

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS  
SUPERIORES DE MONTERREY**  
CAMPUS MONTERREY  
ESCUELA DE INGENIERIA Y TECNOLOGIAS  
DE LA INFORMACION



**TECNOLÓGICO  
DE MONTERREY**

**DISEÑO E IMPLEMENTACION DE CONTROLADORES  
DMC CON MECANISMO DE ADAPTACION**

**TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA  
OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD  
EN AUTOMATIZACION**

**POR:**

**CARLOS ARTURO CEDEÑO RODRIGUEZ**

**MONTERREY, NUEVO LEON**

**DICIEMBRE 2011**

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS  
SUPERIORES DE MONTERREY**

**CAMPUS MONTERREY  
ESCUELA DE INGENIERIA Y TECNOLOGIAS  
DE LA INFORMACION**



**TECNOLÓGICO  
DE MONTERREY**

**DISEÑO E IMPLEMENTACION DE CONTROLADORES  
DMC CON MECANISMO DE ADAPTACION**

**TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA  
OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:**

**MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD  
EN AUTOMATIZACION**

**POR:**

**CARLOS ARTURO CEDEÑO RODRIGUEZ**

**MONTERREY, NUEVO LEON**

**DICIEMBRE 2011**

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES  
DE MONTERREY**

**CAMPUS MONTERREY**

**ESCUELA DE INGENIERÍA**

**Y TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN**



**TECNOLÓGICO  
DE MONTERREY®**

**DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE CONTROLADORES DMC CON MECANISMO DE  
ADAPTACIÓN**

**TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL**

**GRADO ACADÉMICO DE:**

**MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN AUTOMATIZACIÓN**

**POR:**

**CARLOS ARTURO CEDEÑO RODRÍGUEZ**

**MONTERREY, N.L.**

**DICIEMBRE 2011**





**DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE CONTROLADORES DMC CON  
MECANISMO DE ADAPTACIÓN**

POR:

CARLOS ARTURO CEDEÑO RODRÍGUEZ

**TESIS**

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL  
GRADO ACADÉMICO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN AUTOMATIZACIÓN

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS  
SUPERIORES DE MONTERREY

DICIEMBRE 2011



## **Dedicatorias**

A mis padres, Carlos y Valkyria, por haberme regalado la vida y educarme con ejemplo y amor; por haberme permitido, con sus esfuerzos, alcanzar esta meta.

A mi hermano, Juan Carlos, por su cariño y apoyo, por animarme durante todo este tiempo lejos de casa, por ser además de mi hermano mi mejor amigo.



## **Agradecimientos**

A Dios.

A mi asesor, el Dr. Antonio Favela Contreras, por su guía y consejo a lo largo del desarrollo de este trabajo de investigación.

A mis sinodales, Dr. José de Jesús Rodríguez y M.C. Angelo Raimondi, por sus observaciones y comentarios, en pro del enriquecimiento de este trabajo.

A Melisa, por sus consejos y comentarios en cuanto a la redacción de este trabajo, por su apoyo y cariño incondicional.

A mis compañeros de la maestría, en especial a Pedro y Martín, por su sincera amistad a lo largo de este tiempo.



## **Resumen**

Con este trabajo de tesis, presentado como requisito para la obtención del grado de Maestro en Ciencias con especialidad en Automatización, se logra una extensión adaptiva del controlador DMC (Dynamic Matrix Control) de manera que se mejore el desempeño de la acción de control en el caso de sistemas variantes en el tiempo.

En primera instancia se presentan los conceptos básicos involucrados en los controladores de modelo predictivo, en particular el controlador DMC, así como el desarrollo matemático que definen el algoritmo de control.

Posteriormente se presentan algunos métodos y consideraciones útiles para realizar una correcta identificación de sistemas en lazo cerrado y así definir las bases para el desarrollo del mecanismo de adaptación. Adicionalmente se propone un conjunto de reglas para lograr la correcta detección de la variación en los parámetros del sistema, que conjuntamente con los métodos y consideraciones presentados, definen un mecanismo de adaptación que opere conjuntamente con el controlador DMC.

Finalmente se presentan los resultados obtenidos de la implementación del controlador DMC con el mecanismo de adaptación propuesto, en simulaciones y en su aplicación a un proceso real. Los resultados obtenidos se comparan con un controlador PI y con el DMC estándar logrando mostrar cuantitativamente la mejora obtenida con la extensión propuesta.



# Índice General

Capítulo 1.....	1
1.1 INTRODUCCIÓN.....	2
1.2 OBJETIVOS.....	3
1.3 METODOLOGÍA.....	3
1.4 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS.....	4
Capítulo 2.....	5
2.1 CONTROL MPC (MODEL PREDICTIVE CONTROL).....	6
2.2 CARACTERÍSTICAS GENERALES.....	6
2.3 CONTROL DMC.....	8
2.4 DESARROLLO MATEMÁTICO.....	9
2.5 LEY DE CONTROL.....	15
2.6 ALGORITMO DMC.....	17
2.7 EXTENSIÓN PARA INCLUIR MODELOS DE PERTURBACIÓN.....	20
2.8 CONSIDERACIONES SOBRE LOS PARÁMETROS DE DISEÑO.....	23
Dimensión del horizonte de predicción.....	23
Dimensión del horizonte de control.....	24
Valor de $\lambda$ .....	24
Capítulo 3.....	26
3.1 NECESIDAD DE UN MECANISMO DE ADAPTACIÓN.....	27
3.2 EL PROBLEMA DE LA IDENTIFICACIÓN EN LAZO CERRADO.....	27
3.3 IDENTIFICACIÓN DIRECTA.....	29
3.4 EL ESTIMADOR DE MÍNIMOS CUADRADOS RECURSIVOS CON FACTOR DE OLVIDO.....	30
3.5 MÉTODOS PARA LA IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS VARIANTES EN EL TIEMPO.....	32
3.6 DEFINICIÓN DEL MECANISMO DE ADAPTACIÓN PARA EL CONTROLADOR DMC.....	34
Ley de conmutación para el estimador MCR.....	34
Generación del modelo de predicción.....	35
Actualización del modelo de predicción.....	35
3.7 ALGORITMOS INVOLUCRADOS EN EL DMC ADAPTIVO.....	38
Estimador MCR.....	38

Generación y Actualización del Modelo Predictivo.....	39
Controlador DMC con mecanismo de adaptación .....	41
Capítulo 4.....	43
4.1 Simulaciones .....	44
Valores utilizados para los parámetros del controlador DMC .....	45
Valores utilizados para los parámetros del controlador PI.....	45
Prueba #1: Comparación de DMC vs. PI ante cambios de referencia.....	46
Prueba #2: Comparación de DMC vs. PI ante perturbaciones .....	47
Prueba #3: Respuesta del DMC ante cambio del parámetro $b$ .....	48
Prueba #4: Respuesta del DMC con mecanismo de adaptación ante cambio del parámetro $b$ .	49
Comparación de desempeño entre el DMC y el DMC adaptivo ante cambios del parámetro $b$ .	51
Prueba #5: Respuesta del DMC ante cambio del parámetro $a$ .....	51
Prueba #6: Respuesta del DMC con mecanismo de adaptación ante cambio del parámetro $a$ .	52
Comparación de desempeño entre el DMC y el DMC adaptivo ante cambios del parámetro $a$ .	54
Comparación de desempeño entre el DMC adaptivo y un PI ante cambios del parámetro .....	54
4.2 Implementación del controlador en un proceso de laboratorio .....	57
Descripción del Proceso.....	57
Diseño del Controlador .....	57
Prueba # 1: DMC ante cambios de referencia.....	59
Prueba #2: DMC adaptivo ante cambios de referencia .....	60
Prueba #3: DMC ante cambio en condiciones de operación.....	62
Prueba #4: DMC adaptivo ante cambio en condiciones de operación .....	63
Prueba #5: DMC ante cambio repentino de condiciones de operación.....	65
Prueba #6: DMC adaptivo ante cambio repentino de condiciones de operación .....	65
Capítulo 5.....	68
5.1 Conclusiones .....	69
5.2 Trabajos Futuros.....	70
Bibliografía .....	71
Apéndice A.....	73
Apéndice B.....	75

## Lista de Tablas

Tabla 4.1 – Comparación de índices de desempeño del DMC vs. PID.....	47
Tabla 4.2 – Variaciones del parámetro $b$ .....	48
Tabla 4.3 – Valores reales y valores estimados por MCR .....	50
Tabla 4.4 – Indicadores de desempeño para el DMC.....	51
Tabla 4.5 – Indicadores de desempeño para el DMC adaptivo .....	51
Tabla 4.6 – Variaciones del parámetro $b$ .....	52
Tabla 4.7 – Valores reales y valores estimados por MCR .....	53
Tabla 4.8 – Indicadores de desempeño para el DMC.....	54
Tabla 4.9 – Indicadores de desempeño para el DMC adaptivo .....	54
Tabla 4.10 – Indicadores de desempeño para el DMC adaptivo .....	56
Tabla 4.11 – Indicadores de desempeño para el PID .....	56
Tabla 4.12 – Valores reales y valores estimados por MCR .....	56
Tabla 4.13 – Referencias utilizadas en la prueba #1 .....	59
Tabla 4.14 – Referencias utilizadas en la prueba #2 .....	60
Tabla 4.15 – Indicadores de desempeño para el DMC.....	61
Tabla 4.16 – Indicadores de desempeño para el DMC adaptivo.....	61
Tabla 4.17 – Indicadores de desempeño para el DMC.....	64
Tabla 4.18 – Indicadores de desempeño para el DMC adaptivo.....	64

## Lista de Figuras

Fig. 2.1 - Esquema interno del control MPC.....	7
Fig. 2.2 – Estrategia de control DMC .....	9
Fig. 2.3 - Diagrama de flujo para el control DMC.....	20
Fig. 3.1 – Estructura del controlador DMC estándar .....	37
Fig. 3.2 – Estructura del DMC con mecanismo de adaptación .....	37
Fig. 3.3 – Estructura del mecanismo de adaptación.....	38
Fig. 3.4 – Diagrama de Flujo MCR con factor de olvido y reinicio de covarianzas .....	39
Fig. 3.5 – Diagrama de Flujo de la Actualización del modelo predictivo.....	41
Fig. 3.6 – Diagrama de Flujo controlador DMC adaptivo .....	42
Fig. 4.1 – Respuesta del sistema al escalón unitario .....	44
Fig. 4.2 – DMC vs. PI ante cambios en referencia.....	46
Fig. 4.3 – DMC vs. PI ante perturbaciones .....	47
Fig. 4.4– DMC ante cambio de parámetros.....	48
Fig. 4.5 – DMC adaptivo ante cambio de parámetros.....	49
Fig. 4.6 – Evolución de los parámetros estimados de la planta.....	50
Fig. 4.7 – DMC ante cambio de parámetros.....	51
Fig. 4.8 – DMC adaptivo ante cambio de parámetros .....	52
Fig. 4.9 – Evolución de los parámetros estimados .....	53
Fig. 4.10 – DMC adaptivo vs. PI.....	55
Fig. 4.11 - Evolución de los parámetros estimados.....	55
Fig. 4.12 – Respuesta del sistema ante un escalón de 30%.....	58
Fig. 4.13 - Respuesta del sistema ante cambios en referencia.....	59
Fig. 4.14 - Respuesta del sistema ante cambios en referencia.....	60
Fig. 4.15 - Evolución de los Parámetros estimados .....	61
Fig. 4.16 - Respuesta ante cambio de condiciones de operación con DMC .....	62
Fig. 4.17 – Respuesta ante cambio de condiciones de operación con DMC adaptivo .....	63
Fig. 4.18 - Evolución de los parámetros estimados.....	63
Fig. 4.19 – Respuesta del DMC ante cambio repentino de operación .....	65
Fig. 4.20 – Respuesta del DMC adaptivo ante cambio repentino de operación.....	66
Fig. 4.21 – Evolución de los parámetros estimados .....	66
Fig. A.2.1 – Respuesta al escalón del sistema.....	76
Fig.A.2.2 – Respuesta del sistema en lazo cerrado .....	81

