

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY**

CAMPUS MONTERREY

**DIVISION DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERIA**



**TECNOLÓGICO
DE MONTERREY.®**

**UN MODELO DE FILAMENTOS PARA VIGAS-COLUMNAS
DE CONCRETO CON DAÑO ISOTROPICO**

T E S I S

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN INGENIERIA Y ADMINISTRACION
DE LA CONSTRUCCION
(INGENIERIA ESTRUCTURAL)**

POR:

JOSE ROMAN CUELLAR MOLINA

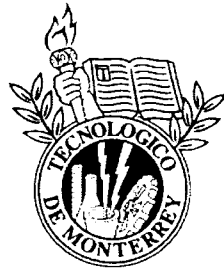
MONTERREY, N. L.

DICIEMBRE DE 2003

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES
DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

DIVISIÓN DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA



**TECNOLOGICO
DE MONTERREY®**

UN MODELO DE FILAMENTOS PARA VIGAS-COLUMNAS DE
CONCRETO CON DAÑO ISOTRÓPICO

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN
DE LA CONSTRUCCIÓN
(INGENIERÍA ESTRUCTURAL)

POR

JOSÉ ROMÁN CUÉLLAR MOLINA

DICIEMBRE 2003

A mi abuelita Ofelia,
por su ejemplo de fortaleza, alegría y amor

A mis padres, Ofelia y Fernando,
por su cariño y apoyo incondicionales

A mi abuelita Esther,
que la recuerdo con mucha nostalgia

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecerle a mi asesor de tesis, el Dr. Sergio Gallegos Cázares por transmitirme muchos de sus conocimientos en el área de los elementos finitos, por haberme tenido paciencia y por haberme sacado de muchas dudas, sin lo cual, este trabajo no hubiera podido ser finalizado a tiempo. A mis respetables sinodales, el Ing. Carlos Nungaray Pérez y el Dr. Alex Elías Zúñiga, les agradezco por su tiempo y disposición para evaluar el presente trabajo.

También quiero agradecerle a mis profesores, el Dr. Yuan, Mr. McRoberts y el Dr. Matthys de la Universidad de Texas en Arlington y a los profesores del Departamento de Ingeniería Civil del I.T.E.S.M. por compartir sus conocimientos y experiencias.

Debo resaltar el gran apoyo que tuve de la compañía Freese and Nichols, Inc., donde tuve la oportunidad de trabajar en proyectos interesantes, como la modelación de una presa con elementos finitos. En especial le doy las gracias a Bow Lin, P.E., Tony Diaz, P.E. y Yury Khayt, P.E. por haberme enseñado muchas cosas de la ingeniería estructural y a Larry Eckersfield, P.E. y Ted Gay, P.E., por compartir sus experiencias en el área de la construcción.

Quiero agradecer también al Ing. Carlos Gutiérrez y al Ing. Oscar González de la empresa Gutiérrez Ingenieros, por darme la oportunidad de trabajar a su lado.

A mis hermanas, Arlen, Carolina y Tania, les doy las gracias por haberme hecho pasar momentos muy amenos; y a mis hermanos, Victor, Gabriel y Pato, por su camaradería. Al resto de mi familia le agradezco su interés y apoyo en el presente trabajo.

A mis amigos y colegas, Jorge Maciel, Luis Raygoza, Edgar Covarrubias y Raymundo Ibáñez, les agradezco su convivencia, que hicieron que este tiempo de estudios fuera menos agotador. Al resto de mis amigos, que aunque no los veo con frecuencia sé que conservamos una buena amistad, les agradezco sus palabras de apoyo.

RESUMEN

Se presenta el desarrollo de un elemento viga de dos nodos no hermitiano, con campos de desplazamiento ligados a las rotaciones. La sección transversal de la viga se discretiza con filamentos, para manejar relaciones en una dimensión sencillas que permitan modelar la resistencia a la flexión y fuerza axial. La discretización del elemento con filamentos permite hacer uso de un modelo de material muy simple, basado en la teoría de daño elástico.

Primero se desarrolla el elemento viga en base a una formulación mixta a partir de las ecuaciones de residuos pesados donde los esfuerzos se aproximan independientemente de los desplazamientos. Las formas de interpolación se proponen lineales para las fuerzas, y se consideran campos de desplazamiento ligados con las rotaciones para ganar precisión en la estimación de esta cantidad.

La sección transversal se discretiza luego empleando el concepto de filamentos, que consiste en considerar que la sección transversal del elemento está formada por un número determinado de filamentos, que solo están relacionados entre sí por la hipótesis de que una sección plana y normal al eje del elemento antes de la deformación, permanece plana después de la deformación. Una de las principales características de los filamentos es que la única deformación que pueden sufrir es axialmente, lo que permite utilizar relaciones en una dimensión sencillas para modelar la resistencia a la flexión y fuerza axial.

La discretización del elemento con filamentos permite hacer uso de un modelo de material muy simple, basado en la teoría de daño elástico, mediante la cual, la degradación en el material se evalúa a través de una variable de daño interna, d , la cual puede tener valores desde 0 cuando no hay daño, hasta 1 cuando el material está completamente degradado. Para el acero de refuerzo se utiliza un modelo de material elasto-plástico.

Se presentan resultados de validación para la viga a nivel sistema, y también una serie de pruebas con vigas de concreto reforzado. Los resultados obtenidos con este modelo se comparan con los obtenidos con otro modelo anterior y con valores experimentales.

ÍNDICE DE MATERIAS

Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Introducción	1
1.2 Revisión de investigaciones anteriores	2
1.3 Objetivos de la tesis	3
1.4 Organización general de la tesis	4
Capítulo 2. Desarrollo de un elemento viga de dos nodos no hermitiano	5
2.1 Relaciones cinemáticas	5
2.2 Relaciones esfuerzo - deformación	7
2.3 Definición de resultantes de fuerza	8
2.4 Ecuaciones de equilibrio	8
2.5 Relaciones fuerza resultante - deformación resultante	9
2.6 Ecuaciones de residuos pesados	10
2.7 Forma débil	11
2.8 Substitución de la forma general de la solución de prueba en la forma variacional	12
2.9 Interpolaciones	19
2.10 Consideraciones adicionales	21
Capítulo 3. Discretización del elemento viga con filamentos	22
3.1 Relación esfuerzo - deformación	22
3.2 Definición de resultantes de fuerza	23
3.3 Relaciones fuerza resultante - deformación resultante	23

3.4 Ecuaciones de residuos pesados	23
3.5 Forma débil	24
Capítulo 4. Modelo del material con daño	26
4.1 Concepto de daño	26
4.2 Esfuerzo efectivo	27
4.3 Potencial de energía libre de Helmholtz	28
4.4 Criterio de daño	29
4.5 Leyes de evolución de las variables internas	31
4.6 Disipación	32
4.7 Evaluación numérica de las variables internas	34
Capítulo 5. Algoritmo de solución	37
5.1 Matriz de rigidez secante	37
5.2 Cálculo de deformaciones	38
5.3 Actualización de las variables de daño	39
5.4 Cálculo de fuerzas internas	40
5.5 Consideraciones adicionales	41
Capítulo 6. Validaciones	42
6.1 Validación de la viga elástica	42
6.1.1 Validación a nivel elemento - Prueba de la parcela	42
6.1.2 Validación a nivel sistema	43
6.1.2.1 Vigas continuas	43
6.1.2.2 Marco plano	44
6.1.2.3 Marco plano con desplazamiento horizontal	45
6.2 Validación de la viga con modelo de material con daño	46

6.2.1	Viga reforzada L-6	46
6.2.2	Viga reforzada J-4	47
6.2.3	Viga reforzada de Rao	48
6.2.4	Viga reforzada de Wight	50
Capítulo 7. Conclusiones y recomendaciones		52
Referencias		54

ÍNDICE DE FIGURAS

2-1	Sistema de referencia y desplazamientos en la viga	5
2-2	Sistema de referencia y desplazamientos centroidales en la viga	6
2-3	Desplazamientos y rotaciones en la viga en los planos XY y XZ	6
2-4	Distorsiones debido a las fuerzas de corte en los planos XY y XZ	7
2-5	Diagramas de cuerpo libre de un elemento diferencial de viga	8
2-6	Centro de corte con respecto a ejes centroidales	13
2-7	Diagrama de cuerpo libre para un elemento con cargas axiales	16
2-8	Eje de referencia respecto a ejes centroidales	18
3-1	Discretización de la viga con filamentos	22
4-1	Esfuerzo de Cauchy y esfuerzo efectivo	26
4-2	Curva esfuerzo - deformación uniaxial para el modelo de daño	30
4-3	Casos de carga/descarga/recarga para el modelo de daño	32
6-1	Parcela de tres vigas	42
6-2	Problema de vigas continuas	43
6-3	Marco plano para la validación a nivel sistema de la viga	44
6-4	Marco plano con desplazamiento horizontal	45
6-5	Geometría y dimensiones de la viga L-6	46
6-6	Modelación con elementos finitos de la viga L-6	46
6-7	Gráfica comparativa de los resultados obtenidos para la viga L-6	47
6-8	Geometría y dimensiones de la viga J-4	47
6-9	Modelación con elementos finitos de la viga J-4	48
6-10	Gráfica comparativa de los resultados obtenidos para la viga J-4	48

6-11	Geometría y dimensiones de la viga de Rao	49
6-12	Modelación con elementos finitos de la viga de Rao	49
6-13	Gráfica comparativa de los resultados obtenidos para la viga de Rao	49
6-14	Geometría y dimensiones de la viga de Wight	50
6-15	Modelación con elementos finitos de la viga de Wight	50
6-16	Gráfica comparativa de los resultados obtenidos para la viga de Wight	51

ÍNDICE DE TABLAS

5-1	Algoritmo para calcular la matriz secante consistente de los elementos	38
5-2	Algoritmo para el cálculo de las deformaciones	39
5-3	Algoritmo para la actualización de las variables internas	40
5-4	Cálculo de las fuerzas internas en el elemento	41

SIMBOLOGÍA

A	Parámetro en la función de daño propuesta
D_0	Matriz de rigidez inicial (no dañada)
d	Parámetro de daño que define el grado de degradación en el material
E	Módulo de elasticidad del material
E'	Módulo de elasticidad secante del material
f_c'	Esfuerzo resistente último a compresión del material
f_t'	Esfuerzo resistente último a tensión del material
G	Función propuesta que defina al parámetro de daño
G_f	Energía de fractura por unidad de área del material
g	Criterio de daño
g_c	Energía de disipación específica a compresión
g_t	Energía de disipación específica a tensión
I_y	Momento de inercia en el eje 'y'
I_z	Momento de inercia en el eje 'z'
J	Constante de torsión de St. Venant
k_y	Factor de forma para el cortante en dirección 'y'
k_z	Factor de forma para el cortante en dirección 'z'
l^*	Longitud característica
M_x	Momento torsor
M_y	Momento flexionante en 'y'
M_z	Momento flexionante en 'z'
N_u	Función de interpolación para el desplazamiento longitudinal
N_v	Función de interpolación para el desplazamiento en dirección de 'y'
N_w	Función de interpolación para el desplazamiento en dirección de 'z'
N_x	Fuerza interna axial
N_ϕ	Función de interpolación para las rotaciones
$N_{v\phi}$	Función de interpolación para los campos de desplazamientos en 'y' ligados a las rotaciones
$N_{w\phi}$	Función de interpolación para los campos de desplazamientos en 'z' ligados a las rotaciones
n	Razón del esfuerzo último a compresión y el esfuerzo último a tensión
P_{N_x}	Función de interpolación para la fuerza axial
P_{Q_y}	Función de interpolación para la fuerza cortante en dirección de 'y'
P_{Q_z}	Función de interpolación para la fuerza cortante en dirección de 'z'
P_{M_x}	Función de interpolación para el momento torsor
P_{M_y}	Función de interpolación para el momento flexionante en 'y'
P_{M_z}	Función de interpolación para el momento flexionante en 'z'

Q_y	Fuerza cortante en 'y'
Q_z	Fuerza cortante en 'z'
q_x	Carga distribuida externa longitudinal
q_y	Carga distribuida externa en dirección 'y'
q_z	Carga distribuida externa en dirección 'z'
r	Umbral de daño para el instante actual
r^*	Valor inicial del umbral de daño
S	Área transversal total
\bar{S}	Área degradada del material
t	Momento torsor distribuido externo
u	Desplazamiento longitudinal total
u_c	Desplazamiento axial del eje centroidal
\bar{u}_c	Valores nodales del desplazamiento axial del eje centroidal
\hat{u}_c	Función de peso para el desplazamiento longitudinal centroidal
u_R	Desplazamiento axial del eje de referencia
v_c	Desplazamiento transversal en dirección 'y' respecto al eje centroidal
\bar{v}_c	Valores nodales del desplazamiento transversal en dirección 'y' respecto al eje centroidal
\hat{v}_c	Función de peso para el desplazamiento transversal en dirección 'y' respecto al eje centroidal
v_R	Desplazamiento transversal en dirección 'y' respecto al eje de referencia
v_s	Desplazamiento transversal en dirección 'y' respecto al centro de corte
\hat{v}_s	Función de peso para el desplazamiento transversal en dirección 'y' centroidal
w_c	Desplazamiento transversal en dirección 'z' respecto al eje centroidal
\bar{w}_c	Valores nodales del desplazamiento transversal en dirección 'z' respecto al eje centroidal
\hat{w}_c	Función de peso para el desplazamiento transversal en dirección 'z' respecto al eje centroidal
w_R	Desplazamiento transversal en dirección 'z' respecto al eje de referencia
w_s	Desplazamiento transversal en dirección 'z' respecto al centro de corte
\hat{w}_s	Función de peso para el desplazamiento transversal en dirección 'z' centroidal
y_{ref}	Coordenada en 'y' de la ubicación del eje de referencia con respecto al eje centroidal
y_s	Coordenada en 'y' de la ubicación del centro de corte con respecto al eje centroidal
z_{ref}	Coordenada en 'z' de la ubicación del eje de referencia con respecto al eje centroidal
z_s	Coordenada en 'z' de la ubicación del centro de corte con respecto al eje centroidal

Letras griegas

$\bar{\alpha}$	Valores nodales de los parámetros indeterminados relacionados a la fuerza axial
$\bar{\beta}$	Valores nodales de los parámetros indeterminados relacionados al momento torsor
$\bar{\delta}$	Valores nodales de los parámetros indeterminados relacionados al momento flexionante en 'z'
ε_x	Deformación axial

ϕ_x	Rotación alrededor del eje 'x' centroidal
$\bar{\phi}_x$	Valores nodales de la rotación alrededor del eje 'x' centroidal
$\hat{\phi}_x$	Función de peso para la rotación alrededor del eje 'x' centroidal
ϕ_y	Rotación alrededor del eje 'y' centroidal
$\bar{\phi}_y$	Valores nodales de la rotación alrededor del eje 'y' centroidal
$\hat{\phi}_y$	Función de peso para la rotación alrededor del eje 'y' centroidal
ϕ_z	Rotación alrededor del eje 'z' centroidal
$\bar{\phi}_z$	Valores nodales de la rotación alrededor del eje 'z' centroidal
$\hat{\phi}_z$	Función de peso para la rotación alrededor del eje 'z' centroidal
$\bar{\gamma}$	Valores nodales de los parámetros indeterminados relacionados al momento flexionante en 'y'
γ_{xy}	Distorsión en el plano 'xy' debido a las fuerzas de corte
γ_{xz}	Distorsión en el plano 'xz' debido a las fuerzas de corte
K_{xy}	Curvatura del elemento en el plano 'xy'
K_{xz}	Curvatura del elemento en el plano 'xz'
μ	Parámetro de consistencia para usar las relaciones de Kuhn-Tucker en el modelo de daño
σ	Esfuerzo de Cauchy
$\bar{\sigma}$	Esfuerzo efectivo
σ_0	Esfuerzo inicial (no dañado)
σ_x	Esfuerzo axial
σ_{xy}	Esfuerzo cortante en el plano 'xy'
σ_{xz}	Esfuerzo cortante en el plano 'xz'
τ	Esfuerzo equivalente o norma para comparar diferentes estados de esfuerzos
ψ	Potencial de energía libre
ψ_0	Energía libre elástica

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

La mayoría de las estructuras que se ven en la actualidad han sido diseñadas con códigos y especificaciones que se han desarrollado tomando como base experimentos en laboratorios y muchas suposiciones. Debido al carácter empírico de estos experimentos, los códigos incluyen en sus fórmulas de diseño factores de seguridad que a veces son demasiado conservadores, para escudarse de aspectos que no son tomados en cuenta. Algunos de estos aspectos, hablando para el concreto reforzado, son el comportamiento no lineal del material, agrietamiento, flujo plástico y contracción.

