1*KLMI
      SPASO=PASO
      DO 2224 KJ9=1,N
 2224 X(KJ9)=TX(KJ9)
      ICON=1
  101 CALL GRADI(GRAD,X)
      CALL HESS(F,X,N)
      IF(ICON-1)50,51,50
   51 DO 42 I=1,N
   42 PRINT 40,(F(I,J),J=1,N)
   40 FORMAT(10X,5F10.5)
   50 IF(N-2)324,325,324
  325 DET=F(1,1)*F(2,2)-F(1,2)*F(2,1)
      FM1(1,1)=F(2,2)/DET
      FM1(2,2)=F(1,1)/DET
      FM1(1,2)=-F(1,2)/DET
      FM1(2,1)=-F(2,1)/DET
      GO TO 200
  324 DO 1001 I=1,N
      DO 1001 J=1,N
 1001 FM1(I,J)=F(I,J)
C
C---------- CALCULO DE LA INVERSA DE LA MATRIZ HESSIANA
      CALL MINV(FM1,N,DET,L23,M8)
  200 DO 11 I=1,N
      FG(I)=0
      DO 12 J=1,N
   12 FG(I)=FG(I)+FM1(I,J)*GRAD(J)
C
C---------- DETERMINACION DEL VECTOR DIRECCION   S
C
```

```
   11 S(I)=-FG(I)
      DO 80 I=1,N
   80 PRINT 40,(FM1(I,J),J=1,N)
C
C------------ BUSQUEDA LINEAL
C
      CALL BARON(PASO,X,S,N,HLAN,KTEST)
      NTEST=NTEST+KTEST
      CALL GRADI(GRAD,X)
      SS=0
      DO 58 I=1,N
   58 SS=SS+GRAD(I)**2
      GR=SS**0.5
C
C---------- CRITERIO DE CONVERGENCIA
C
      IF(GR-0.00001)33,33,320
   33 CONTINUE
      PRINT 1110
 1110 FORMAT(1H1,///,53X,15HSOLUCION OPTIMA,//)
      DO 1148 I=1,N
 1148 PRINT 1146,X(I)
 1146 FORMAT(55X,F12.8)
      GO TO 2228
  320 ICON=ICON+1
      PASO=SPASO
      GO TO 101
 2228 PRINT 932,NTEST
  932 FORMAT(10X,42HNO. DE EVALUACIONES DE LA FUNCION OBJETIVO,I8)
      PRINT 933,ICON
  933 FORMAT(10X,18HNO. DE ITERACIONES,I8)
 2222 CONTINUE
      END
      FUNCTION TEST(X)
      DIMENSION X(20)
      N=2
C
C---------- FUNCIONAL OBJETIVO
C
      TEST=X(1)**4-2*X(2)*X(1)**2+X(2)**2+X(1)**2-2*X(1)+5
      RETURN
      END
      SUBROUTINE HESS(F,X,N)
      DIMENSION F(15,15),X(50)
C
C        CALCULO DE LA MATRIZ HESSIANA
C
      F(1,1)=12.*X(1)**2-4.*X(2)+2
      F(1,2)=-4.*X(1)
      F(2,2)=2.
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
    1 F(J,I)=F(I,J)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE GRADI(GRAD,X)
      DIMENSION X(20),GRAD(20)
C
C---------- CALCULO DEL VECTOR GRADIENTE
C
      GRAD(1)=4.*X(1)**3-4.*X(1)*X(2)+2.*X(1)-2
      GRAD(2)=-2.*X(1)**2+2.*X(2)
      RETURN
```

```
$JOB,0135JFKI,OTALORA,300,5000
$SCHED,CORE=40,SCR=10
$FTN(L,X)
      PROGRAM COLOMBIA
      DIMENSION PLANO(20),SWT(20),SDEL(20),DIRO(10,10),SDIRO(10,10),S(20
     1),X(20),TX(20)
      READ 41,N,(X(I),I=1,N)
C
C---------- LECTURA DE N Y DEL PUNTO INICIAL
C
   41 FORMAT(I2,6F10.0)
      DO 2223 KJ9=1,N
 2223 TX(KJ9)=X(KJ9)
      DO 2222 KLMI=1,10
      NTEST=0
      PASO=0.1*KLMI
      SPASO=PASO
C
C ............   METODO DE DAVIES,SWAN Y CAMPEY MULTIDIMENSIONAL
      IT=0
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
      IF(I-J)3,2,3
    2 DIRO(I,J)=1
      GO TO 1
    3 DIRO(I,J)=0
    1 CONTINUE
      DO 2224 KJ9=1,N
 2224 X(KJ9)=TX(KJ9)
   32 IT=IT+1
   33 DO 5 I=1,N
      DO 6 J=1,N
    6 S(J)=DIRO(J,I)
      PASO=SPASO
      CALL DSC(PASO,X,S,N,HLAN,KTEST)
      NTEST=NTEST+KTEST
C
C----------  EL VECTOR ... PLANO... CONTIENE EL AVANCE EN CADA DIRECCION
C
      PLANO(I)=HLAN
    5 CONTINUE
      DO 19 I=1,N
   19 SWT(I)=0
      KSUM=0
      DO 20 I=1,N
      IF(ABS(PLANO(I))-0.0001)21,21,20
   21 SWT(I)=1
      KSUM=KSUM+1
   20 CONTINUE
      IF(KSUM)18,17,18
   18 K1=0
      DO 22 I=1,N
      IF(SWT(I))22,23,22
C
C----------  K1 ES EL NUMERO DE DIRECCIONES CON AVANCE DIFERENTE DE 0
C
   23 K1=K1+1
      SDEL(K1)=PLANO(I)
      DO 424 J=1,N
  424 SDIRO(J,K1)=DIRO(J,I)
   22 CONTINUE
      IF(K1)51,31,51
   51 CALL GRAMSCH(SDIRO,N,K1,SDEL,RE)
```