# Capítulo 1.

## Introducción

## 1.1 INTRODUCCIÓN

---

Los sistemas de control automático son parte integral de muchas áreas de las actividades humanas. Podemos encontrar controladores automáticos en sistemas tan comunes en nuestra vida cotidiana como una lavadora, un coche, un sistema de aire acondicionado, etc. En contraste podemos encontrar sistemas de control en sistemas mucho más complejos y sensitivos como pueden ser los sistemas de guiado de misiles, los sistemas de piloto automático de aeronaves, en bombas de infusión de medicamentos, etc.

Un sistema de control se puede definir como aquel que puede regular su comportamiento o el de otro sistema con la finalidad de lograr un comportamiento o respuesta predeterminados.

En el área del control automático de procesos, el controlador PID puede considerarse por mucho el más utilizado a nivel industrial [1]. Su éxito se puede atribuir a los siguientes factores:

- Presenta una formulación matemática sencilla.
- El ajuste de sus parámetros es relativamente sencillo, y existen diversos métodos para su cálculo y optimización.
- Existe amplia documentación sobre este y sus aplicaciones.

No obstante el controlador PID presenta limitaciones principalmente en sistemas con dinámicas complejas, comportamientos no lineales y tiempos muertos elevados, entre otras, con lo cual resulta contraproducente su implementación en este tipo de procesos.

Existen técnicas avanzadas de control que permiten controlar procesos con dinámicas complejas y que superan las deficiencias que presenta el controlador PID. Algunas de estas técnicas, desarrolladas a partir de la década de 1970, utilizan un modelo del proceso a controlar para predecir el comportamiento futuro del sistema y así tomar las acciones óptimas para llevar las variables del proceso hacia las referencias deseadas. Estas técnicas de control se conocen como control predictivo [2]. Este tipo de controladores permite controlar de manera más eficaz los sistemas que presentan dinámicas complejas al incluir el modelo dinámico del proceso en su estructura. Adicionalmente existen mecanismos que permiten modificar los parámetros del controlador en base a la identificación de un modelo de la planta. Los controladores que

modifican sus parámetros en base al modelo estimado del proceso se conocen como controladores adaptivo [3].

La combinación de las técnicas de control, predictivo y adaptivo, brinda la posibilidad de tener un control más robusto y preciso del proceso así como la capacidad de operar bajo distintas condiciones sin que sea necesaria la intervención del operador para reajustar el controlador.

Debido a la mejora que provee la sinergia del control predictivo y el control adaptivo se plantean los objetivos de este trabajo.

## **1.2 OBJETIVOS**

---

El presente trabajo tiene como objetivo principal, extender la aplicación de un controlador de Modelo Predictivo DMC (Dynamic Matrix Control) a sistemas con dinámicas variantes en el tiempo mediante la inclusión de un mecanismo de adaptación.

Los objetivos particulares son:

- Analizar el comportamiento del esquema de control DMC ante sistemas variantes e invariantes en el tiempo.
- Ampliar las capacidades del control DMC ante sistemas variantes en el tiempo, mediante la inclusión de un mecanismo de adaptación.
- Implementar el controlador DMC con mecanismo de adaptación propuesto.
- Validar el funcionamiento del controlador DMC con mecanismo de adaptación en simulación y en un proceso real.

## **1.3 METODOLOGÍA**

---

La metodología desarrollada para alcanzar los objetivos presentados se puede resumir en los siguientes puntos:

- Investigación Bibliográfica del control DMC.

- Desarrollo del marco teórico del control DMC y su formulación matemática.
- Desarrollo de un mecanismo de adaptación para el control DMC que brinde un mejor desempeño ante sistemas variantes en el tiempo.
- Implementación del algoritmo DMC con mecanismo de adaptación propuesto en Matlab y Simulink.
- Implementación del algoritmo DMC con mecanismo de adaptación propuesto en Labview para su aplicación a un proceso real.
- Análisis comparativo de desempeño del control DMC con y sin adaptación.

## 1.4 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

---

En el *Capítulo 2* se presenta el control predictivo basado en el modelo (MPC) específicamente el controlador DMC (Dynamic Matrix Control). Después de presentar el estado del arte de esta área se muestran los conceptos básicos del DMC, y finalmente su algoritmo de control.

En el *Capítulo 3* se argumenta acerca de la necesidad de añadir un mecanismo de adaptación que sea capaz de identificar las variaciones paramétricas en los sistemas variantes en el tiempo. Al mismo tiempo se muestran algunas técnicas y consideraciones relaciones con la identificación en lazo cerrado. Finalmente se presenta el Algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivos como núcleo del mecanismo de adaptación y se proponen reglas heurísticas para la detección de cambios de parámetros y actualización del modelo del proceso.

En el *Capítulo 4* se presentan simulaciones del DMC y del DMC adaptivo. Se realizan comparaciones contra el resultado obtenido al utilizar un PI. Adicionalmente se presenta implementación del controlador DMC y el mecanismo de adaptación y su aplicación a un proceso térmico de laboratorio. Se comparan los resultados obtenidos aplicando el controlador DMC básico y su versión extendida con el mecanismo de adaptación.

En el *Capítulo 5* se presentan las conclusiones derivadas de este trabajo y se proponen algunos trabajos futuros en base a esta investigación.

# **Capítulo 2.**

## **Control DMC**

**(Dynamic Matrix Control)**

## 2.1 CONTROL MPC (MODEL PREDICTIVE CONTROL)

---

El termino MPC, Control de Modelo Predictivo por sus siglas en inglés, agrupa a una familia de controladores que presentan de manera común un modelo del proceso para predecir su comportamiento y generar la manipulación buscando minimizar el error futuro en la salida del sistema, con esto podemos clasificar las técnicas de control MPC dentro de las áreas de Control Predictivo y Control Óptimo [4].

El origen del control MPC se remonta a los últimos años de la década de 1970 y principios de los 1980, cuando se publican algunos artículos que presentaban el enfoque de control de modelo predictivo. El primer trabajo donde se presenta un controlador MPC es publicado en el año 1978 por Richalet *et al.* donde exponen un controlador denominado MPHHC (Model Predictive Heuristic Controller) [5]. Seguidamente en 1980 Cutler y Ramaker publican un artículo donde proponen una nueva técnica de control definida como DMC (Dynamic Matrix Control) [6] y presentan su aplicación a un proceso de destilación de petróleo. Posteriormente se proponen el PCA (Predictive Control Algorithm) publicado por Peterka en 1984, el QDMC (Quadratic Dynamic Matrix Control) desarrollado por García y Morshedi [7], publicado en 1986 y el GPC (Generalized Predictive Control) por Clarke et al. en 1986 [8].

Trabajos más recientes introdujeron variantes de los enfoques mencionados incluyendo enfoques que utilizan modelos de espacio de estados [9] [10].

## 2.2 CARACTERÍSTICAS GENERALES

---

Los controladores agrupados bajo la familia MPC comparten la mayoría de los elementos relacionados al cálculo de la señal de control en excepción del modelo de predicción utilizado. De manera general la filosofía del control MPC se puede definir de acuerdo a los siguientes pasos:

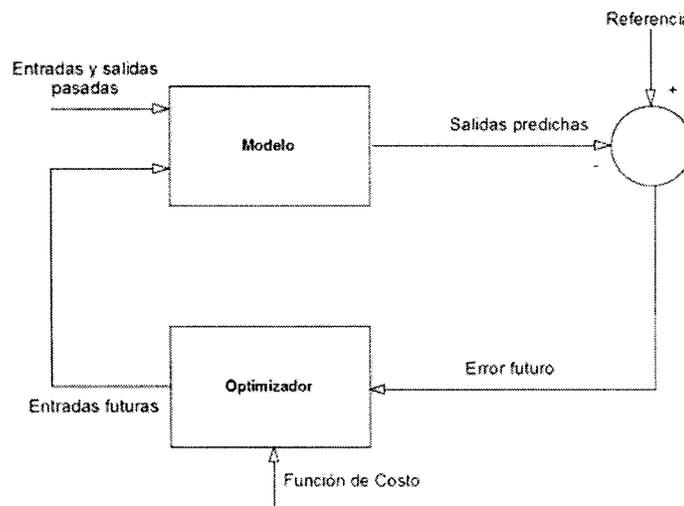
1. En cada intervalo de muestreo se predice la salida del proceso sobre un horizonte de predicción  $p$ , a lo largo del cual se estima la salida futura del sistema. Estos valores se estiman en base a las entradas pasadas y futuras y al estado del sistema.

2. Se calculan las señales de control futuras minimizando una función de costo propuesta (generalmente definida en base al error cuadrático) para minimizar la norma del error de seguimiento.
3. Se aplica el primer elemento de la secuencia de control calculada, los otros se desechan. Esto se aplica en base al principio del horizonte de retroceso definido en [10]. En el nuevo intervalo de muestreo, habrá nueva información y por tanto podemos calcular de manera más precisa la señal de control necesaria para llevar al sistema al nivel de referencia.

Algunas de las ventajas de los controladores MPC son [11]:

- Posee intrínsecamente compensación para tiempos muertos.
- Introduce de manera natural el concepto de control ante alimentado para compensar las acciones de perturbaciones medibles.
- El caso multivariable es sencillo de implementar.
- Es particularmente atractivo para personal con conocimiento limitado de control .
- Se tiene la oportunidad de manejar referencias futuras (Aplicaciones en robótica y procesos ejecutados por lotes).

La estructura interna de un controlador MPC está definida en el diagrama mostrado en la figura 2.1



**Fig. 2.1 - Esquema interno del control MPC**

## 2.3 CONTROL DMC

---

El control DMC, Control de Matriz Dinámica de sus siglas en inglés, es una de las variantes del control MPC. Fue propuesto por Cuttler y Ramaker en 1979 [6], con vista a su aplicación en procesos de refinación de petróleo.