Además, cuando la estructura se encuentra en las cercanías del colapso, las deformaciones no son pequeñas como se considera en la teoría elástica, y por lo tanto es necesario tomar en cuenta, además de las no linealidades del material, las no linealidades geométricas de la estructura.

El estudio de todos estos aspectos resultaría casi imposible si no se contaran con herramientas como el análisis con elemento finito. Aún así, es necesario desarrollar modelos de elementos y materiales que representen lo más apegado a la realidad el comportamiento que demuestran.

El comportamiento de los miembros y sistemas estructurales de concreto reforzado, específicamente su respuesta a cargas, ha sido investigado desde el comienzo del siglo pasado. Desde esos tiempos se han tenido que hacer muchas aproximaciones para lograr un código de diseño, que aunque a veces resulta ser muy conservador, propone fórmulas simples y prácticas, que pueden ser lo más conveniente para diseños de estructuras ordinarias. Sin embargo, para estructuras complejas, como presas, el uso de un modelo más realista es necesario.

El método del elemento finito ofrece una poderosa herramienta para estudiar el comportamiento del concreto. El agrietamiento, propiedades del material no lineales

multiaxiales , el comportamiento complejo de la interfaz concreto-acero, y otros aspectos anteriormente ignorados, pueden ser racionalmente modelados.

1.2 Revisión de investigaciones anteriores

En 1967, Ngo y Scordelis¹ hicieron la primera publicación sobre la aplicación del elemento finito en vigas de concreto reforzado. En este estudio, las vigas de concreto fueron modeladas con elementos triangulares en dos dimensiones. Elementos de liga especiales fueron usados para conectar el acero y el concreto. Se realizó un análisis lineal elástico en vigas con patrones de grieta predefinidos para determinar los esfuerzos principales en el concreto, esfuerzos en el acero de refuerzo y esfuerzos de anclaje.

Ese mismo año, Nilson² introdujo para el análisis, propiedades no lineales del material y una relación no lineal en la adherencia del anclaje. También utilizó una técnica a base de incrementos de carga para tomar en cuenta estas no linealidades y utilizó elementos cuadriláteros de esfuerzo plano. El agrietamiento fue tomado en cuenta deteniendo la solución cuando un elemento indicara una falla en tensión, entonces se redefinía una nueva topología de la estructura agrietada, y se continuaba este procedimiento hasta terminar el análisis.

En 1970, Franklin³ mejoró la capacidad del método analítico desarrollando un análisis no lineal que tomaba en cuenta automáticamente el agrietamiento en los elementos y una redistribución de esfuerzos del sistema, lo que permitía trazar la respuesta de sistemas en dos dimensiones desde la carga inicial hasta la falla, en un análisis computacional continuo. Franklin utilizó elementos especiales tipo marco, elementos cuadriláteros de esfuerzo plano, elementos barra, ligas de adherencia en dos dimensiones y uniones de estribo, para estudiar marcos de concreto reforzado, con o sin muros de corte.

Suidan y Schnobrich⁴ en 1973 y Sarne⁵ en 1975 estudiaron vigas formadas por elementos sólidos en tres dimensiones.

Chan⁶ desarrolló en 1983 un elemento en filamentos, capaz de modelar flexión biaxial para secciones rectangulares, utilizado principalmente como elemento rigidizador de cascarones. Este elemento incluye geometría no lineal y las propiedades del material para cada filamento se asumen constantes.

En 1988, Gallegos y Schnobrich⁷ desarrollaron un elemento viga formado por un número finito de estratos horizontales que pueden ser de concreto o de acero de refuerzo. Este elemento puede además incluir material con propiedades dependientes o no del tiempo, como lo son el flujo plástico y contracción, no linealidades geométricas, agrietamiento y aplastamiento del concreto así como la fluencia del acero de refuerzo. Este elemento sólo puede modelar la rigidez en un plano.

En 1990, Oliver et al⁸ desarrollaron un modelo de daño isotrópico para simular la falla del concreto bajo diferentes condiciones de deformación y esfuerzos, con un algoritmo bastante sencillo.

Ortega⁹ desarrolló en 1992 un elemento viga a base de filamentos de carácter no lineal, donde la fractura del concreto ocurre cuando se alcanza un valor límite y a partir de ahí la degradación de la rigidez sigue una función arbitraria para la liberación del esfuerzo que no está ajustada por objetividad.

En 1995, Cervera, Oliver y Faria¹⁰ desarrollaron un modelo para estructuras masivas de concreto con daño continuo. El comportamiento mecánico del concreto se modela usando un modelo de daño isotrópico que permite daño tanto en tensión como compresión, y presenta recuperación de la rigidez cuando hay inversión de esfuerzos.

Faria, Oliver y Cervera¹¹ desarrollaron en 1998 un modelo de plasticidad y daño basado en deformaciones, aplicado para estructuras masivas de concreto reforzado, como presas, y con el objetivo de poder realizar análisis sísmicos.

1.3 Objetivos de la tesis

El objetivo de la tesis consiste en desarrollar un elemento simple en su formulación, que su simplicidad no comprometa la precisión del mismo, y que posea un modelo de material con daño que sea capaz de predecir con bastante exactitud la descripción del agrietamiento en vigas de concreto reforzado.

Para lograr esto se pretende desarrollar un elemento viga-columna de dos nodos no hermitiano donde las formas de interpolación se proponen lineales para las fuerzas, y se consideran campos de desplazamiento ligados con las rotaciones. La sección transversal se discretizará empleando el concepto de filamentos⁹, que consiste en considerar que la sección transversal del elemento está formada por un número determinado de filamentos,

que solo están relacionados entre sí por la hipótesis de que una sección plana y normal al eje del elemento antes de la deformación, permanece plana después de la deformación. Una de las principales características de los filamentos es que la única deformación que pueden sufrir es axialmente, lo que permite utilizar relaciones en una dimensión sencillas para modelar la resistencia a la flexión y fuerza axial. El corte y la torsión en el elemento, por otro lado, se considerarán totalmente elásticos, pues no es posible afectar los filamentos por esfuerzos cortantes, que no producen deformaciones axiales, sino más bien cambios de forma. La discretización del elemento con filamentos permite hacer uso de un modelo de material muy simple, basado en la teoría de daño⁸ elástico, mediante la cual, la degradación en el material se evalúa a través de una variable de daño interna, d , la cual puede tener valores desde 0 cuando no hay daño, hasta 1 cuando el material está completamente degradado. Para el acero de refuerzo se utiliza un modelo de material elasto-plástico¹².

1.4 Organización general de la tesis

La tesis se divide en siete capítulos. El primero es introductorio, y en el segundo se comienza con el desarrollo de la viga no hermitiana de dos nodos. En el tercero se hace la discretización de la sección transversal con filamentos. Teniendo listo el elemento viga con filamentos, se procede ahora al desarrollo del modelo de material con daño en el capítulo 4. El capítulo 5 explica el algoritmo a seguir para poder implementar este elemento con su respectivo modelo de material en un programa computacional. Finalmente se hacen las validaciones del elemento viga sin, y con el material de daño en el capítulo 7. Las conclusiones se presentan en el capítulo 8.

CAPÍTULO 2

DESARROLLO DE UN ELEMENTO VIGA DE DOS NODOS NO HERMITIANO

El objetivo de este capítulo es el de desarrollar la formulación de un elemento viga de dos nodos no hermitiano¹³, con seis grados de libertad por cada nodo. La formulación se hace con base en una formulación mixta a partir de las relaciones de residuos pesados, donde los esfuerzos se aproximan independientemente de los desplazamientos. Las formas de interpolación se proponen lineales para las fuerzas, y se consideran campos de desplazamiento ligados con las rotaciones¹⁴, para ganar precisión en la estimación de esta cantidad.

2.1 Relaciones cinemáticas

Para la formulación de este elemento, se tomarán en cuenta tres ejes longitudinales, que corresponden al eje centroidal o eje neutro, centro de cortante y eje de referencia. Este elemento puede representar una excentricidad con respecto al eje de referencia, ya que está pensado para que funcione como un elemento rigidizador de placas y cascarones. En la figura 2-1 se muestran estos tres ejes. Los ejes y_c y z_c son ejes principales.



Figura 2-1 – Sistema de referencia y desplazamientos en la viga

Los sentidos positivos de los desplazamientos centroidales u_c , v_c , w_c , así como de las rotaciones alrededor de los ejes, ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z , se muestran en la figura 2-2.

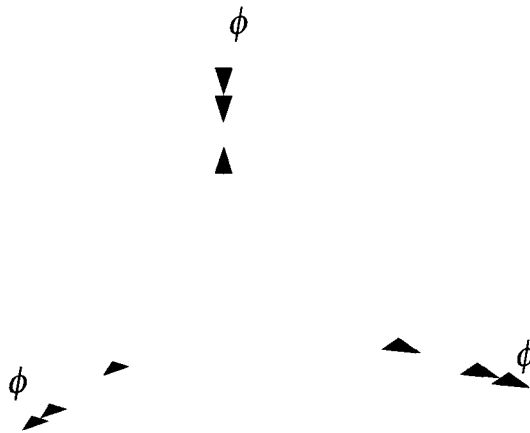


Figura 2-2 – Sistema de referencia y desplazamientos centroidales en la viga

En la figura 2-3 se pueden observar los desplazamientos y rotaciones centroidales en los planos xy y xz .

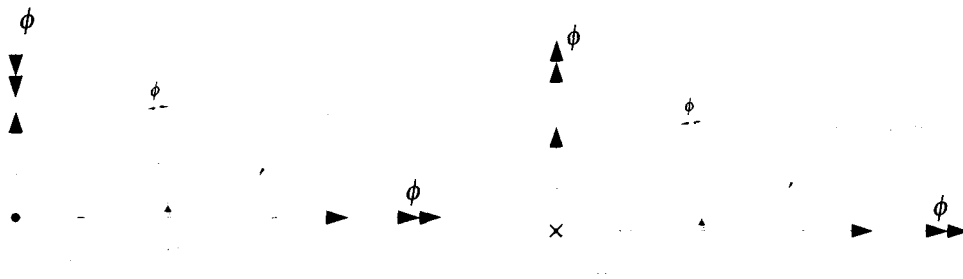


Figura 2-3 – Desplazamientos y rotaciones en la viga en los planos xy y xz

Considerando u como el desplazamiento axial del eje centroidal de la viga y ϕ_y y ϕ_z , como las rotaciones alrededor de los ejes y y z respectivamente, entonces el desplazamiento longitudinal total, u , se puede expresar mediante:

$$u = u_c - y \phi_{zc} - z \phi_{yc} \quad (2-1)$$

Las curvaturas en los planos xy y xz , son respectivamente κ_{xy} y κ_{xz} , que se definen como

$$\kappa_{xy} = \frac{d\phi_{zc}}{dx} \quad \kappa_{xz} = \frac{d\phi_{yc}}{dx} \quad (2-2)$$

La deformación axial ϵ_x , por lo tanto, se define por

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{du_c}{dx} - y_c \frac{d\phi_z}{dx} - z_c \frac{d\phi_y}{dx} \\ &= \frac{du_c}{dx} - y_c \kappa_{xy} - z_c \kappa_{xz}\end{aligned}\quad (2-3)$$

en donde y_c y z_c son las coordenadas normales medidas respecto al eje centroidal de la viga.

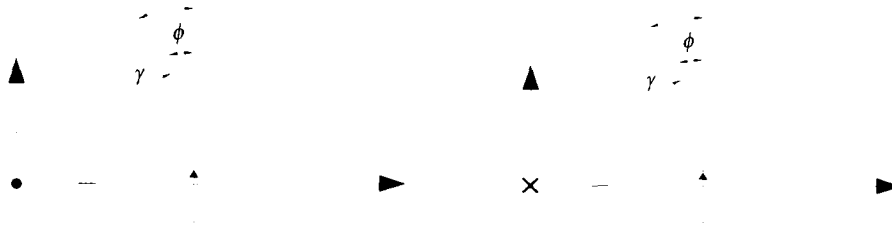


Figura 2-4 – Distorsiones debido a las fuerzas de corte en los planos X_yY_s y X_zZ_s

Las distorsiones debido a las fuerzas de corte γ_{xy} y γ_{xz} en los planos X_yY_s y X_zZ_s respectivamente se muestran en la figura 2-4 y se definen de la siguiente forma:

$$\phi_z = \frac{dv_s}{dx_s} - \gamma_{xy} \rightarrow \gamma_{xy} = \frac{dv_s}{dx_s} - \phi_z \quad (2-4)$$

$$\phi_y = \frac{dw_s}{dx_s} - \gamma_{xz} \rightarrow \gamma_{xz} = \frac{dw_s}{dx_s} - \phi_y \quad (2-5)$$

2.2 Relaciones esfuerzo-deformación

Las relaciones constitutivas elásticas que se emplean son

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E \varepsilon_x \\ \sigma_{xys} &= G \gamma_{xy} \\ \sigma_{xzs} &= G \gamma_{xz}\end{aligned}\quad (2-6)$$

donde E es el módulo de elasticidad, G es el módulo de corte, σ_x es el esfuerzo axial, y σ_{xy} y σ_{xz} representan los esfuerzos cortantes en los planos xy y xz respectivamente.

2.3 Definición de resultantes de fuerza

Definiendo N_x como fuerza axial, M_y y M_z como momentos flexionantes alrededor de los ejes y y z respectivamente, Q_y y Q_z como las fuerzas cortantes en la dirección y y z respectivamente, éstas quedan definidas mediante

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_A \sigma_x dA \\
 M_y &= - \int_A \sigma_x z_c dA \\
 M_z &= - \int_A \sigma_x y_c dA \\
 Q_y &= \int_A \sigma_{xy} dA \\
 Q_z &= \int_A \sigma_{xz} dA
 \end{aligned}
 \tag{2-7}$$

2.4 Ecuaciones de equilibrio

Se considera que a lo largo de la viga podrá haber cargas uniformemente distribuidas, tanto en el sentido transversal como en el longitudinal, además de un momento torsor distribuido. A partir del diagrama de cuerpo libre de un elemento diferencial de viga como el de al figura 2-5, se pueden obtener las relaciones de equilibrio que se presentan a continuación:

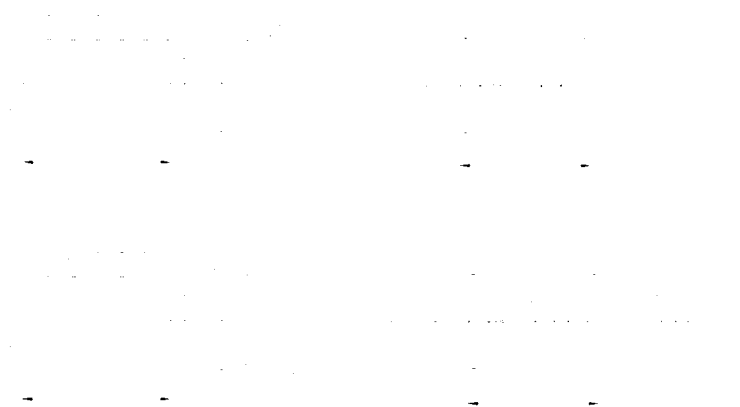


Figura 2-5 – Diagramas de cuerpo libre de un elemento diferencial de viga

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{x_c} = 0 & \rightarrow \frac{dN_x}{dx_c} = -q_x \\
\Sigma F_{y_c} = 0 & \rightarrow \frac{dQ_y}{dx_c} = -q_y \\
\Sigma F_{z_c} = 0 & \rightarrow \frac{dQ_z}{dx_c} = -q_z \\
\Sigma M_x = 0 & \rightarrow \frac{dM_x}{dx_c} = -t \\
\Sigma M_y = 0 & \rightarrow \frac{dM_y}{dx_c} = -Q_z \\
\Sigma M_z = 0 & \rightarrow \frac{dM_z}{dx_c} = -Q_y
\end{aligned}
\tag{2-8}$$

Donde M_x es el momento torsor¹⁵; q_x , q_y y q_z son cargas distribuidas en dirección x_c , y_c y z_c respectivamente y t es un momento torsor distribuido.