```
      KM1=K1+1
      DO 25 I=1,N
      IF(SWT(I))24,25,24
   24 DO 26 J=1,N
   26 SDIRO(J,KM1)=DIRO(J,I)
      SDEL(KM1)=PLANO(I)
      KM1=KM1+1
   25 CONTINUE
      DO 27 I=1,N
      DO 27 J=1,N
   27 DIRO(I,J)=SDIRO(I,J)
      GO TO 28
   17 CALL GRAMSCH(DIRO,N,N,PLANO,RE)
   28 IF(RE-0.001)31,31,32
   31 PRINT 42
   42 FORMAT(10X,10HSOL OPTIMA,//)
      PRINT 141,(X(I),I=1,N)
  141 FORMAT(30X,8F10.5)
      PRINT 933,IT
  933 FORMAT(10X,18HNO. DE ITERACIONES,I8)
      PRINT 932,NTEST
  932 FORMAT(10X,42HNO. DE EVALUACIONES DE LA FUNCION OBJETIVO,I8)
 2222 CONTINUE
      END
      SUBROUTINE GRAMSCH(DIRO,N,M,DEL,RE)
      DIMENSION DIRO(10,10),DEL(10),A(10,10),SIG(10),D(10,10)
C
C----------   ESTA SUBRUTINA REALIZA EL PROCESO DE ORTONORMALIZACION DE
C----------   GRAM-SCHMIDT EN UN CONJUNTO M DE VECTORES QUE ESTAN EN LA
C----------   MATRIZ DIRO. LA NUEVA BASE QUEDA EN LA MATRIZ DIRO.
C----------   RE  ES EL AVANCE TOTAL DE UNA ITWRACION Y SIRVE PARA  DETER
C-----------  MINAR CONVERGENCIA EN EL ALGORITMI DO BUSQUEDA
C
      DO 10 K=1,M
      DO 10 I=1,N
      A(I,K)=0
      DO 10 J=K,M
   10 A(I,K)=A(I,K)+DEL(J)*DIRO(I,J)
      RE=0
      DO 40 I=1,N
   40 RE=RE+ABS(A(I,1))
   24 SUM=0
      DO 11 I=1,N
   11 SUM=SUM+A(I,1)**2
      SUM=SQRT(SUM)
      DO 12 I=1,N
   12 DIRO(I,1)=A(I,1)/SUM
      IF(M-1)90,80,90
   80 RETURN
   90 DO 13 I=2,M
      I1=I-1
      DO 14 J1=1,N
   14 SIG(J1)=0
      DO 15 J=1,I1
      SUM=0
      DO 16 K=1,N
   16 SUM=SUM+A(K,I)*DIRO(K,J)
      DO 17 L=1,N
   17 SIG(L)=SIG(L)+SUM*DIRO(L,J)
   15 CONTINUE
      DO 18 JM=1,N
   18 D(JM,I)=A(JM,I)-SIG(JM)
      SUN1=0
```

```
      DO 19 KI=1,N
   19 SUN1=SUN1+D(KI,I)**2
      SUN1=SUN1**0.5
      DO 20 KJ=1,N
   20 DIRO(KJ,I)=D(KJ,I)/SUN1
   13 CONTINUE
      RETURN
      END
      FUNCTION TEST(X)
      DIMENSION X(20)
C
C----------  FUNCIONAL OBJETIVO
C
      TEST=(-2.*X(1)**2)-(X(2)**2)-(X(3)**2)
      TEST=-TEST
      RETURN
      END
        FINIS
$X,LGO
 3  -2.5    3.          1.5
```