El DMC debe su nombre a la utilización de una matriz que modela el comportamiento dinámico del proceso y está conformada con los valores obtenidos a partir de la respuesta al escalón del sistema.

Algunos conceptos clave en el control DMC son:

Horizonte de Predicción (p): Es el horizonte de tiempo, de dimensión fija, sobre el cual se realiza la predicción de la salida del sistema.

Horizonte de Control (m): Es el horizonte de tiempo, de dimensión fija, sobre el cual se calcula la secuencia de control que minimice en error cuadrático futuro.

Horizonte de modelo (N): Es el horizonte de tiempo definido por el tiempo discreto de estabilización del sistema

Factor de Penalización ( $\lambda$ ): Constante positiva involucrada en la penalización de los movimientos de la señal de manipulación, dentro de la función de costo a minimizar en el controlador.

Podríamos definir gráficamente la estrategia de control DMC, y en general MPC, mediante la figura 2.2.

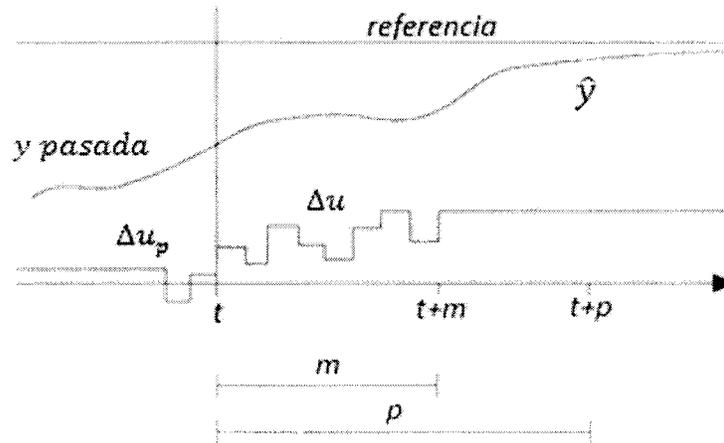


Fig. 2.2 – Estrategia de control DMC

El Horizonte de Predicción, Horizonte de Control y Factor de Penalización resultan parámetros de ajuste del controlador, en el apéndice A se muestra un método presentado en [12] para la sintonía de estos parámetros.

## 2.4 DESARROLLO MATEMÁTICO

---

El modelo de predicción utilizado en el DMC está basado en la respuesta al escalón del sistema a controlar como se ha mencionado anteriormente. El desarrollo presentado a continuación se basa en las ecuaciones presentadas en [11].

El modelo de la respuesta escalón se puede expresar como:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) \quad (2.1.1)$$

A partir de este modelo se pueden generar predicciones de la salida a partir de (2.1.2)

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i) + \hat{\eta}(t+k|t) \quad (2.1.2)$$

Donde el elemento  $\hat{\eta}$ , es el error de predicción y para este desarrollo matemático se considera constante para simplificar el análisis, matemáticamente podemos expresar esta asunción como:

$$\hat{\eta}(t + k | t) = \hat{\eta}(t | t) = y_m(t) - \hat{y}(t) \quad (2.1.3)$$

$$\hat{y}(t + k | t) = \sum_{i=1}^k g_i \Delta u(t + k - i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t + k - i) + \hat{\eta}(t + k | t) \quad (2.1.4)$$

Queda definida en (2.14) la salida estimada del sistema a partir de las entradas pasadas, las entradas futuras y un error de predicción.  $y_m(t)$  se define como la salida medida del sistema en un instante  $t$ , y  $\hat{y}(t)$  como la salida predicha del sistema para el mismo instante  $t$ .

Para llegar a una respuesta condensada, se desarrollan por separado los últimos dos términos de (2.1.4):

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t + k - i) + \hat{\eta}(t + k | t) = f(t + k) \quad (2.1.5)$$

Introduciendo  $f(t + k)$  como la respuesta libre del sistema, es decir la salida estimada del sistema debido a las entradas pasadas. Reemplazando (2.1.3) en (2.1.5) se obtiene:

$$f(t + k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t + k - i) + y_m(t) - \hat{y}(t)$$

$$f(t + k) = y_m(t) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t + k - i) - \hat{y}(t) \quad (2.1.6)$$

Sustituyendo (2.1.1) en (2.1.6):

$$f(t + k) = y_m(t) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t + k - i) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t - i) \quad (2.1.7)$$

Se puede observar que el índice  $i$ , para ambas sumatorias difiere, por lo que se realiza un ajuste del índice en la primera sumatoria para simplificar el análisis, de esta manera el segundo termino de (2.1.7) queda definido como:

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_{k+i} \Delta u(t-i)$$

Se reescribe (2.1.7) como

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^{\infty} g_{k+i} \Delta u(t-i) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) \quad (2.1.8)$$

Factorizando (2.1.8) obtenemos la siguiente expresión:

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (g_{k+i} - g_i) \Delta u(t-i) \quad (2.1.9)$$

Para sistemas asintóticamente estables se puede asumir que:

$$g_{k+i} - g_i = 0 \quad ; \quad i > N$$

Donde  $N$  es el tiempo discreto de estabilización del sistema. Bajo esta asunción podemos redefinir la sumatoria presente en (2.1.9) truncando así la respuesta cuando alcanza  $N$ .

La respuesta libre del sistema se puede definir finalmente como:

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^N (g_{k+i} - g_i) \Delta u(t-i) \quad (2.2.1)$$

La ecuación (2.2.1) es el resultado del desarrollo de los dos últimos términos de (2.1.4), con lo que podemos reescribir esta última como:

$$\hat{y}(t+k | t) = \sum_{i=1}^k g_i \Delta u(t+k-i) + f(t+k) \quad (2.2.2)$$

Introduciendo el concepto de horizonte de predicción ( $p$ ), donde se realiza la estimación de la salida del sistema de un instante  $(t+1|t)$  hasta  $(t+p|t)$ , se obtiene de (2.2.2):

$$\hat{y}(t+1|t) = g_1 \Delta u(t+0) + f(t+1)$$

$$\hat{y}(t+2|t) = g_1\Delta u(t+1) + g_2\Delta u(t+0) + f(t+2)$$

$$\hat{y}(t+3|t) = g_1\Delta u(t+2) + g_2\Delta u(t+1) + g_3\Delta u(t+0) + f(t+3)$$

⋮

$$\hat{y}(t+p|t) = g_1\Delta u(t+p-1) + g_2\Delta u(t+p-2) + \dots + g_p\Delta u(t+0) + f(t+p)$$

Podemos entonces expresar (2.2.2) de manera vectorial como:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.2.3)$$

Donde (2.2.3) genera:

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1|t) \\ \hat{y}(t+2|t) \\ \hat{y}(t+3|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+p|t) \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

$$\Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(t+0) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \\ \vdots \\ \Delta u(t+p-1) \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_3 & g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_p & g_{p-1} & g_{p-2} & \dots & g_1 \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(t+1) \\ f(t+2) \\ f(t+3) \\ \vdots \\ f(t+p) \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

Este desarrollo no involucra la restricción del horizonte de control ( $m$ ), que afecta directamente las dimensiones de (2.2.5) y (2.2.6). Incluyendo la restricción del horizonte de control, La nueva  $\Delta \mathbf{u}$  se define como:

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(t+0) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \\ \vdots \\ \Delta u(t+m-1) \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

Se asume que  $\Delta u(t+k) = 0$  para  $0 > k > m$ , esto es que se realiza el cálculo de los cambios en la manipulación dentro del horizonte  $m$ , y a partir de este permanece constante.

Bajo esta nueva consideración, al desarrollar (2.2.1) para  $k = 1, 2, 3, \dots, m \dots p$  se obtendría:

$$\hat{y}(t+1|t) = g_1 \Delta u(t+0) + f(t+1)$$

$$\hat{y}(t+2|t) = g_1 \Delta u(t+1) + g_2 \Delta u(t+0) + f(t+2)$$

$$\hat{y}(t+3|t) = g_1 \Delta u(t+2) + g_2 \Delta u(t+1) + g_3 \Delta u(t+0) + f(t+3)$$

⋮

$$\hat{y}(t+m|t) = g_1 \Delta u(t+m-1) + g_2 \Delta u(t+m-2) + \dots + g_m \Delta u(t+0) + f(t+m)$$

$$\hat{y}(t+m+1|t) = g_1 \Delta u(t+m) + g_2 \Delta u(t+m-1) + \dots + g_{m+1} \Delta u(t+0) + f(t+m+1)$$

⋮

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+p|t) = & g_1 \Delta u(t+p-1) + g_2 \Delta u(t+p-2) + \dots + g_{p-m+1} \Delta u(t+m-1) + \dots \\ & + g_p \Delta u(t+0) + f(t+p) \end{aligned}$$

Se puede ver que a partir de  $k > m$  se generan términos nulos bajo la consideración

$\Delta u(t + k) = 0$ , para  $0 > k > m$  y por tanto se puede redefinir (2.2.6) de la siguiente manera:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_3 & g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m & g_{m-1} & g_{m-2} & \dots & g_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_p & g_{p-1} & g_{p-2} & \dots & g_{p-m+1} \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

**Definición vectorial para el cálculo de  $f(t + k)$**

Desarrollando (2.2.1) para  $k = 1, 2, \dots, p$  se obtiene:

$$f(t + 1) = (g_2 - g_1)\Delta u(t - 1) + (g_3 - g_2)\Delta u(t - 2) + \dots + (g_{N+1} - g_N)\Delta u(t - N) + y_m(t)$$

$$f(t + 2) = (g_3 - g_1)\Delta u(t - 1) + (g_4 - g_2)\Delta u(t - 2) + \dots + (g_{N+2} - g_N)\Delta u(t - N) + y_m(t)$$

⋮

$$f(t + p) = (g_{p+1} - g_1)\Delta u(t - 1) + (g_{p+2} - g_2)\Delta u(t - 2) + \dots + (g_{N+p} - g_N)\Delta u(t - N) + y_m(t)$$

Se puede definir (2.2.1) de manera vectorial como:

$$\mathbf{f} = \mathbf{H}\Delta\mathbf{u}_p + \mathbf{y}_m \quad (2.3.0)$$

Donde tenemos que:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} (g_2 - g_1) & (g_3 - g_2) & \dots & (g_{N+1} - g_N) \\ (g_3 - g_1) & (g_4 - g_2) & \dots & (g_{N+2} - g_N) \\ (g_4 - g_1) & (g_5 - g_2) & \dots & (g_{N+3} - g_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_{p+1} - g_1) & (g_{p+2} - g_2) & \dots & (g_{N+p} - g_N) \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

$$\Delta \mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \Delta u(t-1) \\ \Delta u(t-2) \\ \Delta u(t-3) \\ \vdots \\ \Delta u(t-N) \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

En (2.3.0) se asume  $y_m$  constante durante el horizonte de predicción  $p$ , por lo que se expresa como un vector de dimensiones  $p \times 1$

$$\mathbf{y}_m = [y_m(t) \quad y_m(t) \quad \dots \quad y_m(t)]^T \quad (2.3.3)$$

## 2.5 LEY DE CONTROL

---

La ley de control se define a partir de la minimización de una función de costo a partir de las acciones de control futuras, la cual está formada por la sumatoria de los cuadrados del error a lo largo del horizonte de predicción ( $p$ ) y la sumatoria de los cuadrados de las acciones de control sobre el horizonte de control ( $m$ ) [11].