2.5 Relaciones fuerza resultante – deformación resultante

Las resultantes de fuerza dadas por las ecuaciones (2-7) se combinan con las ecuaciones de la (2-1) a la (2-6) para obtener las relaciones fuerza resultante – deformación resultante:

$$\begin{aligned}
N_x &= \int_A \sigma_x dA = \int_A E(\varepsilon_x - y_c \kappa_{xy} - z_c \kappa_{xz}) dA = EA\varepsilon_x \\
M_y &= - \int_A \sigma_x z_c dA = - \int_A E(\varepsilon_x - y_c \kappa_{xy} - z_c \kappa_{xz}) z_c dA = EI_y \kappa_{xz} \\
M_z &= - \int_A \sigma_x y_c dA = - \int_A E(\varepsilon_x - y_c \kappa_{xy} - z_c \kappa_{xz}) y_c dA = EI_z \kappa_{xy} \\
Q_y &= \int_{A_1} \sigma_{xy} dA = \int_{A_1} G\gamma_{xy} dA = k_y GA\gamma_{xy} \\
Q_z &= \int_{A_2} \sigma_{xz} dA = \int_{A_2} G\gamma_{xz} dA = k_z GA\gamma_{xz} \\
M_x &= GJ \frac{d}{dx_s} \phi_x
\end{aligned} \tag{2-9}$$

donde k_y y k_z son los factores de forma de la sección transversal para el corte en dirección y y z respectivamente y J es la constante de torsión de St. Venant¹⁵.

2.6 Ecuaciones de residuos pesados

La forma de residuos pesados de las ecuaciones de equilibrio (ec. 2-8) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \hat{u}_c \left(\frac{dN_x}{dx_c} + q_x \right) dx_c &= 0 \\
\int_0^L \hat{v}_s \left(\frac{dQ_y}{dx_c} + q_y \right) dx_c &= 0 \\
\int_0^L \hat{w}_s \left(\frac{dQ_z}{dx_c} + q_z \right) dx_c &= 0 \\
\int_0^L \hat{\phi}_x \left(\frac{dM_x}{dx_s} + t \right) dx_s &= 0 \\
\int_0^L \hat{\phi}_y \left(\frac{dM_y}{dx_c} + Q_z \right) dx_c &= 0 \\
\int_0^L \hat{\phi}_z \left(\frac{dM_z}{dx_c} + Q_y \right) dx_c &= 0
\end{aligned} \tag{2-10}$$

La forma de residuos pesados de las relaciones resultante de fuerza - resultante de deformación en las ecuaciones (2-9) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \hat{N}_x \left(\varepsilon_x - \frac{N_x}{EA} \right) dx_c &= 0 \\
\int_0^L \hat{Q}_y \left(\gamma_{xy} - \frac{Q_y}{k_y GA} \right) dx_s &= 0 \\
\int_0^L \hat{Q}_z \left(\gamma_{xz} - \frac{Q_z}{k_z GA} \right) dx_s &= 0 \\
\int_0^L \hat{M}_x \left(\frac{d\phi_x}{dx} - \frac{M_x}{GJ} \right) dx_s &= 0 \\
\int_0^L \hat{M}_y \left(\kappa_{xz} - \frac{M_y}{EI_y} \right) dx_c &= 0 \\
\int_0^L \hat{M}_z \left(\kappa_{xy} - \frac{M_z}{EI_z} \right) dx_c &= 0
\end{aligned} \tag{2-11}$$

2.7 Forma débil

Se integran por partes las ecuaciones (2-10), para llegar a la siguiente forma débil del problema de vigas:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \hat{u} \left(\frac{dN_x}{dx_c} + q_x \right) dx_c &= \hat{u}_c N_x \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d\hat{u}_c}{dx_c} N_x dx_c + \int_0^L \hat{u}_c q_x dx_c \\
\int_0^L \hat{v}_s \left(\frac{dQ_y}{dx_c} + q_y \right) dx_c &= \hat{v}_s Q_y \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d\hat{v}_s}{dx_c} Q_y dx_c + \int_0^L \hat{v}_s q_y dx_c \\
\int_0^L \hat{w}_s \left(\frac{dQ_z}{dx_c} + q_z \right) dx_c &= \hat{w}_s Q_z \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d\hat{w}_s}{dx_c} Q_z dx_c + \int_0^L \hat{w}_s q_z dx_c \\
\int_0^L \hat{\phi}_x \left(\frac{dM_x}{dx_s} + t \right) dx_s &= \hat{\phi}_x M_x \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d\hat{\phi}_x}{dx_s} M_x dx_s + \int_0^L \hat{\phi}_x t dx_s \\
\int_0^L \hat{\phi}_y \left(\frac{dM_y}{dx_c} + Q_z \right) dx_c &= \hat{\phi}_y M_y \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d\hat{\phi}_y}{dx_c} M_y dx_c + \int_0^L \hat{\phi}_y Q_z dx_c \\
\int_0^L \hat{\phi}_z \left(\frac{dM_z}{dx_c} + Q_y \right) dx_c &= \hat{\phi}_z M_z \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d\hat{\phi}_z}{dx_c} M_z dx_c + \int_0^L \hat{\phi}_z Q_y dx_c
\end{aligned} \tag{2-12}$$

Sumando estas ecuaciones con el resto de los términos de la ecuación (2-11) se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \frac{d\hat{u}_c}{dx_c} N_x dx_c + \int_0^L \frac{d\hat{v}_s}{dx_c} Q_y dx_c + \int_0^L \frac{d\hat{w}_s}{dx_c} Q_z dx_c + \int_0^L \frac{d\hat{\phi}_x}{dx_s} M_x dx_s + \\
& \int_0^L \frac{d\hat{\phi}_y}{dx_c} M_y dx_c + \int_0^L \frac{d\hat{\phi}_z}{dx_c} M_z dx_c + \int_0^L \hat{N}_x \left(\varepsilon_x - \frac{N_x}{EA} \right) dx_c + \\
& \int_0^L \hat{Q}_y \left(\gamma_{xy} - \frac{Q_y}{k_y GA} \right) dx_s + \int_0^L \hat{Q}_z \left(\gamma_{xz} - \frac{Q_z}{k_z GA} \right) dx_s + \int_0^L \hat{M}_x \left(\frac{d\phi_x}{dx_s} - \frac{M_x}{GJ} \right) dx_s + \\
& \int_0^L \hat{M}_y \left(\kappa_{xz} - \frac{M_y}{EI_y} \right) dx_c + \int_0^L \hat{M}_z \left(\kappa_{xy} - \frac{M_z}{EI_z} \right) dx_c - \int_0^L \hat{v}_s^T q_y dx_c - \int_0^L \hat{w}_s^T q_z dx_c - \\
& \int_0^L \hat{\phi}_z^T Q_y dx_c - \int_0^L \hat{\phi}_y^T Q_z dx_c - \int_0^L \hat{u}_c^T q_x dx_c - \int_0^L \hat{\phi}_x^T t dx_s - \hat{v}_s^T Q_y \Big|_0^L - \hat{w}_s^T Q_z \Big|_0^L - \\
& \hat{\phi}_z^T M_z \Big|_0^L - \hat{\phi}_y^T M_y \Big|_0^L - \hat{u}_c^T N_x \Big|_0^L - \hat{\phi}_x^T M_x \Big|_0^L = 0
\end{aligned} \tag{2-13}$$

2.8 Substitución de la forma general de la solución de prueba en la forma variacional

Las funciones de prueba tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
u_c &= [N_u] \{\bar{u}_c\} & N_x &= [P_{N_x}] \{\bar{\alpha}\} \\
v_c &= [N_v] \{\bar{v}_c\} + [N_{v\phi}] \{\bar{\phi}_z\} & Q_y &= [P_{Q_y}] \{\bar{\delta}\} \\
w_c &= [N_w] \{\bar{w}_c\} + [N_{w\phi}] \{\bar{\phi}_y\} & Q_z &= [P_{Q_z}] \{\bar{\gamma}\} \\
\phi_x &= [N_\phi] \{\bar{\phi}_x\} & M_x &= [P_{M_x}] \{\bar{\beta}\} \\
\phi_y &= [N_\phi] \{\bar{\phi}_y\} & M_y &= [P_{M_y}] \{\bar{\gamma}\} \\
\phi_z &= [N_\phi] \{\bar{\phi}_z\} & M_z &= [P_{M_z}] \{\bar{\delta}\}
\end{aligned} \tag{2-14}$$

donde puede verse que los desplazamientos transversales, v_c y w_c , están ligados con las rotaciones¹⁶, con el fin de ganar precisión en la estimación de estas cantidades. Para los desplazamientos con respecto al centro de corte se tiene lo siguiente:

$$\begin{Bmatrix} v_s \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_c \\ w_c \end{Bmatrix} + \phi_x \begin{Bmatrix} -z_s \\ y_s \end{Bmatrix} \quad (2-15)$$

donde y, y_s, z, z_s son las coordenadas del centro de corte con respecto al eje centroidal (ver figura 2-6). La forma de interpolación, por lo tanto, queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v_s &= v_c - z_s \phi_x = [N_v] \{\bar{v}_c\} + [N_{v\phi}] \{\bar{\phi}_z\} - z_s [N_\phi] \{\bar{\phi}_x\} \\ w_s &= w_c + y_s \phi_x = [N_w] \{\bar{w}_c\} + [N_{w\phi}] \{\bar{\phi}_y\} + y_s [N_\phi] \{\bar{\phi}_x\} \end{aligned} \quad (2-16)$$

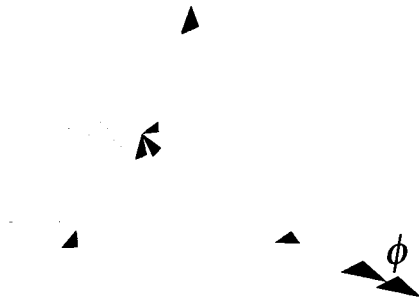


Figura 2-6 – Centro de corte con respecto a ejes centroidales

Las funciones de peso tienen la misma estructura que las funciones de prueba:

$$\begin{aligned} \hat{u}_c &= [N_u] \{\hat{u}_c\} & \hat{N}_x &= [P_{N_x}] \{\hat{\alpha}\} \\ \hat{v}_c &= [N_v] \{\hat{v}_c\} + [N_{v\phi}] \{\hat{\phi}_z\} & \hat{Q}_y &= [P_{Q_y}] \{\hat{\beta}\} \\ \hat{w}_c &= [N_w] \{\hat{w}_c\} + [N_{w\phi}] \{\hat{\phi}_y\} & \hat{Q}_z &= [P_{Q_z}] \{\hat{\gamma}\} \\ \hat{\phi}_x &= [N_\phi] \{\hat{\phi}_x\} & \hat{M}_x &= [P_{M_x}] \{\hat{\beta}\} \\ \hat{\phi}_y &= [N_\phi] \{\hat{\phi}_y\} & \hat{M}_y &= [P_{M_y}] \{\hat{\gamma}\} \\ \hat{\phi}_z &= [N_\phi] \{\hat{\phi}_z\} & \hat{M}_z &= [P_{M_z}] \{\hat{\alpha}\} \end{aligned} \quad (2-17)$$

$$\begin{aligned}
\hat{v}_x &= \hat{v}_c - z_s \hat{\phi}_x = [N_v] \{\hat{v}_c\} + [N_{v\phi}] \{\hat{\phi}_z\} - z_s [N_\phi] \{\hat{\phi}_x\} \\
\hat{w}_x &= \hat{w}_c + y_s \hat{\phi}_x = [N_w] \{\hat{w}_c\} + [N_{w\phi}] \{\hat{\phi}_y\} + y_s [N_\phi] \{\hat{\phi}_x\}
\end{aligned} \tag{2-18}$$

Utilizando esta forma para las interpolaciones, se substituye en la ecuación (2-13) de la forma débil, y se obtiene la forma matricial para el problema de viga:

$$\begin{bmatrix} [P] & [Q] \\ [Q]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{\Gamma}\} \\ \{\bar{d}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_d\} \end{Bmatrix} \tag{2-19}$$

donde

$$[P] = \begin{bmatrix} [V] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [X] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [M] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [R] \end{bmatrix} \quad [Q] = \begin{bmatrix} [A] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [H] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [C] & [G] & [D] & [0] \\ [0] & [B] & [0] & [F] & [0] & [E] \end{bmatrix} \tag{2-20}$$

$$\begin{aligned}
\{\bar{\Gamma}\} &= \begin{Bmatrix} \{\bar{\alpha}\} \\ \{\bar{\gamma}\} \\ \{\bar{\delta}\} \end{Bmatrix} & \{\bar{d}\} &= \begin{Bmatrix} \{\bar{u}_c\} \\ \{\bar{v}_c\} \\ \{\bar{w}_c\} \\ \{\phi_x\} \\ \{\phi_y\} \\ \{\phi_z\} \end{Bmatrix} & \{f_d\} &= \begin{Bmatrix} \{f_{N_v}\} \\ \{f_{N_w}\} \\ \{f_{\phi_x}\} \\ \{f_{\phi_y}\} \\ \{f_{\phi_z}\} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-21}$$

Las submatrices se definen como

$$\begin{aligned}
[A] &= \int_0^L [P_{N_x}]^T \frac{d}{dx_c} [N_u] dx_c \\
[B] &= \int_0^L [P_{Q_y}]^T \frac{d}{dx_s} [N_v] dx_s \\
[C] &= \int_0^L [P_{Q_z}]^T \frac{d}{dx_s} [N_w] dx_s \\
[D] &= \int_0^L [P_{M_x}]^T \frac{d}{dx_c} [N_{\phi_x}] dx_c + \int_0^L [P_{Q_z}]^T \frac{d}{dx_s} [N_{w\phi}] dx_s - \int_0^L [P_{Q_z}]^T [N_{\phi_x}] dx_s \\
[E] &= \int_0^L [P_{M_z}]^T \frac{d}{dx_c} [N_{\phi_z}] dx_c + \int_0^L [P_{Q_y}]^T \frac{d}{dx_s} [N_{v\phi}] dx_s - \int_0^L [P_{Q_y}]^T [N_{\phi_z}] dx_s \\
[F] &= - \int_0^L [P_{Q_y}]^T z_s \frac{d}{dx_s} [N_{\phi_x}] dx_s \\
[G] &= \int_0^L [P_{Q_z}]^T y_s \frac{d}{dx_s} [N_{\phi_x}] dx_s \tag{2-22} \\
[H] &= \int_0^L [P_{M_x}]^T \frac{d}{dx_s} [N_{\phi_x}] dx_s \\
[M] &= - \int_0^L [P_{M_x}]^T \frac{1}{EI_y} [P_{M_x}] dx_c - \int_0^L [P_{Q_z}]^T \frac{1}{k_z GA} [P_{Q_z}] dx_s \\
[R] &= - \int_0^L [P_{M_z}]^T \frac{1}{EI_z} [P_{M_z}] dx_c - \int_0^L [P_{Q_y}]^T \frac{1}{k_y GA} [P_{Q_y}] dx_s \\
[V] &= - \int_0^L [P_{N_x}]^T \frac{1}{EA} [P_{N_x}] dx_c \\
[X] &= - \int_0^L [P_{M_x}]^T \frac{1}{GJ} [P_{M_x}] dx_s
\end{aligned}$$

Dada la forma de $[N_{\phi}]$ y $[N_{w\phi}]$, la cual se muestra más adelante, las integrales de las matrices $[D]$ y $[E]$ en las ecuaciones (2-22) conteniendo a esos términos se desvanecen.