Esta función de costo se define como:

$$J = \sum_{j=1}^p [\hat{y}(t+j|t) - r(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^m \lambda [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (2.3.4)$$

Donde  $\lambda$  es un factor de penalización para la variable  $\Delta u$  al minimizar  $J$ .

Para obtener la ley de control minimizamos  $J$ :

$$J = \hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}^T + \lambda\Delta\mathbf{u}\Delta\mathbf{u}^T \quad (2.3.5)$$

Donde definimos el error como:

$$\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}$$

A partir de esta definición del error y de (2.2.3) se reescribe (2.3.5):

$$J = [\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{r}][\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{r}]^T + \lambda\Delta\mathbf{u}^2 \quad (2.3.6)$$

Minimizando  $J$  en base a  $\Delta u$ :

$$\frac{dJ}{d\Delta\mathbf{u}} = 0$$

$$(\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{r})\mathbf{G}^T + (\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{r})^T\mathbf{G}^T + 2\lambda\Delta\mathbf{u} = 0$$

$$2\mathbf{G}^T\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + 2\mathbf{G}^T\mathbf{f} - 2\mathbf{G}^T\mathbf{r} + 2\lambda\Delta\mathbf{u} = 0$$

$$2\mathbf{G}^T(\mathbf{f} - \mathbf{r}) = -2\lambda\Delta\mathbf{u} - 2\mathbf{G}^T\mathbf{G}\Delta\mathbf{u}$$

$$\mathbf{G}^T(\mathbf{r} - \mathbf{f}) = \Delta\mathbf{u}(\lambda + \mathbf{G}^T\mathbf{G})$$

$$\Delta\mathbf{u} = (\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{G}^T(\mathbf{r} - \mathbf{f}) \quad (2.3.7)$$

Donde podemos definir  $\mathbf{E} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T$  siendo esta una matriz de ganancias.

El cálculo de  $\Delta u$ , da como resultado un vector de los cambios de la señal de control a implementar sobre el horizonte de control  $m$ . Solo se aplica el primer elemento de este vector por lo que la se puede escribir el cambio en la señal de control a aplicar al proceso como:

$$\Delta u = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{f}) \quad (2.3.8)$$

## 2.6 ALGORITMO DMC

---

En resumen, los elementos y ecuaciones involucrados en el algoritmo DMC son:

$$\mathbf{g} = [g_1 \ g_2 \ g_3 \ \dots \ g_{N+p}]^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_3 & g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m & g_{m-1} & g_{m-2} & \dots & g_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_p & g_{p-1} & g_{p-2} & \dots & g_{p-m+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} (g_2 - g_1) & (g_3 - g_2) & \dots & (g_{N+1} - g_N) \\ (g_3 - g_1) & (g_4 - g_2) & \dots & (g_{N+2} - g_N) \\ (g_4 - g_1) & (g_5 - g_2) & \dots & (g_{N+3} - g_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_{p+1} - g_1) & (g_{p+2} - g_2) & \dots & (g_{N+p} - g_N) \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \Delta u(t-1) \\ \Delta u(t-2) \\ \Delta u(t-3) \\ \vdots \\ \Delta u(t-N) \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(t+0) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \\ \vdots \\ \Delta u(t+m-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{H}\Delta \mathbf{u}_p + \mathbf{y}_m$$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T$$

$$\Delta u = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{f}) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{H}\Delta \mathbf{u}_p - \mathbf{y}_m)$$

Dónde:

$p$  Horizonte de predicción

$m$  Horizonte de control

$N$  Tiempo de estabilización del sistema

$\lambda$  Factor de supresión de movimientos de control (Penaliza los movimientos de control en la función de costo)

$\mathbf{g}$  Vector formado de los coeficientes obtenidos de la respuesta escalón

$\mathbf{G}$  Matriz dinámica del sistema

$\mathbf{H}$  Matriz de cálculo para la respuesta libre del sistema  $f$

<b>r</b>	Vector de referencia
<b>f</b>	Respuesta libre del sistema
<b>E</b>	Matriz de ganancias del DMC
$\Delta u$	Incremento en la señal de control
$\Delta \mathbf{u}_p$	Vector de cambios pasados en la señal de control
$\mathbf{y}_m$	Salida de la planta

Finalmente los pasos para obtener la señal de control en el DMC son los siguientes:

1. Obtener **g**
2. Seleccionar  $p, m, N$  y  $\lambda$
3. Generar **G**
4. Generar **H**
5. Calcular **E**
6. Obtener  $y_m$
7. Obtener **r**
8. Obtener  $\Delta \mathbf{u}_p$
9. Calcular **f**
10. Calcular  $\Delta u$
11. Aplicar  $\Delta u$
12. Iterar desde paso #6

En el apéndice B, se presenta un ejemplo de la aplicación del algoritmo de control DMC.

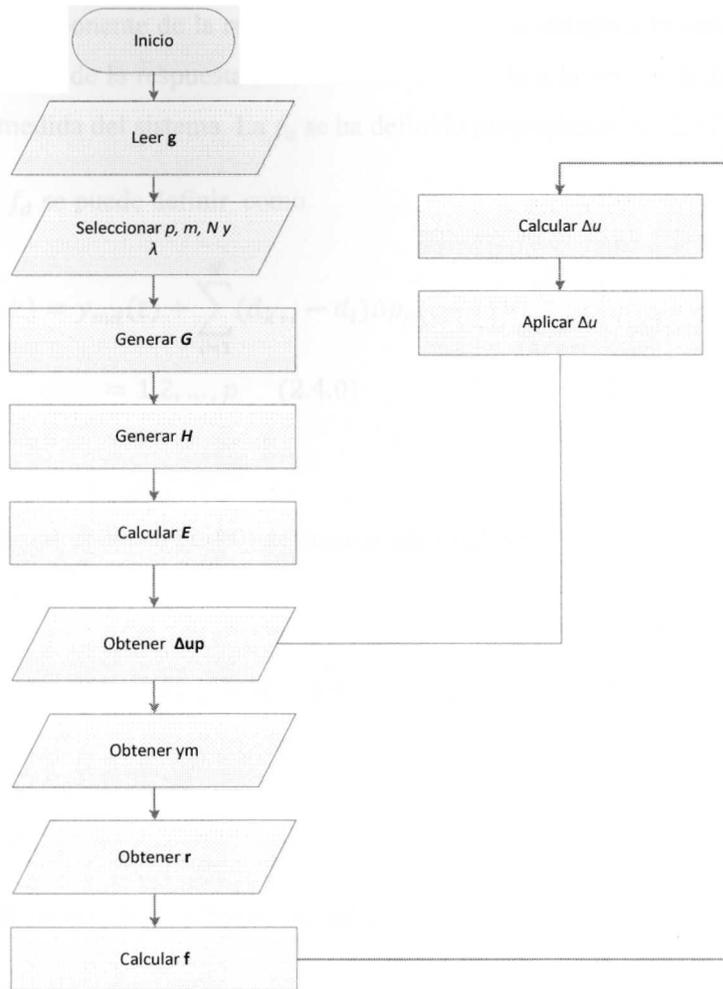


Fig. 2.3 - Diagrama de flujo para el control DMC

## 2.7 EXTENSIÓN PARA INCLUIR MODELOS DE PERTURBACIÓN

Es posible incluir en el DMC modelos de las perturbaciones medibles, basados igualmente en modelos de respuesta al escalón, para lograr un mejor rechazo ante estas. Para esto es necesario redefinir la respuesta libre del sistema,  $f$ , como:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_u + \mathbf{f}_d + y_m \quad (2.3.9)$$

Donde  $f_u$  es la componente de la respuesta libre del sistema debido a la variable de control, y  $f_d$  es la componente de la respuesta libre del sistema debido a la acción de la perturbación. La  $y_m$  es la salida medida del sistema. La  $f_u$  se ha definido previamente en (2.3.0).

La componente  $f_d$  se puede definir como

$$\begin{aligned} f_d(t+k) &= y_{md}(t) + \sum_{i=1}^N (d_{k+i} - d_i) \Delta p_p(t-i) + \sum_{i=1}^k d_i \Delta p(t+k-i) \quad ; k \\ &= 1, 2, \dots, p \quad (2.4.0) \end{aligned}$$

Finalmente podemos expresar (2.4.0) de manera vectorial como:

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{D}\Delta\mathbf{p} + \mathbf{L}\Delta\mathbf{p}_p + \mathbf{y}_{md} \quad (2.4.1)$$

Dónde:

**D** Matriz dinámica del modelo de perturbación

**L** Matriz de cálculo para  $f_d$

**$\Delta\mathbf{p}$**  Vector de cambios presente y futuros en la entrada del modelo de perturbación

**$\Delta\mathbf{p}_p$**  Vector de cambios pasados en la entrada del modelo de perturbación

$y_{md}$  Salida del sistema debido a la perturbación

Los elementos  $d_i$  son aquellos que forman parte del vector obtenido de la respuesta al escalón del modelo de perturbación definido como:

$$\mathbf{d} = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad \dots \quad d_{N+p}]^T$$

Adicionalmente tenemos la definición de los elementos de (2.4.1) como:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} (d_2 - d_1) & (d_3 - d_2) & \dots & (d_{N+1} - d_N) \\ (d_3 - d_1) & (d_4 - d_2) & \dots & (d_{N+2} - d_N) \\ (d_4 - d_1) & (d_5 - d_2) & \dots & (d_{N+3} - d_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (d_{p+1} - d_1) & (d_{p+2} - d_2) & \dots & (d_{N+p} - d_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 & \dots & 0 \\ d_3 & d_2 & d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_m & d_{m-1} & d_{m-2} & \dots & d_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_p & d_{p-1} & d_{p-2} & \dots & d_{p-m+1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \Delta p(t+0) \\ \Delta p(t+1) \\ \Delta p(t+2) \\ \vdots \\ \Delta p(t+m-1) \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{p}_p = \begin{bmatrix} \Delta p(t-1) \\ \Delta p(t-2) \\ \Delta p(t-3) \\ \vdots \\ \Delta p(t-N) \end{bmatrix}$$

$$\Delta u = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{f}) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_p - \mathbf{D} \Delta \mathbf{p} - \mathbf{L} \Delta \mathbf{p}_p - \mathbf{y}_m)$$

## 2.8 CONSIDERACIONES SOBRE LOS PARÁMETROS DE DISEÑO

---

Resulta importante analizar el efecto que tienen los parámetros de diseño sobre el comportamiento del controlador. La correcta selección de estos parámetros nos permite obtener una respuesta que vaya acorde a nuestras necesidades. A continuación se analizan el efecto que tienen las dimensiones del horizonte de predicción y el horizonte de control, así como el valor del factor de penalización ( $\lambda$ ) sobre las acciones de control y por consiguiente la respuesta del sistema en lazo cerrado.

### Dimensión del horizonte de predicción

El horizonte de predicción afecta directamente las dimensiones de las matrices  $G$  y  $H$ .

Recordando la definición de estos dos elementos tenemos:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_3 & g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m & g_{m-1} & g_{m-2} & \dots & g_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_p & g_{p-1} & g_{p-2} & \dots & g_{p-m+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} (g_2 - g_1) & (g_3 - g_2) & \dots & (g_{N+1} - g_N) \\ (g_3 - g_1) & (g_4 - g_2) & \dots & (g_{N+2} - g_N) \\ (g_4 - g_1) & (g_5 - g_2) & \dots & (g_{N+3} - g_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_{p+1} - g_1) & (g_{p+2} - g_2) & \dots & (g_{N+p} - g_N) \end{bmatrix}$$

Ambas matrices se utilizan para realizar la predicción de la salida del sistema a partir de las manipulaciones pasadas y futuras. Tanto  $\mathbf{G}$  como  $\mathbf{H}$  están conformadas por el vector  $\mathbf{g}$  el cual incluye los elementos obtenidos de la respuesta al escalón del sistema.

Podemos notar que al elegir una  $p$  menor que el tiempo discreto de estabilización,  $N$ , estaríamos obviando parte del comportamiento dinámico del sistema dentro de las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$ . Para lograr incluir la dinámica total del sistema resulta necesario utilizar un horizonte de predicción de al menos el valor del tiempo de estabilización del sistema,  $N$ . De seleccionar un horizonte de predicción de menor dimensión que el tiempo de estabilización en lazo abierto del sistema podríamos obtener desempeño pobre y obviar alguna componente dinámica importante [4].

### **Dimensión del horizonte de control**

El horizonte de control define la dimensión del vector  $\Delta \mathbf{u}$  con el cual se busca la minimización de la función de costo (2.3.4). Podemos ver que utilizar valores pequeños en el horizonte de control brinda pocos movimientos para minimizar el error cuadrático, lo que resultara en cambios menos agresivos en la señal de control. Por otra parte utilizar valores altos para el horizonte de control brinda más movimientos de control, más grados de libertad, sobre los cuales podemos minimizar el error cuadrático y por consiguiente mayor libertad en la acción de control, esto deriva cambios más agresivos en la señal de control.

### **Valor de $\lambda$**

El valor del factor de penalización,  $\lambda$ , afecta directamente el cálculo de la manipulación, el cual se deriva de la minimización de la función de costo (2.3.4).

La minimización de esta función se busca en base a los valores de  $\Delta \mathbf{u}$ , que es el elemento sobre el cual se tiene control en esta expresión. Podemos notar entonces que al aumentar  $\lambda$  se penalizara  $\Delta \mathbf{u}$ , dándole mayor ponderación en la función de costo. Esto genera que a mayor  $\lambda$  los valores de  $\Delta \mathbf{u}$  disminuyan para así lograr minimizar  $J$ . En contraparte al disminuir el valor de  $\lambda$  se dará menor ponderación al elemento  $\Delta \mathbf{u}$  y por tanto será posible tener valores de  $\Delta \mathbf{u}$  mayores que para el primer caso.

Bajo las dos consideraciones previas podemos concluir que el efecto de  $\lambda$  afecta directamente la agresividad del controlador. Para lograr un control más agresivo debemos disminuir el valor de  $\lambda$  mientras que para un controlador más conservador debemos aumentar el valor de  $\lambda$ .

# **Capítulo 3.**

## **Control DMC con Mecanismo de Adaptación**

### **3.1 NECESIDAD DE UN MECANISMO DE ADAPTACIÓN**

---

Como se ha presentado en el apartado 2.1, el DMC, como parte de los algoritmos de control predictivo, incorpora en su estructura un modelo que se utiliza para predecir el comportamiento futuro del sistema. Como se ha presentado en el apartado 2.5, la señal de control es calculada en base a la minimización de la norma del error futuro, el cual es definido como la diferencia entre la referencia,  $r$ , y la salida estimada, en base al modelo de predicción,  $\hat{y}$ . Es así que la precisión del modelo de predicción, afecta directamente la señal de control aplicada al sistema y por consiguiente la manera en la que este es llevado a su estado estable.

El modelo de predicción utilizado por el DMC es un modelo lineal invariante en el tiempo. Este modelo es generado a partir de la respuesta al escalón unitario del sistema como se ha presentado en la sección 2.4. Se puede decir que la estructura de predicción del controlador DMC es estática.

La realidad es que muchos de los sistemas físicos a controlar poseen dinámicas variantes en el tiempo. Al aplicar el controlador DMC a este tipo de sistemas, el modelo predictivo perdería precisión al estimar la salida del proceso debido a su incapacidad de representar las dinámicas variantes, y en consecuencia la eficacia del controlador se vería disminuida.

Es entonces cuando surge la necesidad de integrar un mecanismo de adaptación que brinde la capacidad de ajustar los parámetros del modelo de predicción existente, convirtiéndolo en un modelo dinámico, buscando minimizar el error de predicción y consecuentemente mejorar el rendimiento del sistema de control y su robustez ante cambios de parámetros.

### **3.2 EL PROBLEMA DE LA IDENTIFICACIÓN EN LAZO CERRADO**

---

Muchos de los métodos de identificación presentados en la literatura fueron concebidos para operar en lazo abierto y bajo un conjunto de condiciones experimentales que garanticen una correcta estimación de los parámetros del sistema.

La realidad es que muchos sistemas no operan bajo estas dos últimas consideraciones debido a las características de estabilidad del sistema, restricciones de producción y/o seguridad que

hacen prohibitiva la identificación en lazo abierto. Adicional a esto, la selección de las condiciones experimentales para la identificación del proceso estará restringida a la operación en lazo cerrado y a las restricciones propias del sistema.

Finalmente se presenta un conflicto entre los objetivos del sistema de control y el estimador: el primero busca llevar al sistema a su estado estable, mientras que el segundo requiere que el sistema esté en movimiento para identificar los parámetros que definen la dinámica del proceso.

La diferencia principal entre la identificación en lazo abierto y lazo cerrado es el origen y características de los datos más que los métodos utilizados [13] debido a las características propias del sistema de control y de las restricciones de operación ya mencionadas.

No obstante, es posible realizar la identificación de un proceso en lazo cerrado y obtener resultados válidos, siempre y cuando se cumplan las condiciones determinadas por el método a utilizar.

En [14] se presentan de manera general tres enfoques para la identificación de sistemas en lazo cerrado:

- Identificación Directa: Aplicar un método de error de predicción, obviando la retroalimentación del sistema, utilizando el conjunto de datos  $\{u, y\}$ , siendo  $y$  la salida del sistema y  $u$  la señal de control.
- Identificación Indirecta: Identificar el sistema en lazo cerrado, utilizando el conjunto de datos  $\{r, y\}$ , siendo  $r$  la señal de referencia del sistema, y  $y$  la salida del mismo. Es necesario tener conocimiento a priori del sistema de control para lograr derivar los parámetros del sistema en lazo abierto.
- Identificación de conjunto entrada-salida: Se considera  $\{u, y\}$  como el conjunto de salidas del sistema, cuya entrada es  $\{r, v\}$  donde  $r$  es la señal de referencia del sistema y  $v$  es el ruido al que está sometido el sistema.

Para el desarrollo del mecanismo de adaptación, se utilizara el método de identificación directa el cual se detalla a continuación.

### 3.3 IDENTIFICACIÓN DIRECTA

---

Con la identificación directa se busca realizar la identificación del sistema utilizando métodos concebidos para identificar en lazo abierto.

De manera General podemos aplicar este método para modelos de la forma

$$y(t) = G(q^{-1})u(t) + v(t)$$

Donde  $G(q^{-1})$  , representa el modelo de función de transferencia del sistema y se define particularmente como

$$G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

$v(t)$  representa el ruido que afecta al proceso. De forma particular podemos definir  $v(t)$  como

$$v(t) = H(q^{-1})e(t)$$

Siendo  $H(q^{-1})$  un filtro estable y  $e(t)$  ruido blanco.

El modelo estimado del sistema a identificar se puede definir entonces bajo los elementos

$$\hat{G}(q^{-1}) = \frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})} \quad y \quad \hat{H}(q^{-1})$$

Aplicando un método de identificación basado en el error de predicción, como puede ser el método de Mínimos Cuadrados Recursivos, se pueden estimar los parámetros  $\hat{\theta}$  obviando la retroalimentación del sistema, definida por el controlador utilizado, a partir del conjunto de datos  $\{u, y\}$ .

Las ventajas principales de utilizar este método son [13]:

- Funciona independientemente de la complejidad del controlador .
- No requiere conocimiento de la retroalimentación del sistema.
- No requiere algoritmos o software especializado.
- Se logra consistencia y precisión, siempre y cuando la estructura propuesta del modelo incluya al sistema real, incluyendo las características de ruido.

La desventaja principal de este método, es la necesidad de establecer modelos correctos de ruido, para evitar el sesgo del estimador. Si se asume que el sistema está expuesto a ruido blanco, no es necesario modelar el filtro  $H(q^{-1})$ , ya que tendríamos  $H(q^{-1}) = 1$ .

### 3.4 EL ESTIMADOR DE MÍNIMOS CUADRADOS RECURSIVOS CON FACTOR DE OLVIDO

---

El método de Mínimos Cuadrados Recursivos con Factor de Olvido [15], es uno de los métodos que permite la identificación de modelos paramétricos, buscando la minimización de una función de costo basada en el error cuadrático; de esto que se clasifique dentro de los estimadores basados en el error de predicción.

Es necesario definir a priori la estructura de la función de transferencia del modelo así como el tiempo muerto discreto relacionado (Estos son los parámetros a utilizar para el caso de un modelo ARX).

El método de MCR con factor de olvido se puede resumir matemáticamente con el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\Psi(k) = [y(k-1) \quad y(k-2) \quad \dots \quad y(k-na) \quad u(k-1-nd) \quad u(k-2-nd) \quad \dots \quad u(k-nb-nd)] \quad 3.1$$

$$\mathbf{L}(k) = \frac{1}{\gamma c} \mathbf{Q}(k) \Psi(k) \quad 3.2$$

$$\varepsilon(k) = y(k) - \Psi^T(k) \boldsymbol{\theta}(k-1) \quad 3.3$$

$$\boldsymbol{\theta}(k) = \boldsymbol{\theta}(k-1) + \mathbf{L}(k)[y(k) - \Psi^T(k) \boldsymbol{\theta}(k-1)] \quad 3.4$$

$$c = \left(1 + \Psi^T(k) \frac{\mathbf{Q}(k-1)}{\gamma} \Psi(k)\right) \quad 3.5$$

$$\mathbf{Q}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{L}(k) \Psi^T(k)] \frac{\mathbf{Q}(k-1)}{\gamma} \quad 3.6$$

Dónde:

$na$	Número de aes
$nb$	Número de bes
$nd$	Tiempo muerto discreto
$\Psi(k)$	Vector formado por los valores de $u_k$ y $y_k$
$\gamma$	Factor de olvido
$L(k)$	Matriz de ganancias
$y(k)$	Salida actual del sistema
$\varepsilon(k)$	Error de estimación
$\theta(k)$	Vector de parámetros estimados en el instante k
$\theta(k - 1)$	Vector de parámetros estimados en el instante anterior
$I$	Matriz Identidad
$Q(k)$	Matriz de covarianzas

Antes de iniciar la ejecución del estimador de MCR con factor de olvido es necesario inicializar algunos de sus parámetros de manera correcta, específicamente los valores iniciales para  $na$ ,  $nb$ ,  $nd$ ,  $\theta$ ,  $Q$ ,  $\gamma$ .