Los vectores de fuerza quedan definidos como:

$$\begin{aligned}
\{f_{N_u}\} &= \int_0^L [N_u]^T q_x dx_c + [N_u]^T N_x|_0^L \\
\{f_{N_v}\} &= \int_0^L [N_v]^T q_y dx_s + [N_v]^T Q_y|_0^L \\
\{f_{N_w}\} &= \int_0^L [N_w]^T q_z dx_s + [N_w]^T Q_z|_0^L \\
\{f_{\phi_x}\} &= \int_0^L [N_{\phi_x}]^T t dx_s + [N_{\phi_x}]^T M_x|_0^L + \int_0^L [N_{\phi_x}]^T y_s q_z dx_c - \int_0^L [N_{\phi_x}]^T z_s q_y dx_c \\
\{f_{\phi_y}\} &= \int_0^L [N_{\phi_y}]^T q_y dx_s + [N_{\phi_y}]^T M_z|_0^L \\
\{f_{\phi_z}\} &= \int_0^L [N_{\phi_z}]^T q_z dx_s + [N_{\phi_z}]^T M_y|_0^L
\end{aligned} \tag{2-23}$$

En los vectores de fuerza mostrados en la ecuación (2-23) se puede ver que hay términos que no están dentro de una integral y que están evaluados desde 0 hasta L. Estos términos, que por su simbología pueden interpretarse como fuerzas internas según la sección 2.3, en realidad simbolizan las fuerzas externas nodales que el elemento puede tener. Esto se puede entender mejor observando la figura 2-7. Ahí se muestra un diagrama de cuerpo libre de un elemento con cargas axiales. Tomando como ejemplo el vector de fuerzas axiales de la ecuación (2-23), y quitándole el término con la integral (haciendo que $q_x=0$) tenemos que:

$$\{f_{N_u}\} = [N_u]^T N_x|_0^L = \begin{bmatrix} [N_u]_L^T N_{x_L} & -[N_u]_0^T N_{x_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} N_{x_L} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} N_{x_0} \tag{2-23a}$$



Figura 2-7 – Diagrama de cuerpo libre para un elemento con cargas axiales

De la figura 2-7 se deduce que $N_{x_0} = -P_0$ y que $N_{x_L} = P_L$ por lo que el vector de fuerzas axiales queda finalmente como:

$$\{f_{N_u}\} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_L \end{bmatrix} \quad (2-23b)$$

lo cual puede verse como la aportación de cargas nodales externas al vector de fuerzas. Lo mismo sucede para el resto de los vectores de fuerzas de la ecuación (2-23). Debido a que estas fuerzas nodales externas pueden también tomarse en cuenta directamente al vector de fuerzas general del sistema, la formulación para este elemento puede simplificarse eliminando de los vectores de fuerzas estos términos, quedando:

$$\begin{aligned} \{f_{N_u}\} &= \int_0^L [N_u]^T q_x dx_c \\ \{f_{N_v}\} &= \int_0^L [N_v]^T q_y dx_s \\ \{f_{N_w}\} &= \int_0^L [N_w]^T q_z dx_s \\ \{f_{\phi_x}\} &= \int_0^L [N_{\phi_x}]^T t dx_s + \int_0^L [N_{\phi_x}]^T y_s q_z dx_c - \int_0^L [N_{\phi_x}]^T z_s q_y dx_c \\ \{f_{\phi_y}\} &= \int_0^L [N_{v\phi}]^T q_y dx_s \\ \{f_{\phi_z}\} &= \int_0^L [N_{w\phi}]^T q_z dx_s \end{aligned} \quad (2-23c)$$

Continuando con el desarrollo del elemento, de la ecuación (2-19) deben condensarse fuera los coeficientes indeterminados $\{\bar{\Gamma}\}$, para poder insertar este elemento en un programa estándar, quedando

$$[\bar{K}]\{\bar{d}_c\} = \{f_d\} \quad (2-24)$$

con

$$[\bar{K}] = -[Q]^T [P]^{-1} [Q] \quad (2-25)$$

Además será necesario aplicar una transformación para obtener desplazamientos con respecto al eje de referencia. Esta transformación se hace de la siguiente manera siguiendo la figura 2-8:

$$\begin{aligned}
 u_R &= u_c + z_{ref} \phi_{y_i} - y_{ref} \phi_{z_i} \\
 v_R &= v_c - z_{ref} \phi_{x_i} \\
 w_R &= w_c + y_{ref} \phi_{x_i} \\
 \phi_{x_R} &= \phi_{x_i} \\
 \phi_{y_R} &= \phi_{y_i} \\
 \phi_{z_R} &= \phi_{z_i}
 \end{aligned}
 \tag{2-26}$$

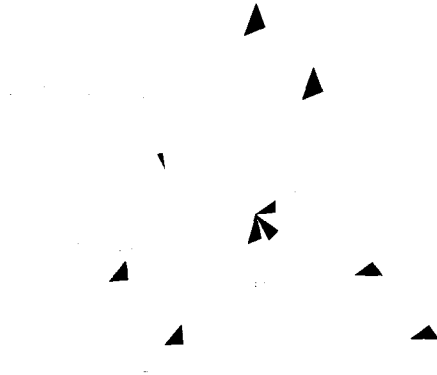


Figura 2-8 – Eje de referencia respecto a ejes centroidales

Todavía será necesario hacer otra transformación más a las rotaciones nodales para que convierta los sentidos de las rotaciones utilizadas en la teoría de viga a los dados por la regla de la mano derecha. Estas dos transformaciones se hacen por medio de una sola matriz de transformación, T_R como se muestra a continuación:

$$u_c = [N_u] \{\bar{u}\} = [N_{u1} \quad N_{u2}] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (2-30)$$

$$\phi = [N_\phi] \{\bar{\phi}\} = [N_{\phi1} \quad N_{\phi2}] \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} \quad (2-31)$$

con

$$N_{ui} = N_{\phi i} = \frac{1}{2}(1 + \xi_i \xi) \quad i = 1,2 \quad (2-32)$$

La deflexión en las direcciones transversales se interpolan en forma estándar a partir de las deflexiones nodales, pero además se liga a las rotaciones para ganar precisión en la estimación de esta cantidad¹⁴:

$$v_c = [N_v] \{\bar{v}_c\} + [N_{v\phi}] \{\bar{\phi}_z\} = [N_{v1} \quad N_{v2}] \begin{Bmatrix} \bar{v}_{c1} \\ \bar{v}_{c2} \end{Bmatrix} + [N_{v\phi1} \quad N_{v\phi2}] \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_{z1} \\ \bar{\phi}_{z2} \end{Bmatrix} \quad (2-33)$$

$$w_c = [N_w] \{\bar{w}_c\} + [N_{w\phi}] \{\bar{\phi}_y\} = [N_{w1} \quad N_{w2}] \begin{Bmatrix} \bar{w}_{c1} \\ \bar{w}_{c2} \end{Bmatrix} + [N_{w\phi1} \quad N_{w\phi2}] \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_{y1} \\ \bar{\phi}_{y2} \end{Bmatrix} \quad (2-34)$$

con

$$N_{vi} = N_{wi} = \frac{1}{2}(1 + \xi_i \xi) \quad i = 1,2 \quad (2-35)$$

$$[N_{v\phi}] = [N_{v\phi1} \quad N_{v\phi2}] = [N_{v\phi}^{12}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \quad N_{v\phi}^{12}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)] \quad (2-36)$$

$$[N_{w\phi}] = [N_{w\phi1} \quad N_{w\phi2}] = [N_{w\phi}^{12}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \quad N_{w\phi}^{12}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)] \quad (2-37)$$

$$N_{v\phi}^{12} = N_{w\phi}^{12} = -\frac{1}{8}(1 - \xi^2) \quad (2-38)$$

Para la interpolación de los campos de desplazamientos ligados a las rotaciones se propuso una función cuadrática, de modo que sea compatible con un elemento placa formulado de la misma manera, para que pueda servir como un elemento rigidizador de placas y cascarones.

Para los momentos flexionantes y torsor, así como para la fuerza axial, se adopta una

interpolación directamente en el sistema coordenado local del elemento:

$$N_x = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \end{Bmatrix} = [P_{N_x}] \{\bar{\alpha}\} \quad (2-39)$$

$$M_x = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \end{Bmatrix} = [P_{M_x}] \{\bar{\beta}\} \quad (2-40)$$

$$M_y = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\gamma}_2 \end{Bmatrix} = [P_{M_y}] \{\bar{\gamma}\} \quad (2-41)$$

$$M_z = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \end{Bmatrix} = [P_{M_z}] \{\bar{\delta}\} \quad (2-42)$$

En el caso de las fuerzas cortantes, éstas se obtienen de satisfacer las ecuaciones de equilibrio (ec. 2-8) para corte y flexión:

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx} = \frac{d}{dx} [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \end{Bmatrix} = [0 \quad 1] \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \end{Bmatrix} = [P_{Q_y}] \{\bar{\delta}\} \quad (2-43)$$

$$Q_z = \frac{dM_y}{dx} = \frac{d}{dx} [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\gamma}_2 \end{Bmatrix} = [0 \quad 1] \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\gamma}_2 \end{Bmatrix} = [P_{Q_z}] \{\bar{\gamma}\}$$

2.10 Consideraciones adicionales

Una vez que se han calculado los desplazamientos, es necesario determinar las fuerzas axiales, los momentos y fuerzas cortantes mediante las ecuaciones (2-39) a (2-43). Para ello se requieren determinar los coeficientes $\{\bar{\Gamma}\}$ a partir de la ecuación (2-19):

$$\{\bar{\Gamma}\} = -[P]^{-1} [Q] \{d_v\} \quad (2-44)$$

Los resultados se evalúan al centro del elemento.

CAPÍTULO 3

DISCRETIZACIÓN DEL ELEMENTO VIGA CON FILAMENTOS

En este capítulo se implementa a la formulación de la viga vista en el capítulo 2 el modelo de filamentos⁹. Éste consiste en considerar que la sección del elemento está formada por un número determinado de filamentos, que sólo están relacionados entre sí por la hipótesis de que una sección plana y normal al eje centroidal del elemento antes de la deformación, permanece plana después de la deformación, pero no necesariamente normal, ya que existen fuerzas cortantes que pueden distorsionar la sección. Las propiedades de la sección estará, pues, constituida por la contribución de cada uno de los filamentos. Los filamentos tendrán coordenadas en los ejes y y z locales de la viga, y deberán de tener asignados un valor de área, como se muestra en la figura 3-1.

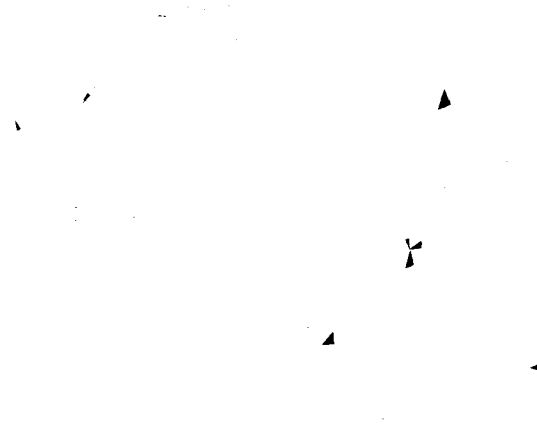


Figura 3-1 – Discretización de la viga con filamentos

3.1 Relación esfuerzo - deformación

Una de las principales características de los filamentos es que la única deformación que pueden sufrir es la deformación axial y sólo pueden resistir esfuerzos axiales. Teniendo presente las relaciones cinemáticas del capítulo 2, el esfuerzo axial para un filamento se define como

$$\sigma_{x_i} = E(\epsilon_x - z_i \kappa_{xz} - y_i \kappa_{xy}) \quad (3-1)$$

3.2 Definición de resultantes de fuerza

Debido a que los filamentos solo pueden resistir esfuerzos axiales, las únicas fuerzas que se ven afectadas por la discretización con filamentos son la fuerza axial y los momentos flexionantes:

$$\begin{aligned} N_x &= \sum_{i=1}^{nfil} \sigma_{x_i} A_i \\ M_y &= - \sum_{i=1}^{nfil} \sigma_{x_i} z_i A_i \\ M_z &= - \sum_{i=1}^{nfil} \sigma_{x_i} y_i A_i \end{aligned} \quad (3-2)$$

donde y_i y z_i son las coordenadas del filamento i en los ejes y y z respectivamente, A_i es el área del filamento y $nfil$ es la cantidad total de filamentos en la sección.

3.3 Relaciones fuerza resultante – deformación resultante

Las relaciones constitutivas entre resultantes de fuerza y resultantes de deformación de las ecuaciones (3-2) pueden establecerse matricialmente como

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \kappa_{xz} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3-3)$$

con

$$[S] = \sum_{i=1}^{nfil} E_i A_i \begin{bmatrix} 1 & -z_i & -y_i \\ -z_i & z_i^2 & y_i z_i \\ -y_i & y_i z_i & y_i^2 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

3.4 Ecuaciones de residuos pesados

A partir de la ecuación (3-3) se puede escribir ahora la nueva forma de residuos pesados de las ecuaciones de resultante de fuerza - resultante de deformación.

$$\int_0^L \begin{bmatrix} \hat{N}_x & \hat{M}_y & \hat{M}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_{xz} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} - [S]^{-1} \begin{bmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

3.5 Forma débil

Reemplazando en la ecuación (2-11) de residuos pesados los términos que incluyen la fuerza axial y los momentos flexionantes por la expresión dada en la ecuación (3-5), llegamos a la nueva forma débil:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx} N_x dx + \int_0^L \frac{d\hat{v}}{dx} Q_y dx + \int_0^L \frac{d\hat{w}}{dx} Q_z dx + \int_0^L \frac{d\hat{\phi}_x}{dx} M_x dx + \int_0^L \frac{d\hat{\phi}_y}{dx} M_y dx + \\ & \int_0^L \frac{d\hat{\phi}_z}{dx} M_z dx + \int_0^L \begin{bmatrix} \hat{N}_x & \hat{M}_y & \hat{M}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{d\phi_y}{dx} \\ \frac{d\phi_z}{dx} \end{bmatrix} - [S]^{-1} \begin{bmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} dx + \int_0^L \hat{Q}_y^T \left(\gamma_{xy} - \frac{Q_y}{k_y GA} \right) dx + \\ & \int_0^L \hat{Q}_z^T \left(\gamma_{xz} - \frac{Q_z}{k_z GA} \right) dx + \int_0^L \hat{M}_x^T \left(\frac{d\phi_x}{dx} - \frac{M_x}{GJ} \right) dx - \int_0^L \hat{v}^T q_y dx - \int_0^L \hat{w}^T q_z dx - \int_0^L \hat{\phi}_z^T Q_y dx \\ & - \int_0^L \hat{\phi}_y^T Q_z dx - \int_0^L \hat{u}^T q_x dx - \int_0^L \hat{\phi}_x^T t dx - \hat{v}^T Q_y \Big|_0^L - \hat{w}^T Q_z \Big|_0^L - \hat{\phi}_z^T M_y \Big|_0^L - \\ & \hat{u}^T N_x \Big|_0^L - \hat{\phi}_x^T M_x \Big|_0^L = 0 \end{aligned} \quad (3-6)$$

Utilizando la misma forma para las interpolaciones mostradas en las ecuaciones (2-14) a (2-18) se substituye en la ecuación (3-6), y se obtiene la misma forma matricial de la ecuación (2-19) con la única variante que la matriz [P] de la ecuación (2-20) se modifica por:

$$[P] = \begin{bmatrix} [V] & [0] & [Y] & [Z] \\ [0] & [X] & [0] & [0] \\ [Y]^T & [0] & [M] & [W] \\ [Z]^T & [0] & [W]^T & [R] \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

donde ahora las submatrices se definen como:

$$\begin{aligned}
[M] &= - \int_0^L [P_{M_y}]^T [S]_{22}^{-1} [P_{M_y}] dx - \int_0^L [P_{Q_z}]^T \frac{1}{k_z GA} [P_{Q_z}] dx \\
[R] &= - \int_0^L [P_{M_z}]^T [S]_{33}^{-1} [P_{M_z}] dx - \int_0^L [P_{Q_y}]^T \frac{1}{k_y GA} [P_{Q_y}] dx \\
[V] &= - \int_0^L [P_{N_x}]^T [S]_{11}^{-1} [P_{N_x}] dx \\
[W] &= - \int_0^L [P_{M_x}]^T [S]_{23}^{-1} [P_{M_z}] dx \\
[Y] &= - \int_0^L [P_{N_x}]^T [S]_{12}^{-1} [P_{M_y}] dx \\
[Z] &= - \int_0^L [P_{N_x}]^T [S]_{13}^{-1} [P_{M_z}] dx
\end{aligned} \tag{3-8}$$

Las submatrices $[M]$, $[R]$ y $[I]$ son las mismas que las de la ecuación (2-22) pero ahora en lugar que aparezcan términos con las propiedades del material como momentos de inercia I_x e I_y y módulo de elasticidad, E , se utilizan coeficientes provenientes de la matriz $[S]$, la cual esta formada con las propiedades de todos los filamentos.