Selección de  $na$ ,  $nb$ ,  $nd$ : Estos parámetros pueden seleccionarse basados en el conocimiento a priori de la planta, o de pruebas previas de identificación donde se haya realizado una validación del modelo.

Selección de valores iniciales para  $\theta$ : Los valores iniciales de  $\theta$  pueden fijarse en base a conocimiento a priori del sistema o a experimentación previa. De no tener conocimiento previo se pueden fijar valores aproximados o en cero [16].

Selección de valores iniciales para  $\mathbf{Q}$ : Para la correcta estimación de parámetros  $\theta$ , la matriz  $\mathbf{Q}$  ha de iniciarse con valores de entre 100 y 1000 en su diagonal, utilizando los valores más altos cuando no se conozcan a priori los parámetros estimados [16].

Selección de valor inicial de  $\gamma$ : La selección del valor del factor de olvido,  $\gamma$ , es dependiente de la velocidad de convergencia deseada del estimador, así como la robustez ante ruido. El parámetro  $\gamma$ , determina la cantidad de datos pasados que se utilizara para estimar los parámetros  $\theta$ . En [16] se propone la siguiente aproximación para evaluar la cantidad de datos pasados utilizados en base al valor de  $\gamma$

$$N_{\gamma} \approx \frac{1}{1 - \gamma}$$

Donde  $N_{\gamma}$  es la cantidad aproximada de datos pasados a utilizar para la estimación de los parámetros.

La utilización de valores bajos de  $\gamma$  brindará mayor velocidad de convergencia pero presenta mayor sensibilidad al ruido, mientras que valores mayores brindan menor velocidad de convergencia pero mejor robustez ante el ruido. Valores típicos para  $\gamma$  se encuentran en el rango de 0.98 a 0.995.

### **3.5 MÉTODOS PARA LA IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS VARIANTES EN EL TIEMPO**

---

La selección del método de identificación para sistemas con parámetros variantes en el tiempo, depende directamente de las características dinámicas de estos cambios. Podemos identificar dos casos generales:

- a. Parámetros que varían lentamente en el tiempo.
- b. Parámetros que se mantienen constantes durante un periodo determinado y luego cambian abruptamente.

El tratamiento para ambos casos es distinto, y existen diferentes métodos aplicables a cada caso. Algunos métodos presentados en la literatura [3] para estos casos son:

### **Factor de Olvido Exponencial:**

Este método brinda la capacidad de descartar los datos más antiguos de manera exponencial. De la aplicación de este método se derivan las ecuaciones presentadas para el estimador de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido. La utilización de este método provee buenos resultados ante parámetros que varían lentamente en el tiempo por la manera en que se descartan los datos pasados.

### **Reinicio de Covarianza:**

Cuando se utiliza el estimador MCR en sistemas que mantienen por largo tiempo parámetros constantes, la matriz  $Q$ , definida en la ecuación 3.6, adquiere valores pequeños y consecuentemente la sensibilidad del estimador ante cambios de parámetros se ve disminuida. Una técnica que permite evitar esta pérdida de sensibilidad es reiniciar la matriz de covarianzas,  $Q$ , con valores altos (100 – 10000) en su diagonal en el momento que se detecten cambios en los parámetros.

### **Estimadores paralelos**

Otra opción para resolver el problema de identificación de parámetros variantes, es la de utilizar un banco de estimadores con diferentes factores de olvidos. De esta manera obtendremos estimadores con distinta sensibilidad y podremos seleccionar aquel que provea mejor convergencia.

### **Actualización Condicional**

El algoritmo se basa en la actualización de los parámetros estimados, así como el reinicio de la covarianza únicamente cuando se produce excitación en el sistema. Las condiciones de actualización y reinicio se basan generalmente en las variaciones de las señales de entrada y salida del sistema.

### 3.6 DEFINICIÓN DEL MECANISMO DE ADAPTACIÓN PARA EL CONTROLADOR DMC

---

La definición del mecanismo de adaptación se basa esencialmente en dos objetivos: el accionamiento correcto del estimador de MCR y la correcta actualización del modelo de predicción. A continuación se detallan las aproximaciones propuestas para ambos objetivos.

#### Ley de conmutación para el estimador MCR

Se propone un mecanismo para controlar el estimador MCR basado en el reinicio condicional de la matriz de covarianzas, accionado a partir del error del sistema. Se propone este enfoque considerando las siguientes ventajas:

- Utilizando el estimador de mínimos cuadrados recursivos junto con esta técnica se logra la identificación de parámetros que varían lentamente y repentinamente.
- Al estar basado en el error sobre el set point del sistema, brinda la oportunidad de aumentar la sensibilidad del estimador tanto cuando se presentan cambios de parámetros, como cuando hay un cambio de referencia, siendo posible con el segundo caso, mejorar los parámetros obtenidos anteriormente considerando que el sistema es mejor excitado.
- Su implementación es sencilla.

Podemos establecer una ley de conmutación para reiniciar la matriz de covarianzas basada en las expresiones:

$$|e(k)| > c_1 \quad 3.7$$

$$|e(k - 1)| < c_1 \quad 3.8$$

$$|e(k - 2)| < c_2 \quad 4.9$$

Dónde:

- $e(k)$  Error actual de la salida
- $c_1$  Nivel de error al que se realizará el disparo
- $c_2$  Constante que debe ser menor que  $c_1$

Con la implementación de estas expresiones se busca detectar cuando se produce un error sobre la referencia del sistema, utilizando el valor absoluto para considerar solo la amplitud del error. El parámetro  $c_1$  representa el nivel de error que deseamos detectar. Para la selección de  $c_1$  se debe tener en cuenta el nivel de ruido sobre el sistema, para evitar disparos falsos. Con la expresión 3.8 y 3.9 se busca limitar el tiempo de duración del disparo y que no se presenten disparos sucesivos para el reinicio de  $Q(k)$ .

### **Generación del modelo de predicción**

La generación de los elementos utilizados por el controlador DMC para la predicción de la salida y el cálculo de la señal de control se realiza de manera indirecta. Inicialmente se genera un modelo de función de transferencia a partir de los parámetros obtenidos por el estimador MCR con factor de olvido y seguidamente se obtiene la respuesta al escalón de este modelo. Con los datos obtenidos se genera entonces el vector  $\mathbf{g}$  y las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$ , elementos definidos en el apartado 2.6.

### **Actualización del modelo de predicción**

La actualización del modelo de predicción es un elemento crítico en el mecanismo de adaptación. No resulta conveniente actualizar el modelo en cada nuevo intervalo de muestreo ya que pueden existir momentos, antes de que el estimador converja, donde los valores de los parámetros estimados no se aproximan a los del modelo real pudiendo así comprometer la eficacia del controlador así como la estabilidad del sistema. La actualización del modelo de

predicción se propone en base al análisis de convergencia de los parámetros estimados, utilizando la siguiente expresión:

$$\{\Delta\theta(k) , \Delta\theta(k - 1) , \dots , \Delta\theta(k - n) \} < c_3 \quad 3.10$$

$$e(k) < c_4 \quad 3.11$$

Dónde:

$\Delta\theta(k)$  Diferencia del parámetro estimado actual y el anterior

$n$  Número de intervalos donde se evaluará la convergencia

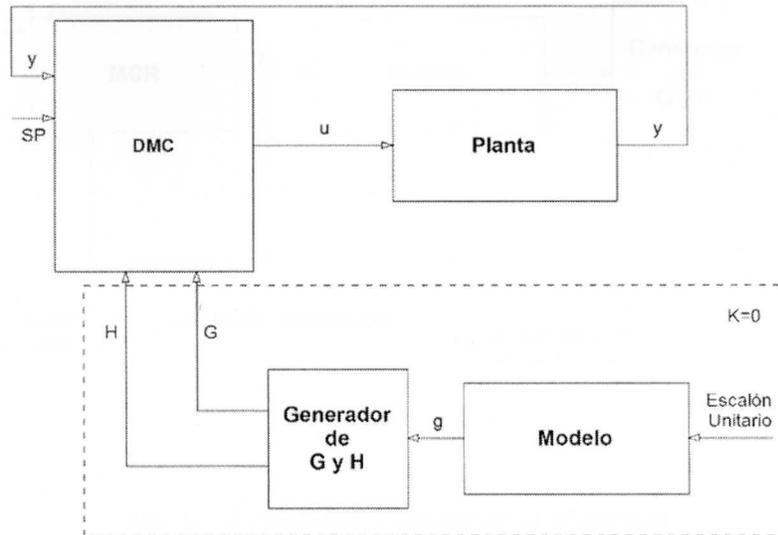
$c_3$  Nivel de error de convergencia

$c_4$  Nivel de error de la salida

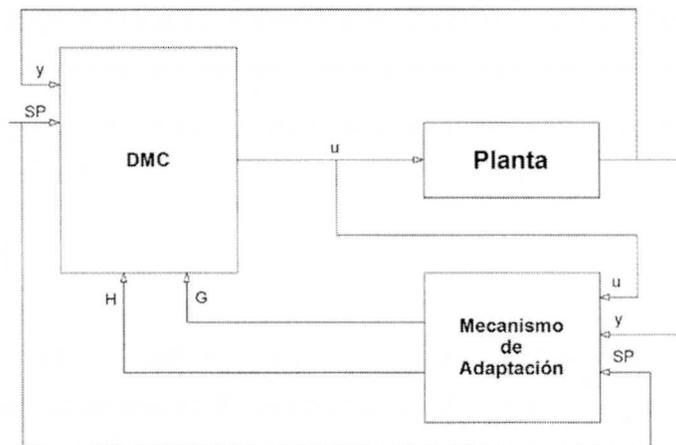
Utilizando 3.10 se evalúa la convergencia del parámetro  $\theta$  en  $n$  intervalos. El parámetro  $c_3$  representa el margen de convergencia aceptado, dictando así que tan estricta será la actualización del modelo de predicción, siendo más estricta para valores que tienden a cero. Adicionalmente se utiliza 3.11 para restringir la actualización del modelo a zonas de poca actividad dinámica en el proceso.

En la figura 3.1 podemos observar la estructura del controlador DMC estándar, mientras que en la figura 3.2 podemos observar la estructura del controlador DMC con la extensión propuesta.

Se puede observar que para el DMC estándar se generan las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  únicamente en el instante  $k=0$ , mientras que para el caso adaptivo estas dos matrices son actualizadas constantemente.



**Fig. 3.1 – Estructura del controlador DMC estándar**



**Fig. 3.2 – Estructura del DMC con mecanismo de adaptación**

La estructura interna del mecanismo de adaptación mostrado en la figura 3.2 se presenta en figura 3.3

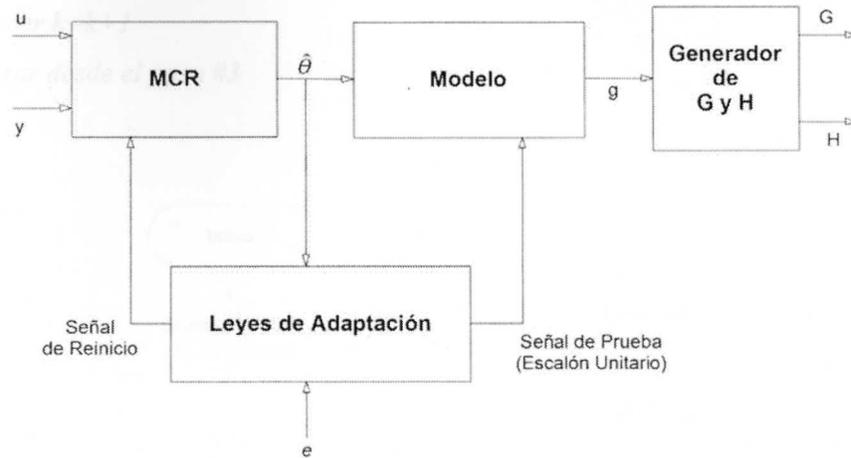


Fig. 3.3 – Estructura del mecanismo de adaptación

### 3.7 ALGORITMOS INVOLUCRADOS EN EL DMC ADAPTIVO

A continuación se presentan los algoritmos involucrados en la versión adaptiva del controlador DMC.

#### Estimador MCR

Basado en las ecuaciones presentadas previamente para el estimador de mínimos cuadrados recursivos los pasos para el cálculo de los parámetros estimados del sistema son:

1. *Seleccionar  $n_a$ ,  $n_b$  y  $n_d$*
2. *Definir los valores para  $\gamma$ ,  $\theta$ ,  $Q$ ,  $c_1$ ,  $c_2$*
3. *Obtener  $u_k$  y  $y_k$*
4. *Formar  $\psi(k)$*
5. *Reiniciar  $Q(k)$  si se cumplen  $|e(k)| > c_1$  y  $|e(k-1)| < c_1$  y  $|e(k-2)| < c_2$*
6. *Calcular  $L(k)$*
7. *Calcular  $\varepsilon(k)$*
8. *Calcular  $\theta(k)$*
9. *Calcular  $Q(k)$*

10. Hacer  $k=k+1$

11. Iterar desde el paso #3

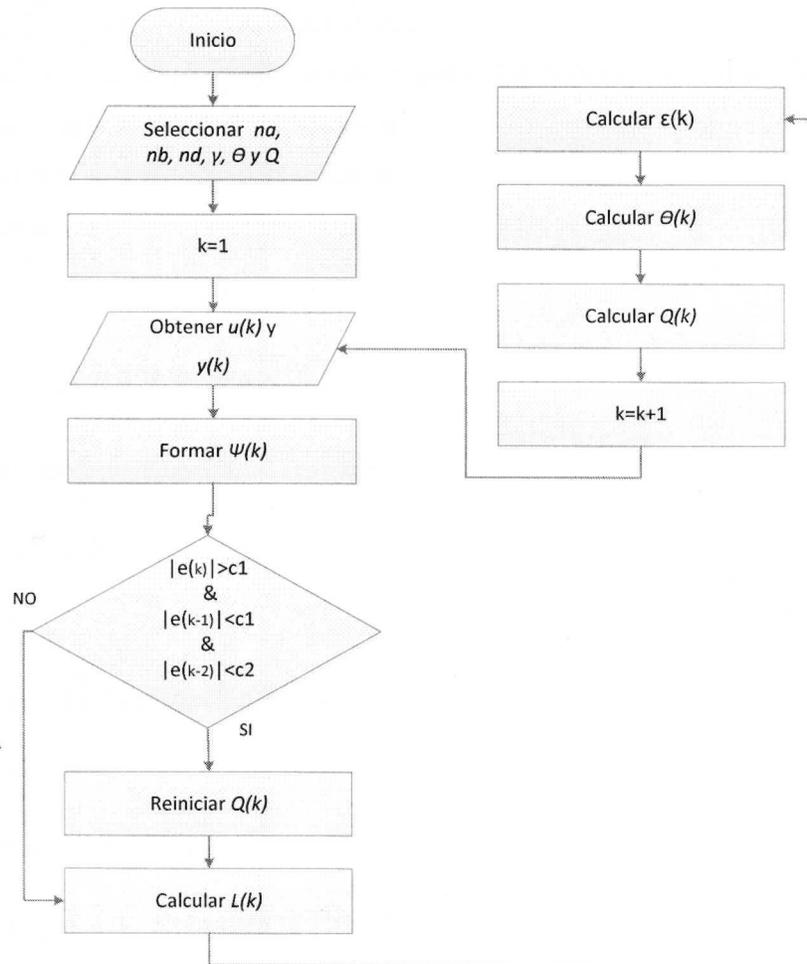


Fig. 3.4 – Diagrama de Flujo MCR con factor de olvido y reinicio de covarianzas

### Generación y Actualización del Modelo Predictivo

El algoritmo para actualizar el modelo predictivo es definido por los siguientes pasos:

1. Obtener  $n_a, n_b, n_d, N, p$  y  $m$

2. Obtener  $\theta_k$
3. Si  $\{ \Delta\theta(k) , \Delta\theta(k - 1) , \dots , \Delta\theta(k - n) \} < c_3$  y  $e(k) < c_4$  continuar
4. Generar el modelo de función de transferencia en base a los parámetros obtenidos en el paso #1 y el paso #2
5. Obtener la respuesta escalón del modelo
6. Crear el vector  $\mathbf{g}$  a partir de los valores obtenidos de la respuesta al escalón
7. Crear la matriz  $\mathbf{G}$  en base al vector  $\mathbf{g}$
8. Crear la matriz  $\mathbf{H}$  en base al vector  $\mathbf{g}$
9. Iterar desde #2

Dónde:

- $p$  Horizonte de predicción
- $m$  Horizonte de control
- $n$  Tiempo de evaluación de a convergencia de  $\theta$
- $N$  Tiempo de estabilización del sistema
- $na$  Número de aes
- $nb$  Número de bes
- $nd$  Tiempo muerto discreto
- $\mathbf{g}$  Vector formado de los coeficientes obtenidos de la respuesta escalón del sistema estimado
- $\mathbf{G}$  Matriz dinámica del sistema estimado
- $\mathbf{H}$  Matriz de cálculo para la respuesta libre del sistema  $f$

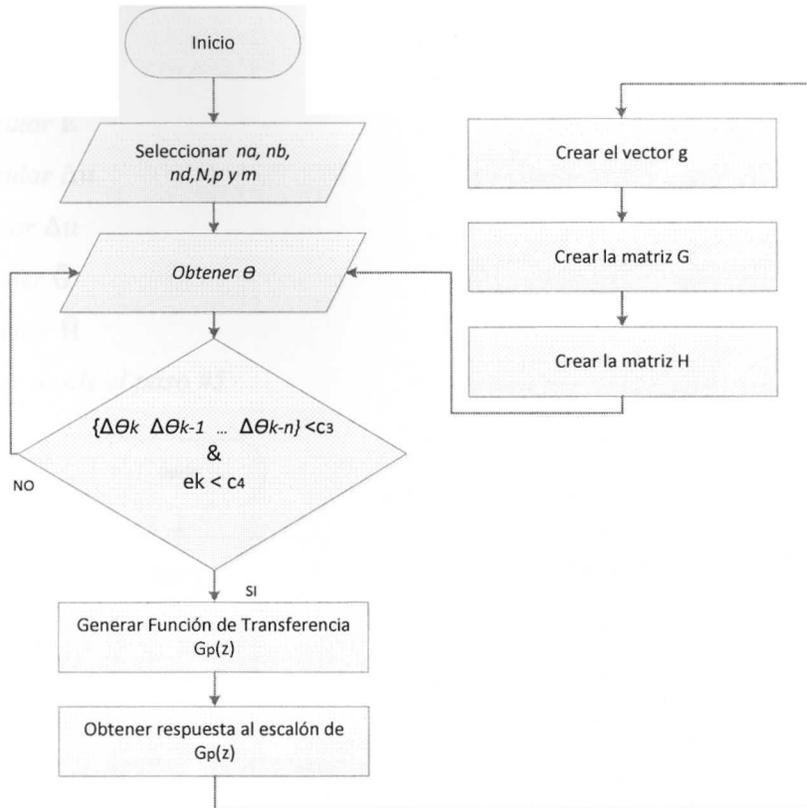


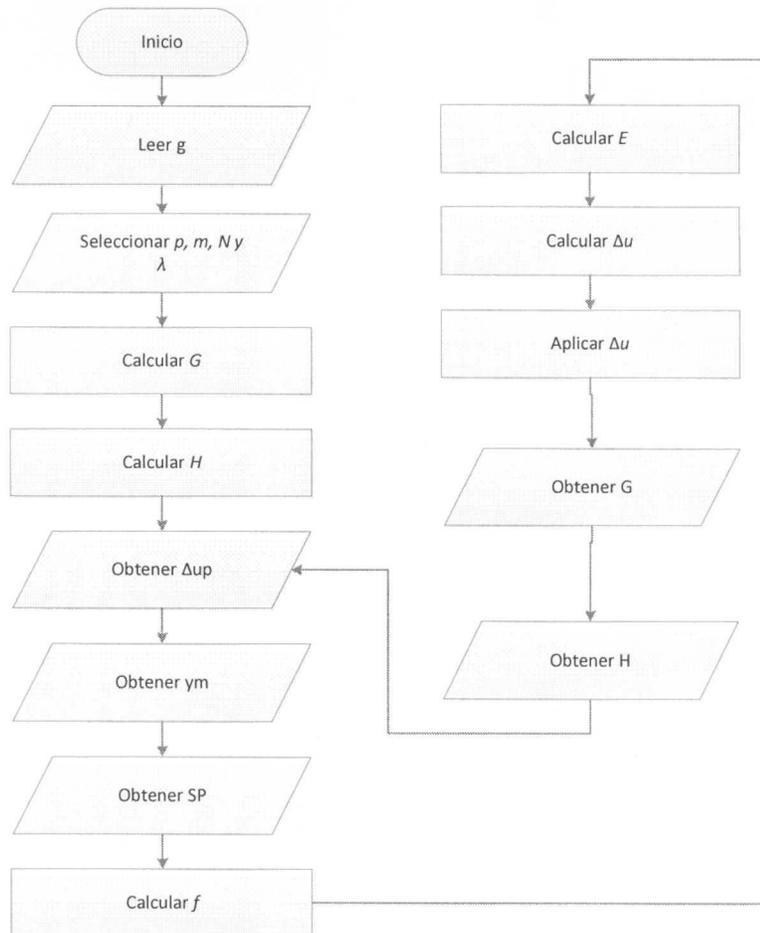
Fig. 3.5 – Diagrama de Flujo de la Actualización del modelo predictivo