CAPÍTULO 4

MODELO DEL MATERIAL CON DAÑO

En este capítulo se presenta el desarrollo del modelo de material para el elemento viga. El modelo de daño para el concreto fue seleccionado por su simplicidad en la formulación, en donde se utiliza un modelo de daño isotrópico, que como se verá mas adelante, funciona muy bien aplicado al concreto. Esto se hizo con el fin de simplificar lo más posible el modelo de material. Para lograr este cometido también se omitieron las deformaciones plásticas. A continuación se presentan los conceptos importantes en el desarrollo de este modelo de daño.

4.1 Concepto de daño

Cuando un material está sujeto a un tipo de carga particular, la mecánica del daño continuo toma en consideración el daño interno que sufre por medio de unas variables internas de “daño”, cuyo valor oscila desde cero para un material virgen, hasta uno para uno completamente colapsado¹⁷.

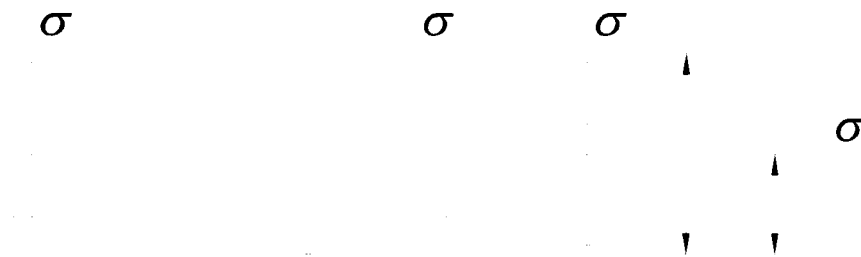


Figura 4-1 – Esfuerzo de Cauchy y esfuerzo efectivo

Para poder entender mejor el concepto de daño, se hace referencia a la figura 4-1, donde S denota el área transversal total y \bar{S} la sección resistente efectiva, por lo que el área definida por la diferencia entre S y \bar{S} simboliza el área degradada del material. Por lo que el daño, d , queda definido como¹⁸:

$$d = \frac{S - \bar{S}}{S} = 1 - \frac{\bar{S}}{S} \quad (4-1)$$

Como se puede observar en esta ecuación, d representa la densidad de la superficie de los

defectos del material, y tendrá un valor de 0 cuando el material no está dañado ($S = \bar{S}$). Cuando se esté dando una reducción de la sección resistente efectiva, el daño se incrementará, hasta tener un valor máximo de 1, que es cuando el material está completamente dañado ($\bar{S} = 0$). De esta definición se puede inferir que la variable de daño es una cantidad que no disminuye, lo que nos lleva a la característica irreversible de cualquier proceso de carga de un material: una vez que ocurra una fractura, el área efectiva se ve reducida y es un proceso no reversible.

4.2 Esfuerzo efectivo

Además del concepto de daño, el concepto de esfuerzo efectivo es de gran importancia para el desarrollo del modelo. La distinción entre el esfuerzo de Cauchy σ , y el esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$, es evidente al observar la figura 4-1. Ambos esfuerzos se relacionan por medio de la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\sigma S = \bar{\sigma} \bar{S} \quad (4-2)$$

Si la variable de daño, d , representa la pérdida del área efectiva tomando en cuenta la pérdida de cohesión y concentraciones de esfuerzos locales, se puede escribir que³¹:

$$\bar{\sigma} = \sigma \frac{S}{\bar{S}} \quad (4-3)$$

y consecuentemente usando la ecuación (4-1) el esfuerzo efectivo queda como:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1-d} \quad (4-4)$$

lo cual es la definición del esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$ ¹⁸. Cuando un proceso de daño está ocurriendo, $\bar{\sigma}$ es físicamente más representativo que σ , porque es sobre el área de esfuerzo efectiva en realidad que la carga externa está actuando.

En conexión al concepto de esfuerzo efectivo, se introduce ahora la hipótesis de la equivalencia de deformaciones¹⁹: “La deformación asociada con un estado de daño bajo el esfuerzo aplicado σ , es equivalente a la deformación asociada con su estado no dañado bajo el esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$ ”. Aprovechando esta hipótesis, junto con la relación expresada en la ecuación (4-3), se pueden derivar leyes constitutivas de una manera más comprensible. Para el concreto se introdujo una relación donde el comportamiento no lineal es conducido por la reducción del área efectiva⁸ como es obvio de la ecuación (4-1), lo que lleva a:

$$\sigma = (1-d)\bar{\sigma} = (1-d)E\varepsilon = E'\varepsilon \quad (4-5)$$

para un problema unidimensional. En esta ecuación se puede ver que el daño induce una reducción en el módulo de elasticidad inicial, E , convirtiéndolo en una forma secante, E' . En forma general la ecuación (4-5) queda como:

$$\bar{\sigma} = (1-d)D_0 : \varepsilon \quad (4-6)$$

donde $D_0 : \varepsilon$ representa la contracción de la matriz de rigidez inicial con el tensor de deformaciones.

4.3 Potencial de energía libre de Helmholtz

La mecánica del daño continuo está basada en la termodinámica de procesos irreversibles¹⁸. Para establecer una ley constitutiva se debe introducir un potencial de energía libre, en donde se representen las variables libres e internas. Se postula un potencial de energía libre de Helmholtz con la siguiente forma²⁰:

$$\psi(d^+, d^-) = (1-d^+) \psi_0^+ + (1-d^-) \psi_0^- \quad (4-7)$$

donde ψ_0^+ y ψ_0^- son las energías libres elásticas, y los índices (+) y (-) representan de ahora en adelante entidades en tensión o compresión respectivamente. Estas energías elásticas se definen como:

$$\psi_0^+(\bar{\sigma}(\varepsilon)) = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^+ : D_0^{-1} : \bar{\sigma}^+ \quad (4-8)$$

$$\psi_0^-(\bar{\sigma}(\varepsilon)) = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^- : D_0^{-1} : \bar{\sigma}^- \quad (4-9)$$

Se puede inferir que las ecuaciones (4-8) y (4-9) tienen una forma cuadrática¹¹, mismas que incluyen también la matriz de rigidez que es positiva definida, por lo que se concluye que las energías libres elásticas son positivas:

$$\psi_0^+ \geq 0 \quad (4-10)$$

$$\psi_0^- \geq 0 \quad (4-11)$$

Debido a que ψ_0^+ y ψ_0^- son positivas y a que la variable intrínseca de daño tiene los siguientes

requerimientos:

$$0 \leq (d^+, d^-) \leq 1 \quad (4-12)$$

se puede probar que:

$$\psi = (1 - d^+) \psi_0^+ + (1 - d^-) \psi_0^- \geq 0 \quad (4-13)$$

Si derivamos parcialmente la ecuación (4-7) con respecto a d^+ y d^- , resulta en:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial d^+} = \psi_0^+ \quad -\frac{\partial \psi}{\partial d^-} = \psi_0^- \quad (4-14)$$

donde ψ_0^+ y ψ_0^- pueden verse como las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables de daño d^+ y d^- , siendo cada una la razón de cambio de la liberación de energía de deformación elástica producida durante un aumento unitario de la variable de daño correspondiente.

4.4 Criterio de daño

Para poder definir claramente conceptos tales como “carga”, “descarga” o “recarga”, se introducirá una cantidad escalar positiva, denominada esfuerzo equivalente. El esfuerzo equivalente permite establecer una norma para poder comparar diferentes estados de deformación. Esta norma o esfuerzo equivalente tiene la siguiente forma⁸:

$$\tau^+ = \sqrt{\sigma_0 : D_0^{-1} : \sigma_0} \quad \text{para daño en tensión} \quad (4-15)$$

$$\tau^- = \frac{1}{n} \sqrt{\sigma_0 : D_0^{-1} : \sigma_0} \quad \text{para daño en compresión} \quad (4-16)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= D_0 : \varepsilon \\ n &= \frac{f'_c}{f'_t} \end{aligned} \quad (4-17)$$

siendo f'_c y f'_t la resistencia última del concreto a compresión y tensión respectivamente. La figura (4-2) muestra la forma que tienen las curvas esfuerzo-deformación con el modelo de daño propuesto.

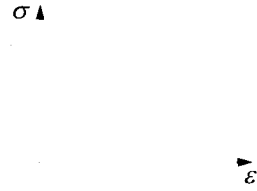


Figura 4-2 - Curva esfuerzo-deformación uniaxial para el modelo de daño

Ahora se introducirán por separado dos criterios de daño, g^+ y g^- , la primera para tensión y la segunda para compresión¹¹:

$$g^+(\tau^-, r^+) = \tau^- - r^+ \leq 0 \quad (4-18)$$

$$g^-(\tau^+, r^-) = \tau^+ - r^- \leq 0 \quad (4-19)$$

Las variables r^+ y r^- son los umbrales de daño para el instante actual, los cuales controlan el tamaño de las superficies de daño. De acuerdo a la ecuación (4-18), el umbral de daño, r^+ , debe tener un valor inicial, r^* , previamente a la aplicación de una carga. Este valor inicial se asume que es una propiedad del material, el cual encierra el dominio elástico lineal. Lo mismo sucede para la compresión, por lo que el inicio del daño en compresión ocurrirá cuando $\tau = r^*$. Hay que remarcar, que el valor inicial del umbral de daño, r^* , es el mismo para el daño en tensión y el daño en compresión⁸. Esto se debe a que cuando se definieron los criterios de daño, para la compresión se introdujo una norma idéntica a la de tensión pero modificada con un coeficiente $1/n_f$ para escalarlo a los niveles de esfuerzo de tensión.

Suponiendo que f_t es el esfuerzo del concreto arriba del cual empieza a ser notable la no linealidad del material, el umbral de daño inicial puede establecerse de acuerdo a la ecuación (4-15) como:

$$r^* = \sqrt{f_t t \frac{1}{E} f_t t} = \frac{f_t t}{\sqrt{E_0}} \quad (4-20)$$

4.5 Leyes de evolución de las variables internas

Para la cinemática de las variables de daño, se supondrán las siguientes relaciones de cambio para daño en tensión:

$$\dot{d}^+ = \dot{\mu}^+ \frac{\partial G^+(r^+)}{\partial r^+} \quad (4-21a)$$

$$\dot{r}^+ = \dot{\mu}^+ (\geq 0) \quad (4-21b)$$

y para daño en compresión:

$$\dot{d}^- = \dot{\mu}^- \frac{\partial G^-(r^-)}{\partial r^-} \quad (4-22a)$$

$$\dot{r}^- = \dot{\mu}^- (\geq 0) \quad (4-22b)$$

donde G^+ y G^- son funciones monotónicas escalares, las cuales se deben seleccionar de acuerdo a observaciones experimentales, como se muestra más adelante; y μ^+ y μ^- son parámetros de consistencia usado para definir las condiciones de carga/descarga/recarga de acuerdo a las relaciones de Kuhn-Tucker¹⁹:

$$\dot{\mu}^+ \geq 0 \quad ; \quad g^+ \leq 0 \quad ; \quad \dot{\mu}^+ g^+ = 0 \quad (4-23)$$

y similarmente para compresión. La interpretación de estas relaciones se explica a continuación¹⁹ y se pueden ver gráficamente en la figura 4-3.

- $g^+ < 0$ significa que no ocurre más daño, como se expresa claramente en la última ecuación de las ecs.(4-18), imponiendo que $\dot{\mu}^+ = 0$, por lo que de acuerdo a la ecuación (4-16), $\dot{d}^+ = 0$.
- $\dot{\mu}^+ > 0$ significa que el daño va en aumento. En esta situación $\dot{\mu}^+ g^+ = 0$ determina que $g^+ = 0$, y así es posible definir μ^+ de las condiciones de consistencia de daño:

$$\dot{g}^+(\tau^+, r^+) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{r}^+ = \dot{\tau}^+ = \dot{\mu}^+ \quad (\dot{\mu}^+ \geq 0) \quad (4-24)$$

De esta última condición es posible concluir que para un instante cualquiera t :

$$r_t^+ = \max\{r_0^+, \max(\tau_s^+)\} \quad 0 \leq s \leq t \quad (4-25)$$

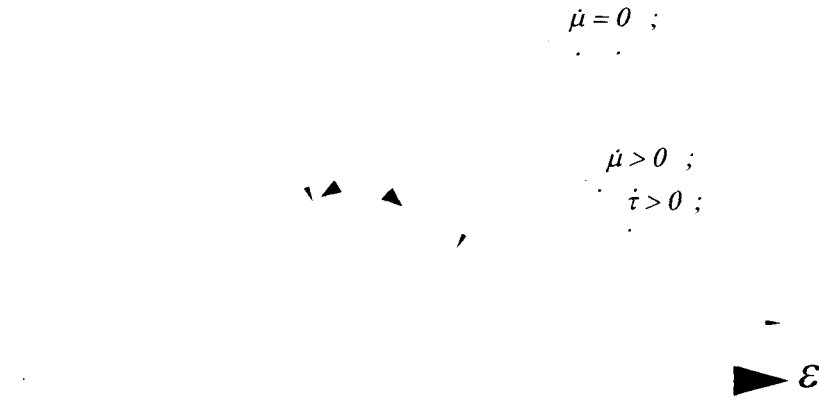


Figura 4-3 – Casos de carga/descarga/recarga para el modelo de daño

Introduciendo la ecuación (4-21b) en la ecuación (4-21a), la ley de evolución para la variable de daño en tensión queda de la siguiente forma cuando haya carga:

$$\dot{d} = \frac{\partial G^+(r^+)}{\partial r^+} \dot{r}^+ = \dot{G}^+(r^+) \geq 0 \quad (4-26)$$

Para la compresión se sigue una cinemática análoga que obviamente resultará en:

$$\dot{d} = \frac{\partial G^-(r^-)}{\partial r^-} \dot{r}^- = \dot{G}^-(r^-) \geq 0 \quad (4-27)$$

4.6 Disipación

Uno de los aspectos más importantes que tiene la mecánica del daño continuo, es su consistencia energética, que implica que durante cualquier proceso de carga, la disipación de energía es siempre una cantidad no-negativa. Esto también significa que la entropía tiende a aumentar, lo que conlleva a procesos irreversibles, de acuerdo al Segundo Principio de la Termodinámica²².

La expresión matemática para esta condición, es la desigualdad de Clausius-Duhem²¹, cuya forma reducida es:

$$\dot{\gamma} = -\dot{\psi} + \sigma : \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (4-28)$$

donde ψ es el potencial de energía libre y σ es el tensor de esfuerzos de Cauchy. De acuerdo a la ecuación (4-7):

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{d}} \dot{\dot{d}} \quad (4-29)$$

La sustitución de la ecuación (4-29) dentro de la ecuación (4-28) tomando en cuenta las derivadas expresadas en las ecuaciones (4-14), es posible obtener otra expresión para la disipación:

$$\dot{\gamma} = \left(\sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right) : \dot{\varepsilon} + \psi_0 \dot{d} + \dot{\psi}_0 \dot{\dot{d}} \quad (4-30)$$

Debido al hecho de que ε es una variable libre, se puede especificar un $\dot{\varepsilon}$ arbitrario. Para que la ecuación de disipación mantenga su generalidad, la expresión entre paréntesis se debe cancelar⁹, por lo tanto:

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \quad (4-31)$$

que es una de las relaciones de Coleman, esencial para el desarrollo de la ley constitutiva. Ahora las ecuaciones (4-8) y (4-9) pueden expresarse también de la siguiente manera (al sustituir $\bar{\sigma} = D_0 : \varepsilon$):

$$\dot{\psi}_0 = \frac{1}{2} \bar{\sigma}' : \varepsilon \quad (4-32)$$

$$\dot{\psi}_0 = \frac{1}{2} \bar{\sigma}' : \varepsilon$$

Realizando la derivación expresada en la ecuación (4-32) tomando en cuenta la ecuación (4-7), se llega a lo siguiente:

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = (1-d) \frac{\partial \dot{\psi}_0}{\partial \varepsilon} + (1-d) \frac{\partial \dot{\psi}_0}{\partial \dot{\varepsilon}} \quad (4-33)$$

Es un hecho que $\bar{\sigma}'(\varepsilon)$ tiene una dependencia lineal de ε , por lo que es claro que:

$$\bar{\sigma}'(\alpha \varepsilon) = \alpha \bar{\sigma}'(\varepsilon) \quad (4-34)$$

$$\bar{\sigma}(\alpha \varepsilon) = \alpha \bar{\sigma}(\varepsilon)$$

donde α es un escalar arbitrario. Estas relaciones ponen en evidencia que tanto $\bar{\sigma}'$ como $\bar{\sigma}$ son funciones escalares homogéneas de primer grado en ε , y por lo tanto, se puede aplicar el

teorema de Euler²⁰ para llegar a :

$$\bar{\sigma}^+(\varepsilon) = \varepsilon : \frac{\partial \bar{\sigma}^+}{\partial \varepsilon} \quad (4-35)$$

$$\bar{\sigma}^- (\varepsilon) = \varepsilon : \frac{\partial \bar{\sigma}^-}{\partial \varepsilon}$$

Para clarificar la ley constitutiva expresada en la ecuación (4-33), la ecuación (4-32) debe de derivarse con respecto a la variable ε :

$$\frac{\partial \psi_0^+}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\sigma}^+}{\partial \varepsilon} : \varepsilon + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^+ \quad (4-36)$$

Sustituyendo en la ecuación (4-36) la ecuación (4-35) tenemos que:

$$\frac{\partial \psi_0^+}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^+ + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^+ = \bar{\sigma}^+ \quad (4-37)$$

e idénticamente se puede concluir:

$$\frac{\partial \psi_0^-}{\partial \varepsilon} = \bar{\sigma}^- \quad (4-38)$$

Por lo tanto, la ley constitutiva definida en la ecuación (4-33) puede ser explícita, para finalmente obtener una definición para el tensor de esfuerzos de Cauchy, σ :

$$\sigma = (1 - d^+) \bar{\sigma}^+ + (1 - d^-) \bar{\sigma}^- \quad (4-39)$$

4.7 Evaluación numérica de las variables internas

Haciendo una integración de las ecuaciones (4-26) y (4-27) se llega a las siguientes expresiones:

$$d^+ = G^+(r^+) \quad d^- = G^-(r^-) \quad (4-40)$$

con

$$0 \leq G^+(r^+) \leq 1 \quad 0 \leq G^-(r^-) \leq 1 \quad (4-41)$$

$$\dot{G}^+(r^+) \geq 0 \quad \dot{G}^-(r^-) \geq 0 \quad (4-42)$$

$$G^+(r_0^+) = 0 \quad G^-(r_0^-) = 0 \quad (4-43)$$

donde en la ecuación (4-41) se introduce la condición dada por la ecuación (4-12). Las

ecuaciones (4-42) demuestran la evolución positiva de las variables de daño expresada en las ecuaciones (4-26) y (4-27), asegurando que $G^+(\cdot)$ y $G^-(\cdot)$ sean funciones incrementales monótonicas. La ecuación (4-43) introduce las condiciones iniciales cuando no hay daño.

Lo importante ahora consiste en definir estas funciones escalares $G^+(\cdot)$ y $G^-(\cdot)$. En el presente trabajo se adoptarán las siguientes funciones¹ que toman en cuenta las condiciones dadas en las ecuaciones (4-40) a (4-43):

$$d^+ = G^+(r^+) = 1 - \frac{r^+}{r^+*} e^{-\mathcal{A} \left(1 - \frac{r^+}{r^+*}\right)} \quad \text{para daño en tensión} \quad (4-44)$$

$$d^- = G^-(r^-) = 1 - \frac{r^-}{r^-*} e^{-\mathcal{A} \left(1 - \frac{r^-}{r^-*}\right)} \quad \text{para daño en compresión} \quad (4-45)$$

donde \mathcal{A} es el único parámetro que se debe definir. Esta fórmula representa una curva exponencial asintótica al eje de deformación, consecuentemente el parámetro \mathcal{A} debe ser fijado para tomar en consideración los requisitos de la objetividad en la malla. A continuación se muestra como se llega a la definición de \mathcal{A}^s . La razón de cambio de la energía de disipación se puede reescribir de la ecuación (4-30) ya con el primer término cancelado, como:

$$\dot{\gamma} = \psi_0^+ \dot{d}^+ + \psi_0^- \dot{d}^- \quad (4-46)$$

Adaptando estas ecuaciones al modelo del material particular donde sólo puede haber tensión, o sólo compresión (hay que recordar que este modelo se aplicará a cada filamento individualmente, y por lo tanto solo puede haber un estado de esfuerzo), la ecuación (4-46) se escribe para el caso particular cuando hay tensión:

$$\dot{\gamma} = \psi_0^+ \dot{d}^+ \quad (4-47)$$

donde $\psi_0^+ = \frac{\sigma^{+2}}{2E}$ es la energía libre elástica que sale de la ecuación (4-32). Por lo tanto, para cualquier proceso, la densidad de energía disipada total (por unidad de volumen) es:

$$g = \int_0^z \dot{\gamma} dt = \int_0^z \psi_0^+ G^{+1}(\tau^+) \dot{\tau}^+ dt \quad (4-48)$$

En particular para el esfuerzo equivalente o norma adoptada en este modelo, tenemos que:

$$\tau^{+2} = 2\psi_0^+ \quad \text{para tensión uniaxial} \quad (4-49)$$

$$\tau^2 = \frac{2}{n^2} \psi_0 \quad \text{para compresión uniaxial} \quad (4-50)$$

Substituyendo las expresiones (4-49) en (4-48) usando la función definida en (4-44) y haciendo la integración se llega a lo siguiente:

$$g_t = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right) (r^*)^2 \quad \text{para tensión uniaxial} \quad (4-51)$$

y haciendo algo idéntico para la compresión se tiene:

$$g_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right) (nr^*)^2 \quad \text{para compresión uniaxial} \quad (4-52)$$

donde g_t y g_c son las energías de disipación específicas en procesos de tensión y compresión uniaxial respectivamente y n es un coeficiente definido en la ecuación (4-12). Al despejar el parámetro A de la ecuación (4-51) o (4-52) se tiene que:

$$A = \left(\frac{g_t E_0}{(f_t)^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \geq 0 \quad (4-53)$$

Para evitar resultados no objetivos dependientes del tamaño de la malla, se debe recurrir a la definición de una longitud característica²⁴ l^* . La objetivización se consigue entonces definiendo g_t , que define el área finita debajo de la curva esfuerzo – deformación, como:

$$g_t = \frac{G_f}{l^*} \quad (4-54)$$

El valor de G_f puede ser entonces identificado como la energía de fractura por unidad de área, que debe ser determinado experimentalmente¹². El valor de la longitud característica, l^* , será simplemente la longitud del elemento, ya que se trata de un problema unidimensional. El valor de A en (4-53) junto con el valor de n en (4-17) determina la forma de la curva de esfuerzo-deformación uniaxial (ver figura 4-2).

CAPÍTULO 5

ALGORITMO DE SOLUCIÓN

En este capítulo se presenta el algoritmo de solución para obtener los resultados correctos con este modelo. Debido a la naturaleza no lineal del modelo de daño del material, el proceso es iterativo. El algoritmo general se puede seccionar en cuatro procedimientos particulares, que corresponden al cálculo de la matriz secante consistente de los elementos, el cálculo de las deformaciones, la actualización de las variables internas de daño, y el cálculo de las fuerzas internas.

5.1 Matriz de rigidez secante

Primero se debe calcular la matriz secante de los elementos usando la ecuación (2-25) y calculando todas las submatrices descritas en las ecuaciones (2-22) (las ecuaciones relevantes se vuelven a escribir en la tabla 5-1). Para la discretización con filamentos se debe calcular primero la matriz [S] de la ecuación (3-4), para después poder calcular el resto de las submatrices mostradas en las ecuaciones (3-8). En el cálculo de la matriz [S] hay que poner atención especial a la hora de introducir los datos de los filamentos, ya que el módulo de elasticidad que se introduce es el módulo degradado, el cual se calcula por medio del coeficiente $(1-d)$, donde d es la variable de daño. La variable d es igual a cero para la primera computación de la matriz de rigidez. Para los siguientes casos, d puede adquirir valores desde 0 hasta 1, dependiendo del grado de deformación de los filamentos. El algoritmo para obtener esta matriz secante se muestra en la tabla 5-1.

<p>1) Modificar el módulo de elasticidad de cada filamento como se muestra a continuación:</p> $E_i = (1 - d_i)E_0 \quad (i = \text{número de filamento})$ <p>donde $d_i = 0$ para el primer cómputo.</p> <p>2) Calcular la matriz [S] con las propiedades de cada filamento:</p> $[S] = \sum_{i=1}^{nfil} E_i A_i \begin{bmatrix} 1 & -z_i & -y_i \\ -z_i & z_i^2 & y_i z_i \\ -y_i & y_i z_i & y_i^2 \end{bmatrix}$ <p>3) Calcular el resto de las submatrices de las ecuaciones (2-22) y (3-8) para insertarlas en las matrices [P] y [Q] de las ecuaciones (3-7) y (2-20):</p> $[P] = \begin{bmatrix} [V] & [0] & [Y] & [Z] \\ [0] & [X] & [0] & [0] \\ [Y]^T & [0] & [M] & [W] \\ [Z]^T & [0] & [W]^T & [R] \end{bmatrix} \quad [Q] = \begin{bmatrix} [A] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [H] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [C] & [G] & [D] & [0] \\ [0] & [B] & [0] & [F] & [0] & [E] \end{bmatrix}$ <p>4) Calcular la matriz de rigidez secante con la ecuación (2-25):</p> $[\bar{K}] = -[Q]^T [P]^{-1} [Q]$ <p>5) Hacer las transformaciones pertinentes como se muestra en la ecuación (2-26).</p>

Tabla 5-1 : Algoritmo para calcular la matriz de secante consistente de los elementos

5.2 Cálculo de deformaciones

Una vez calculada la matriz de rigidez del sistema, se procede a resolver el sistema de ecuaciones resultante. Para esto es necesario calcular primero los vectores de fuerza de cada elemento y ensamblarlos para tener el vector de fuerzas global del sistema $\{f_b\}$. Este cálculo se hace con las ecuaciones (2-23). Para la solución del sistema de ecuaciones se despeja el vector de desplazamientos $\{\bar{d}\}$ de la ecuación (2-24). Teniendo el vector de desplazamientos calculado, se procede a hacer el cálculo de las curvaturas en cada elemento con la ecuación (2-2), para poder ahora calcular las deformaciones axiales en cada filamento que conforma al elemento. Esto se hace con la ecuación (2-3). Las distorsiones de los elementos se calcula con las ecuaciones (2-4) y (2-5), donde los filamentos no juegan ningún papel. Este algoritmo puede verse en la tabla 5-2.

- 1) Calcular los vectores de fuerza con las ecuaciones (2-23), para ensamblarlos en el vector de fuerza del sistema:

$$\{f_d\} = \begin{Bmatrix} \{f_{N_u}\} \\ \{f_{N_s}\} \\ \{f_{N_w}\} \\ \{f_{\phi_x}\} \\ \{f_{\phi_y}\} \\ \{f_{\phi_z}\} \end{Bmatrix}$$

- 2) Resolver el sistema de ecuaciones de la ecuación (2-27) para los desplazamientos $\{d\}$:

$$\{\bar{d}\} = [\bar{K}]^{-1} \{f_d\}$$

- 3) Calcular las curvaturas y distorsiones en cada elemento como se señala en las ecuaciones (2-2), (2-4) y (2-5):

$$\begin{aligned} \kappa_{xy} &= \frac{d\phi_{zc}}{dx} & \kappa_{xz} &= \frac{d\phi_{yc}}{dx} \\ \gamma_{xy} &= \frac{dv_s}{dx_s} - \phi_z & \gamma_{xz} &= \frac{dw_s}{dx_s} - \phi_y \end{aligned}$$

- 4) Calcular las deformaciones axiales en cada filamento con la ecuación:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_x - z_i \kappa_{xz} - y_i \kappa_{xy}$$

Tabla 5-2 : Algoritmo para el cálculo de las deformaciones

5.3 Actualización de las variables de daño

Con la deformación calculada para cada filamento, es ahora posible calcular el grado de daño. Para esto se debe calcular primero el esfuerzo axial sin daño de cada filamento con la ecuación (3-1). Luego se calcula la norma τ , como se indica en la ecuación (4-15) para filamentos en tensión, o (4-16) para filamentos en compresión. Se calcula luego el umbral de daño inicial, r^* , con la ecuación (4-20) y el parámetro \mathcal{A} con la ecuación (4-53), y se actualizan las variables internas r^+ , r^- , para tensión o compresión según sea el caso con la ecuación (4-25). Finalmente se calculan las variables de daño d^+ ó d^- para cada filamento con la ecuación (4-44) ó (4-45) según sea el caso. Los esfuerzos axiales se calculan ahora afectados por la variable de daño, como se muestra en la ecuación (4-5). El algoritmo para la actualización de la variable de daño puede verse en la tabla 5-3.

- 1) Evaluar los esfuerzos sin daño con la ecuación (3-1):

$$\sigma_{0i}^{t+1} = E_0 (\epsilon_i^{t+1} - z_i \kappa_{xz} - y_i \kappa_{xy})$$

- 2) Evaluar τ_i^{t+1} de las ecuaciones (4-10) y (4-11):

$$\tau_i^t = \sqrt{\sigma_{0i} : D_0^{-1} : \sigma_{0i}} \quad \text{para daño en tensión}$$

$$\tau_i = \frac{1}{n} \sqrt{\sigma_{0i} : D_0^{-1} : \sigma_{0i}} \quad \text{para daño en compresión}$$

- 3) Calcular r^* y el parámetro A :

$$r^* = \frac{f^t t}{\sqrt{E_0}} \quad A = \left(\frac{G_f E_0}{l^* (f^t)^2} - \frac{1}{2} \right)^+ \geq 0$$

- 4) Actualizar las variables internas:

$$r_i^{t+1} = \max\{r_i^t, \tau_i^{t+1}\}$$

$$d_i^z = 1 - \frac{r^*}{r_i^z} e^{-A \left(1 - \frac{r_i^z}{r^*}\right)}$$

- 5) Actualizar los esfuerzos:

$$\sigma_{0i}^{t+1} = (1 - d_i^{t+1}) \sigma_{0i}^{t+1}$$

Tabla 5-3 : Algoritmo para la actualización de las variables internas

5.4 Cálculo de fuerzas internas

Una vez que se calcularon los esfuerzos axiales de los filamentos afectados con el daño, se calcula ahora las fuerzas internas en el elemento. Para las fuerzas axiales y los momentos flexionantes se utilizan las ecuaciones (3-2), para tomar en cuenta la contribución de cada filamento. Para el momento torsionante y las fuerzas de corte se debe calcular primero el vector de coeficientes $\{F\}$ con la ecuación (2-44) para luego utilizar las ecuaciones (2-40) y (2-43) para la torsión y cortantes, respectivamente. Este algoritmo se ilustra en la tabla 5-4.

- 1) Calcular las fuerzas axiales y momentos flexionantes como en la ecuación (37):

$$N_x = \sum_{i=1}^{nil} \sigma_{x_i} A_i$$

$$M_y = - \sum_{i=1}^{nil} \sigma_{x_i} z_i A_i$$

$$M_z = - \sum_{i=1}^{nil} \sigma_{x_i} y_i A_i$$

con $\sigma_{x_i} = (1 - d_i) \sigma_{x0}$

- 2) Calcular el vector de coeficientes $\{\Gamma\}$:

$$\{\bar{\Gamma}\} = -[P]^{-1} [Q] \{d_v\}$$

- 3) Calcular el momento torsionante y las fuerzas de corte como se muestra en la ecuación (2-40) y (2-43):

$$M_x = [P_{M_x}] \{\beta\}$$

$$Q_y = [P_{Q_y}] \{\delta\}$$

$$Q_z = [P_{Q_z}] \{\gamma\}$$

Tabla 5-4 : Cálculo de las fuerzas internas en el elemento

5.5 Consideraciones adicionales

Una vez que se tienen las fuerzas internas evaluadas, se debe ahora calcular el residual de fuerzas como la diferencia entre el vector de fuerzas externas y el vector de fuerzas internas:

$$\mathbf{Residual} = \mathbf{F}_{EXT} - \mathbf{F}_{INT}$$

Este residual se debe comparar con el criterio de convergencia establecido, y en caso de no haber convergencia se calcula nuevamente la matriz de rigidez secante explicado en la sección 5.1, pero utilizando las variables internas de daño actualizadas de la última convergencia y se vuelve a hacer todo el procedimiento de las secciones 5.2, 5.3 y 5.4.

CAPÍTULO 6

VALIDACIONES

En este capítulo se muestran una serie de ejemplos y pruebas que ayudarán a comprobar el buen funcionamiento tanto del elemento viga como del modelo de material. Primero se presentan pruebas de validación para la viga elástica, a nivel elemento y a nivel sistema. Después se presenta una serie de pruebas con el modelo de filamentos con daño y se comparan los resultados de este trabajo con los obtenidos con un modelo anterior⁹ y con pruebas experimentales.

El modelo que se usa para comparación se llamará modelo 1. Este modelo también utiliza filamentos en la discretización del elemento, sin embargo la modelación del material lo hace de manera distinta, en donde la fractura ocurre cuando se alcanza un valor límite y a partir de ahí la degradación de la rigidez sigue una función arbitraria para la liberación del esfuerzo que no está ajustada por objetividad.

6.1 Validación de la viga elástica

6.1.1 Validación a nivel elemento – Prueba de la parcela

Para esta prueba se utiliza el ensamble de tres vigas que se muestra en la figura 6-1. Los datos para este ejemplo son:

$$E = 100 \quad I = 1.0$$



Figura 6-1 – Parcela de tres vigas

En esta prueba se evalúan tres aspectos importantes para la viga que son:

- Traslación lateral constante

En esta prueba se hacen las deflexiones de los nodos 1 y 4 igual a $v = 1.0$, y al resolver el problema, las deflexiones de los nodos 2 y 3 deben de ser exactamente

igual a 1.0 sin que se produzcan curvaturas o momentos. Los resultados obtenidos con esta viga cumplen con esta prueba, tanto para desplazamientos en dirección y como para desplazamientos en dirección z .

- Rotación constante

Las deflexiones y rotaciones de los nodos 1 y 4 se hacen $v_1 = 0.0$, $v_4 = 2.0$, $\theta_1 = \theta_4 = 1.0$, representando rotación pura. Las deflexiones de los nudos 2 y 3 deben ser iguales a su coordenada x , y los ángulos igual a 1.0. No debe haber curvatura ni momento resultantes. Los resultados para esta prueba fueron satisfactorios, ya que las deflexiones de los nodos 2 y 3 fueron 0.5 y 1.0 respectivamente (sus coordenadas en x), y las rotaciones fue de 1.00 para ambos nodos.

- Curvatura constante

Ahora se le introduce a este conjunto de vigas unos desplazamientos y rotaciones al nodo 4 para representar la curvatura constante. La deflexión que se debe dar es de $v_4 = 2.0$ y la rotación es $\theta_4 = 2.0$. Los resultados que se deben esperar es una curvatura constante en los nodos 2 y 3 igual a 1.0 y momentos flexionantes igual a 100. Estos resultados exactamente se obtuvieron con el elemento desarrollado en este trabajo.

6.1.2 Validación a nivel sistema

Para la validación a nivel sistema se hicieron tres ejemplos, uno de vigas continuas y dos de marcos planos. A continuación se muestran estos ejemplos.

6.1.2.1 Vigas continuas

En este ejemplo se presenta una viga continua con una carga distribuida en un elemento, una carga concentrada en otro, así como un momento flexionante concentrado en uno de los extremos. La figura 6-2 muestra la geometría y cargas para esta viga. Los datos son: $E = 210 \text{ kip/ft}^2$, $I = 0.0833 \text{ ft}^4$.



Figura 6-2 – Problema de vigas continuas

La malla utilizada para este problema fue de tres elementos, dos elementos para la viga 1-2, y uno para la viga 2-3. Los resultados son:

		1 elemento por viga				2 el. por viga		4 el. por viga	
	Analítico ²⁵	Campos ligados	error	Sin Campos ligados	error	Sin Campos ligados	error	Sin Campos ligados	error
θ_1	-15.95	-16.12	1.07%	-46.88	193.92%	-23.81	49.28%	-18.05	13.17%
θ_2	-22.38	-22.31	0.31%	39.43	276.18%	-68.78	207.33%	-18.45	17.56%
θ_3	88.57	88.4	0.19%	-19.68	122.22%	61.38	30.70%	81.65	7.81%

6.1.2.2 Marco plano

El siguiente ejemplo de validación consiste en un marco plano, como el que se muestra en la figura 6-3. La malla utilizada fue de un solo elemento por viga, y un solo elemento por columna, para sumar 6 elementos en total.

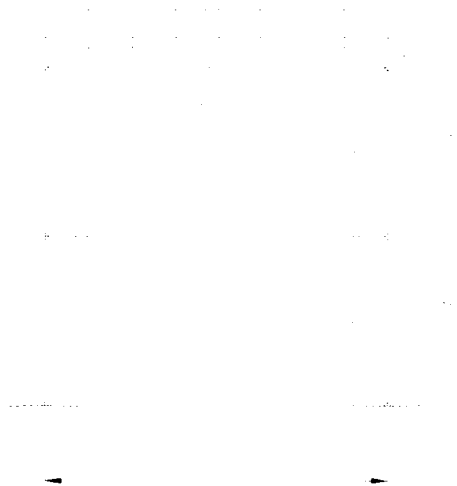


Figura 6-3 – Marco plano para la validación a nivel sistema de la viga

Los datos para este problema son: $EI = 857.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $P = 1000 \text{ kg/m}$, $L = 4\text{m}$. La solución es la siguiente:

		1 elemento por viga				8 elementos por viga	
	Analítica ²⁶	Con Campos ligados	error	Sin Campos ligados	error	Sin Campos ligados	Error
θ_3	1.5746	1.590	0.93%	0.122×10^{-15}	100%	1.561	0.9%

6.1.2.3 Marco plano con desplazamiento horizontal

En este ejemplo se prueba un marco plano que se le permite desplazamiento horizontal. La geometría, dimensiones y carga para el problema se muestran en la figura 6-4.

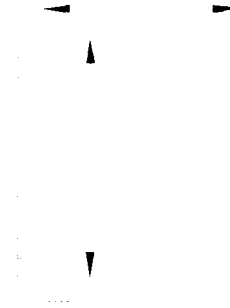


Figura 6-4 – Marco plano con desplazamiento horizontal

Los datos para este problema son: $EI_{col} = EI_{viga} = 17.4 \times 10^6$ ksi, $w = 1000$ kip/in, $\nu=0.208$. La malla utilizada es de un sólo elemento para la columna y un sólo elemento para la viga. La solución es la siguiente:

		1 elemento por viga				2 elementos por viga	
	Analítica ²⁷	Con Campos ligados	error	Sin Campos ligados	error	Sin Campos ligados	Error
Δ_{H1}	1.365"	1.364"	0.1%	1.198"	12.4%	1.322"	3.1%

Al comparar el porcentaje de error en los resultados usando y sin usar campos de desplazamiento ligados, se puede ver que la inclusión de esta forma de interpolación ayuda en gran medida a mejorar la precisión de los resultados del elemento, sin tener que refinar la malla.

6.2 Validación de la viga con modelo de material con daño

En los siguientes ejemplos se comparan los resultados obtenidos en este trabajo con los experimentales y con los resultados de un modelo anterior llamado modelo 1 (ver introducción del capítulo 6).

6.2.1 Viga reforzada L-6''

Esta validación consiste en una viga reforzada simplemente apoyada con dos cargas. La sección transversal es rectangular. Las dimensiones de la viga se muestran en la figura 6-5, y su modelación por elementos finitos se muestra en la figura 6-6. Las propiedades del material son las siguientes:

Concreto: $f_c = 4,470$ psi; $f_t = 550$ psi; $E_c = 3,500,000$ psi; $G_f = 0.570$ lb/in; $\nu = 0.15$

Acero: $f_y = 46,000$ psi; $E_s = 29,000,000$ psi



Figura 6-5 – Geometría y dimensiones de la viga L-6

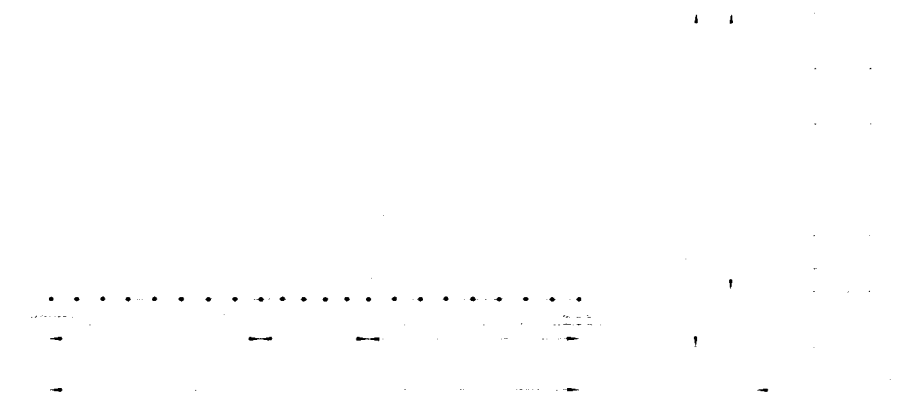


Figura 6-6 – Modelación con elementos finitos de la viga L-6

En la figura 6-7 se puede observar los excelentes resultados obtenidos con este modelo. Se puede ver que el modelo de daño describe mejor el agrietamiento que el modelo 1. Esto se

debe en gran medida a la objetividad que posee el modelo.

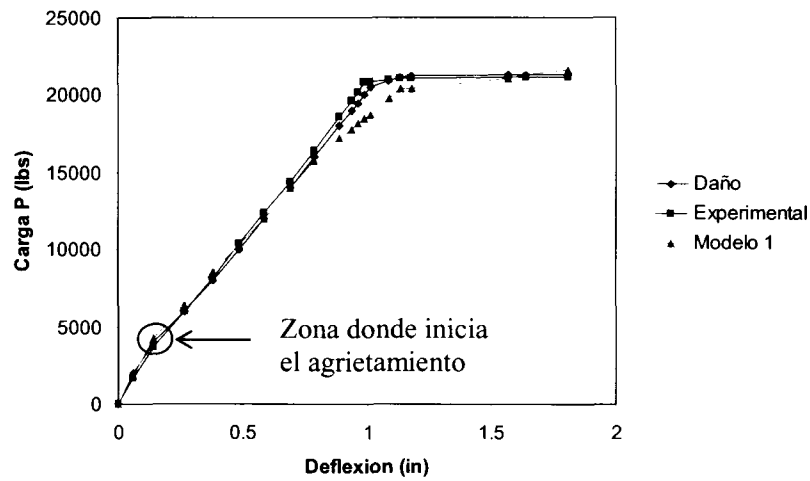


Figura 6-7 – Gráfica comparativa de los resultados obtenidos para la viga L-6

6.2.2 Viga reforzada J-4²⁹

En este ejemplo se modela una viga reforzada, con apoyos simples en sus extremos y una carga al centro del claro. Las dimensiones de esta viga se muestran en la figura 6-8. La modelación por elementos finitos se muestra en la figura 6-9. Las propiedades del material son las siguientes:

Concreto: $f_c = 4,820$ psi; $f_t = 546$ psi; $E_c = 3,800,000$ psi; $G_f = 0.570$ lb/in; $\nu = 0.15$

Acero: $f_y = 44,900$ psi; $E_s = 29,500,000$ psi

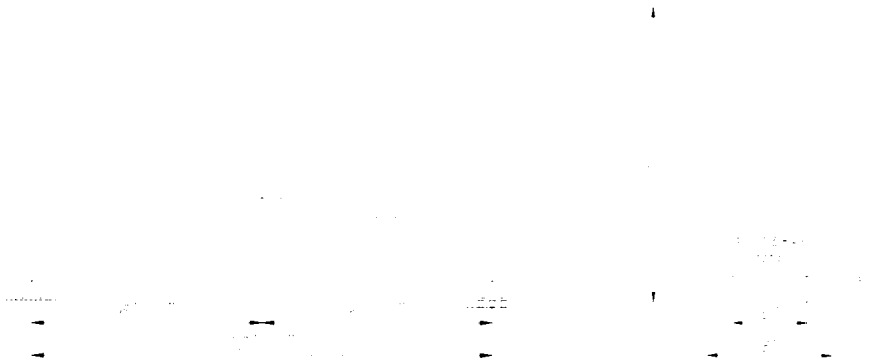


Figura 6-8 – Geometría y dimensiones de la viga J-4



Figura 6-9 – Modelación con elementos finitos de la viga J-4

En la figura 6-10 se puede observar cómo este modelo se aproxima mucho mejor a los resultados experimentales que el modelo 1. En esta figura se puede ver claramente que hay una mejor descripción del agrietamiento al igual que en el ejemplo anterior. Nótese el amplio espacio que hay entre la curva de Daño y la del Modelo 1. Cuando se alcanza la fluencia en el acero, el modelo de daño se aleja de la curva experimental, esto puede haber sucedido debido a que se tomó un módulo plástico del acero distinto al experimental, ya que se carece de este dato.

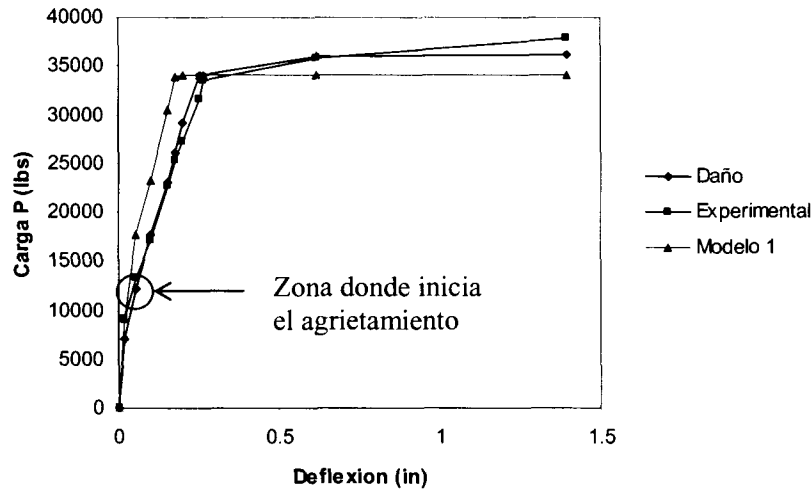


Figura 6-10 – Gráfica comparativa de los resultados obtenidos para la viga J-4

6.2.3 Viga reforzada de Rao³⁰

Ésta es una viga T, simplemente soportada y cargada en su centro, que fue probada por Rao en la Universidad de Liverpool. Las dimensiones de la viga se muestran en la figura 6-11. La modelación por elementos finitos se muestra en la figura 6-12. Las propiedades del material son:

Concreto: $f_c = 48.0 \text{ N/mm}^2$; $f_t = 4.8 \text{ N/mm}^2$; $E_c = 35 \text{ kN/mm}^2$; $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$; $\nu = 0.2$
 Acero: $f_y = 340 \text{ N/mm}^2$; $E_s = 200,000 \text{ N/mm}^2$

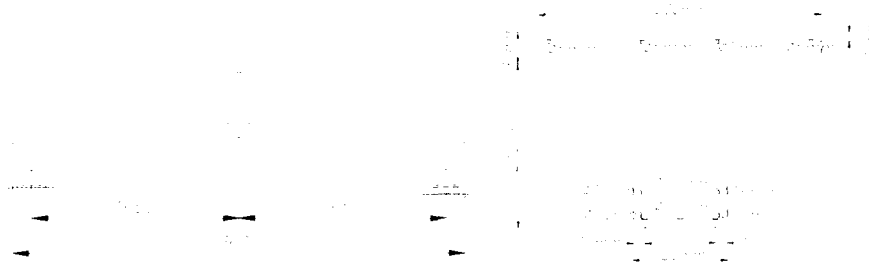


Figura 6-11 – Geometría y dimensiones de la viga Rao

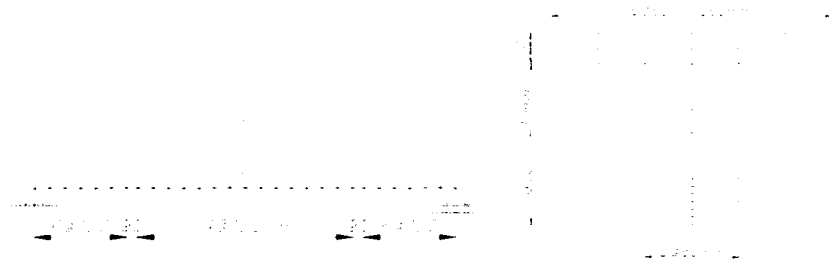


Figura 6-12 – Modelación con elementos finitos de la viga Rao

En la figura 6-13 se puede observar los resultados para esta viga. Otra vez podemos observar mejores resultados con este modelo. La teoría de daño junto con la objetividad de la formulación permite que se dé una mejor predicción del agrietamiento en el concreto. La diferencia que se observa entre la curva de daño y la experimental se da porque al inicio, en el primer cálculo del módulo de elasticidad secante, existe un ligero, casi imperceptible error, pero este error se va acarreado y se va abriendo a medida que aumenta la deformación. Además, en este problema se usa una sección T, por lo que la aproximación de las propiedades de la sección con filamentos puede perder precisión.

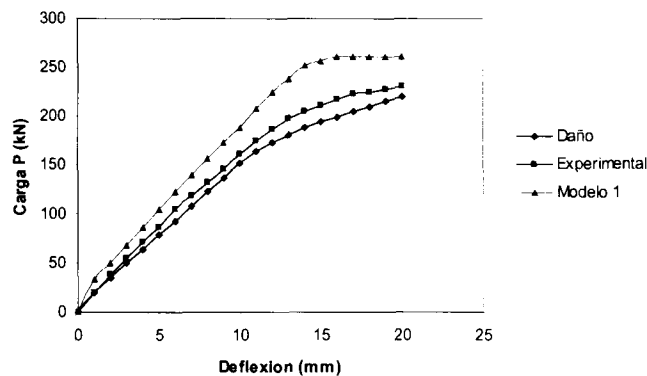


Figura 6-13 – Gráfica comparativa de los resultados obtenidos para la viga Rao

6.2.4 Viga reforzada de Wight

En esta viga se muestra el efecto de las cargas en el plano. Es una viga rectangular y en voladizo, con una carga axial constante y una carga transversal que va en aumento. En la figura 6-14 se muestran las dimensiones para esta viga. La modelación por elementos finitos se muestra en la figura 6-15. Las propiedades del material son:

Concreto: $f_c = 5,000$ psi; $f_t = 391$ psi; $E_c = 3,560,000$ psi; $G_f = 0.570$ lb/in; $\nu = 0.2$

Acero: $f_y = 72,000$ psi; $E_s = 29,000,000$ psi



Figura 6-14 – Geometría y dimensiones de la viga de Wight



Figura 6-15 – Modelación con elementos finitos de la viga de Wight

En este ejemplo, la falla ocurre tanto en la zona de tensión como en la de compresión. En la figura 6-16 se puede observar el inicio de la falla, y cómo se asemeja más a los resultados experimentales que el modelo 1.

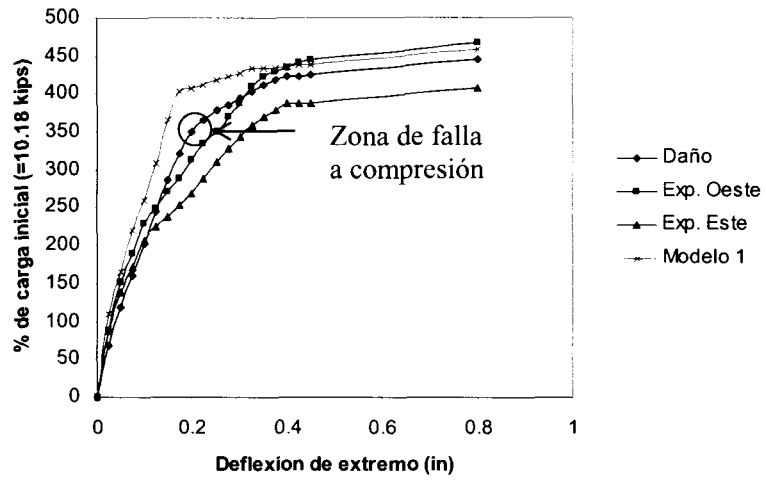


Figura 6-16 – Gráfica comparativa de los resultados obtenidos para la viga de Wight

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

Se ha presentado un modelo de filamentos para vigas de concreto reforzado, al que aplicándole la teoría de daño como modelo de material, predice de manera bastante precisa el comportamiento del concreto en su etapa inelástica, como puede observarse en los ejemplos de validación.

El elemento viga-columna se desarrolló con base en una formulación mixta donde los esfuerzos se aproximan independientemente de los desplazamientos, y los campos de desplazamiento están ligados a las rotaciones para ganar precisión en la estimación de esta cantidad. Esto genera muy buenos resultados, como se puede observar en las validaciones de la sección 6.1.2, donde el porcentaje de error utilizando los campos de desplazamiento ligados fue mucho menor al obtenido sin utilizar esta forma de interpolación. Cabe mencionar que durante el desarrollo del elemento, cuando se aplicaron los campos de desplazamiento ligados con las rotaciones, este efecto se desvanecía de la matriz de rigidez, sin embargo se mantenía en los vectores de fuerza, más específicamente en los vectores de fuerzas de los momentos flexionantes, con lo que se puede concluir que el efecto de los campos ligados se refleja como una carga externa extra, que a la hora de resolver las ecuaciones afectará a los desplazamientos, dándoles mayor precisión.

La discretización con filamentos permite el uso de relaciones en una dimensión sencillas para modelar la resistencia a la flexión y fuerzas axiales. No obstante, las fuerzas cortantes y momento torsor no pueden ser representados con el modelo de filamentos. Esto sin embargo no es una desventaja, ya que de todos modos estas fuerzas se calculan por medio del vector de coeficientes de la formulación mixta, lo que da también muy buenos resultados.

El modelo de daño está fundamentado en teorías que satisfacen la termodinámica de procesos irreversibles, lo que es una gran ventaja, ya que toda la descripción del daño se hace dentro del marco de la termodinámica y su Segunda Ley. La única calibración que se debe hacer es a través de la energía de fractura G_f , que es una propiedad del material y se puede obtener de pruebas experimentales.

La inclusión de la longitud característica, l^* , a la definición de la energía de disipación específica, le da a este modelo objetividad, lo que ayuda en gran medida a una mejor descripción del agrietamiento en el concreto. Esto se puede observar claramente en las pruebas de validación de la sección 6.2 con vigas reforzadas, en donde las gráficas comparativas muestran como este modelo se asemeja más a los resultados experimentales que el modelo anterior, el cual no tenía objetividad en la malla.

En las pruebas de validación de la sección 6.2, en las primeras tres pruebas la falla se da en tensión, donde se puede observar que la descripción del agrietamiento es bastante buena. Sin embargo, para la cuarta prueba de validación (la 6.2.4), la falla se da también en la zona de compresión. Aquí los resultados también son muy buenos y aunque sí se tuvieron mejores resultados que los modelos anteriores, no se pudo obtener una mejor forma de la curva como se hizo con las primeras tres pruebas. Esto sucede porque en este modelo la forma de la falla en compresión se formula igual que la falla en tensión sólo que afectado por una constante que sirve para escalarlo, y en la realidad, la falla en compresión sigue un patrón diferente en el concreto, donde la plasticidad juega un papel importante. Esto deja entrever que el modelo de daño a compresión aún puede mejorarse, pero hay que recalcar que se adoptó este modelo por su simplicidad, y que aún así, este modelo presenta muy buenos resultados.

Con este trabajo se puede constatar que uno puede obtener buenos resultados en los modelos de material, si la formulación se hace siempre dentro de un marco termodinámico y cumpliendo todas las condiciones que se le imponen. Las pruebas experimentales también son necesarias, pues habrá casos en que se deba proponer funciones para definir el comportamiento del material. El análisis con elementos finitos es sin duda necesario para estos problemas, y es de gran utilidad para poder adoptar modelos de elementos y materiales propuestos.

Recomendaciones

Para estudios futuros se recomienda, como ya se mencionó, utilizar un modelo mejor para el daño en compresión, pero procurando siempre la simplicidad en el algoritmo. Un modelo con plasticidad ayudaría en gran medida a obtener mejores resultados en el comportamiento del concreto bajo compresión.

Para el modelo del elemento viga se recomienda agregar una interface gráfica para el pre y postprocesamiento, para hacer más fácil la utilización de éste. Para ello existen programas computacionales como el GID de fácil empleo y muy versátil.

REFERENCIAS

- [1] D. Ngo, A.C. Scordelis, *Finite element analysis of reinforced concrete beams*, ACI Journal Vol. 64, No. 3, Marzo, (1967).
- [2] A.H. Nilson, *Finite element analysis of reinforced concrete*, Ph. D. dissertation, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, Marzo (1967).
- [3] H.A. Franklin, *Non linear analysis of reinforced concrete frames and panels*, Ph. D. dissertation, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of Berkeley, Marzo, (1970).
- [4] M.T. Suidan, W.C. Schnobrich, *Finite element analysis of reinforced concrete*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST10, Octubre, (1973).
- [5] Y. Sarnic, *Material nonlinear time dependent three dimensional finite element analysis for reinforced and prestressed concrete structures*, Ph. D. dissertation, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., (1975).
- [6] E.C.Y. Chan, *Nonlinear geometric analysis of reinforced concrete shells with edge beams*, Ph. D. thesis, University of California, Berkeley, (1983).
- [7] S.C. Gallegos, W.C. Schnobrich, *Effects of creep and shrinkage on the behavior of reinforced concrete gable roof hyperbolic-paraboloids*, Ph. D. thesis, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 543, University of Illinois at Urbana-Champaign, Noviembre, (1988).
- [8] J. Oliver, M. Cervera, S. Oller, J. Lubliner, *Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete*, Proceedings 2nd Int. conference on comp. aided analysis and design of concrete structures, Zell am See, Austria, pp 945-957, (1990).
- [9] J. L. Ortega, *Discretización de elementos vigas y columnas por medio de filamentos de comportamiento no lineal*, Tesis M.C., I.T.E.S.M., México, (1992).
- [10] M. Cervera, J. Oliver, R. Faria, *Seismic evaluation of concrete dams via continuum damage models*, Earthquakes Engineering and Structural Dynamics, Vol. 24, pp 1225-1245, (1995).
- [11] R. Faria, J. Oliver, M. Cervera, *A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures*, International Journal Solids Structures, Vol. 35, pp 1533-1558, (1998).
- [12] J. Oliver, *Modelado de la fisuración en estructuras de hormigón*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Publicación CIMNE No. 4, Marzo, (1990).
- [13] J.T. Oden, E.A. Ripperger, *Mechanics of Elastic Structures*, Mc Graw-Hill, 2nd edition, (1981)
- [14] O.C. Zienkiewicz, Z. Xu, L.F. Zeng, A. Samuelson, N. Wiberg, *Linked interpolation for Reissner Mindlin plate elements: Part I- A simple quadrilateral*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, pp 3043-3056, (1993).
- [15] W.B. Bickford, *Advanced mechanics of materials*, Addison Weley, (1998)
- [16] M. Morán, S.Gallegos, *Un elemento cascarón cuadrilateral estable*, II Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Guanajuato, México, enero, (2002)

- [17] J. Lemaitre, *Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 51, pp 31-49, (1985a).
- [18] J. Lemaitre, *How to use damage mechanics*, Nuclear Engineering and Design, Vol. 80, pp 233-245, (1984).
- [19] J.C. Simo, J.W. Ju, *Strain and Stress Based Continuum Damage Models – I. Formulation*, International Journal Solids Structures, Vol. 23, pp 821-840, (1987).
- [20] R. Faria, J. Oliver, *A rate dependent plastic-damage constitutive model for large scale computations in concrete structures*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Monograph No. 17, Barcelona, España, (1993).
- [21] J. Lubliner, *Plasticity Theory*, MacMillan, New York, (1990).
- [22] J. Lemaitre, *A continuous damage mechanics model for ductile fracture*, ASME Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 107, pp 83-89, (1985b).
- [23] J. Lubliner, *On the thermodynamics foundations of non-linear solid mechanics*, International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 7, pp 237-254, (1972).
- [24] J. Oliver, *A consistent characteristic length for smeared cracking model*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 218, pp 461-474, (1989).
- [25] H. West, *Analysis of Structures*, John Wiley and sons, 2da. edición, (1988)
- [26] T.Y. Yang, *Finite element structural analysis*, Prentice-Hall, (1986)
- [27] R.C. Hibbeler, *Análisis Estructural*, Prentice-Hall, 3era. edición, (1997)
- [28] A. Feldeman, C.P. Siess, *Effect of Moment-shear Ratio on Diagonal Tension Cracking and Strength in Shear of Reinforced Concrete Beams*, Structural Research Series, No. 107, University of Illinois, Urbana, Illinois, Junio, (1955).
- [29] N.A. Burns, C.P. Siess, *Load-deformation Characteristics of Beam-column Connection in Reinforced concrete*, Civil Engineering Studies, SRS No. 234, University of Illinois, Urbana, Illinois, Enero, (1962).
- [30] P.V. Rao, *Nonlinear Finite Element Analysis of Concrete Slab Structures*, Ph. D.thesis, University of Liverpool, Abril, (1976).
- [31] J.L. Chaboche, *Continuum damage mechanics: Part I – General concepts*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, pp 59-64, (1988).