### Controlador DMC con mecanismo de adaptación

El controlador DMC con mecanismo de adaptación sigue la estructura general del algoritmo propuesto para el DMC, considerando ahora que las matrices  $G$  y  $H$  son actualizadas por el mecanismo de adaptación. El nuevo algoritmo de control estaría definido por los siguientes pasos:

1. *Obtener  $\mathbf{g}$*
2. *Seleccionar  $p$ ,  $m$ ,  $N$  y  $\lambda$*
3. *Calcular  $\mathbf{G}$*
4. *Calcular  $\mathbf{H}$*
5. *Obtener  $\Delta \mathbf{u}_p$*
6. *Obtener  $y_m$*

7. *Obtener SP*
8. *Calcular  $f$*
9. *Calcular  $E$*
10. *Calcular  $\Delta u$*
11. *Aplicar  $\Delta u$*
12. *Obtener  $G$*
13. *Obtener  $H$*
14. *Iterar desde el paso #5*



**Fig. 3.6 – Diagrama de Flujo controlador DMC adaptivo**

# Capítulo 4.

## Resultados

## 4.1 Simulaciones

---

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de la implementación del controlador DMC y la versión extendida con el mecanismo de adaptación basado en el estimador MCR.

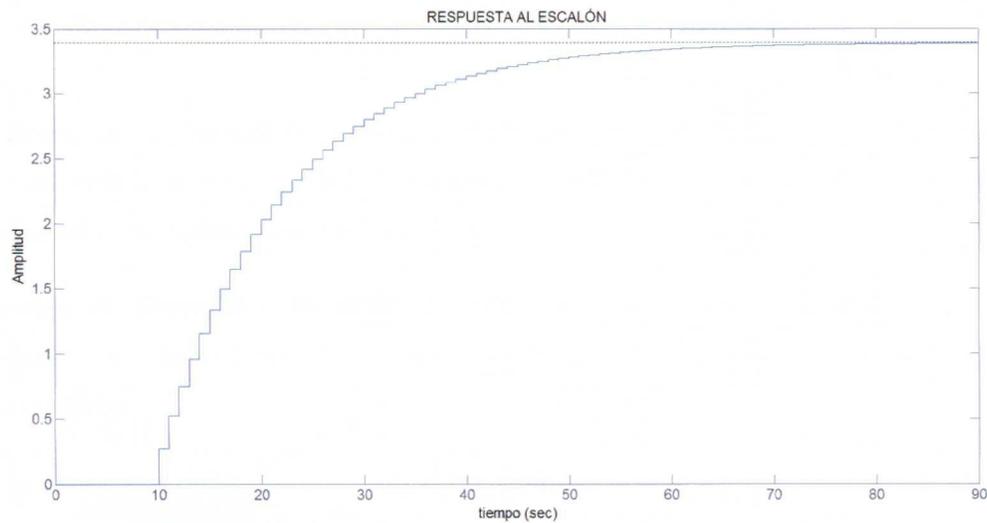
Para la realización de las pruebas se utilizó un modelo de primer orden con tiempo muerto cuya función de transferencia está definida por

$$G(s) = \frac{3.39}{11.99s + 1} e^{-10s}$$

Discretizando esta función de transferencia utilizando un tiempo de muestreo de 1 seg obtenemos la siguiente función de transferencia

$$G(z) = z^{-10} \frac{0.2713}{1 - 0.92z^{-1}}$$

Aplicando un escalón unitario al sistema obtenemos la respuesta que se muestra en la figura 4.1



**Fig. 4.1 – Respuesta del sistema al escalón unitario**

Las pruebas realizadas en este capítulo buscan cumplir con los siguientes objetivos:

- Comparar el rendimiento del DMC contra un PI.
- Comparar el rendimiento del DMC contra el DMC con mecanismo de adaptación en sistemas variantes en el tiempo.
- Comparar el rendimiento del DMC adaptivo contra el PI.
- Validar el comportamiento del mecanismo de adaptación.

### **Valores utilizados para los parámetros del controlador DMC**

Para el controlador DMC utilizado en las pruebas se ajustaron sus parámetros a los siguientes valores

$$p = 90$$

$$N = 90$$

$$m = 40$$

$$\lambda = 5$$

### **Valores utilizados para los parámetros del controlador PI**

Se implemente un controlador PI eliminando el término derivativo debido a que el proceso a controlar presenta un tiempo muerto relativamente elevado. Esta condición hace que la acción anticipativa del término derivativo pierda eficacia.

Se sintonizo el controlador PI utilizando tablas de optimización para seguimiento y minimización del criterio ITAE. Luego de un ajuste fino del controlador se obtuvieron los siguientes valores:

$$K_p = 0.196830$$

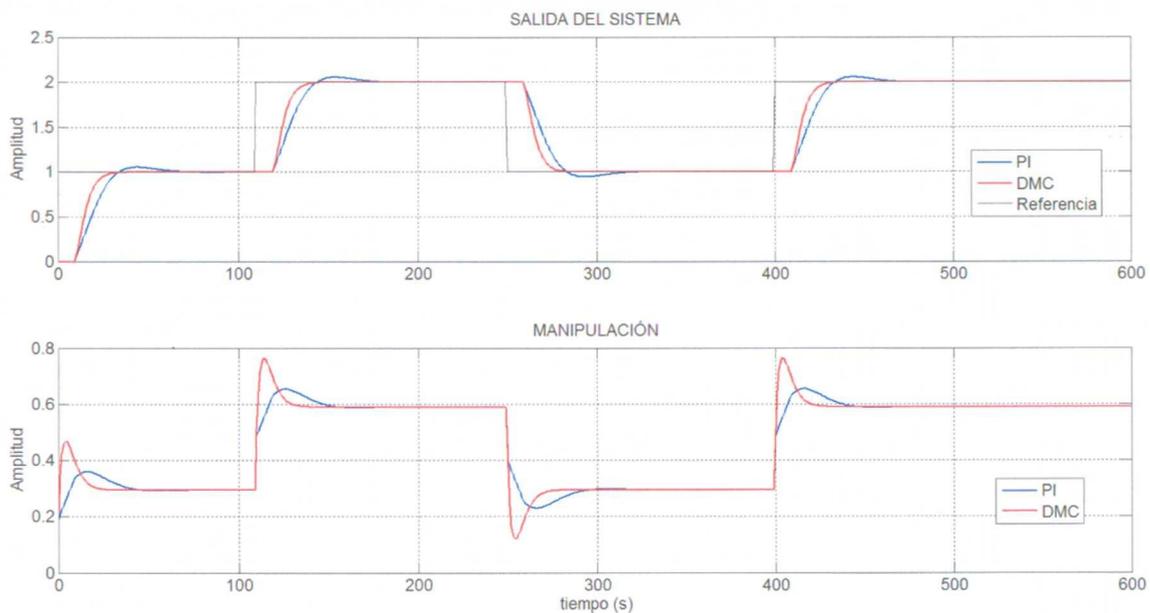
$$K_I = 13.3775$$

Posteriormente se utilizó el método de diferencias hacia adelante para la discretización del controlador, con lo que las ganancias proporcional e integral adquieren los siguientes valores para el controlador discreto:

$$K_p = 0.194164$$

$$K_i = 12.1550$$

### Prueba #1: Comparación de DMC vs. PI ante cambios de referencia



**Fig. 4.2 – DMC vs. PI ante cambios en referencia**

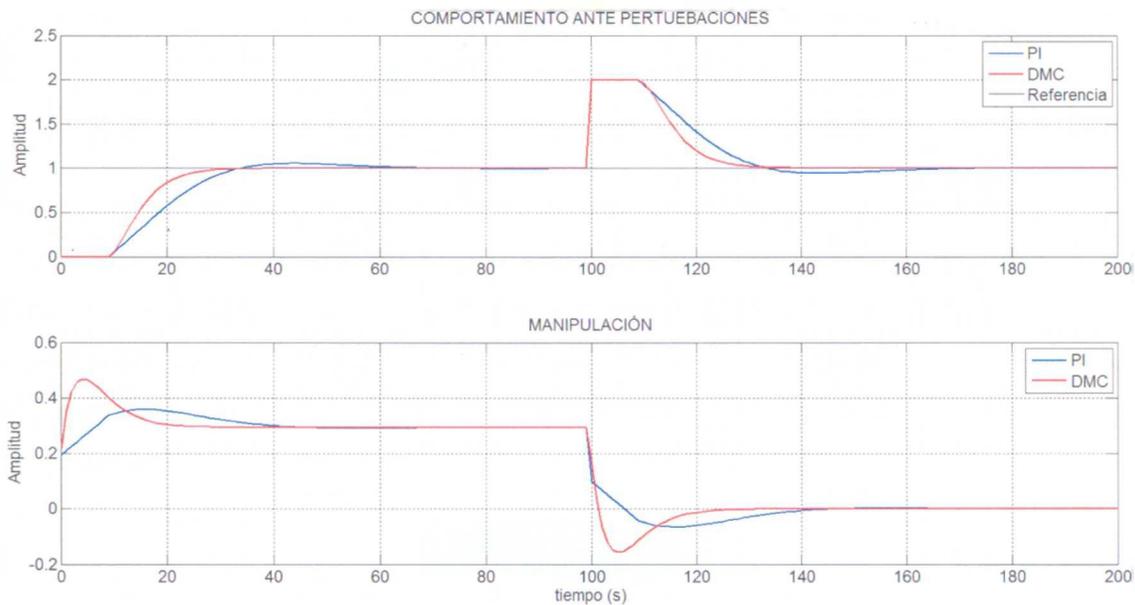
En la primera prueba se compara el rendimiento de ambos controladores frente al seguimiento de referencias. Podemos ver en la figura 4.2 que el controlador DMC brinda una respuesta más rápida y suave comparada con el PI. Numéricamente se obtienen los indicadores de desempeño en la tabla 4.1

	DMC	PI
%MP	0	5.5
$T_r$	22	29
$T_s$	29	60

**Tabla 4.1 - Comparación de índices de desempeño del DMC vs. PI**

Podemos ver un mejor desempeño por parte del DMC, logrando una respuesta sin sobreimpulso. La diferencia más notable se presenta en el tiempo de estabilización considerando una banda de error del 2%.

### Prueba #2: Comparación de DMC vs. PI ante perturbaciones

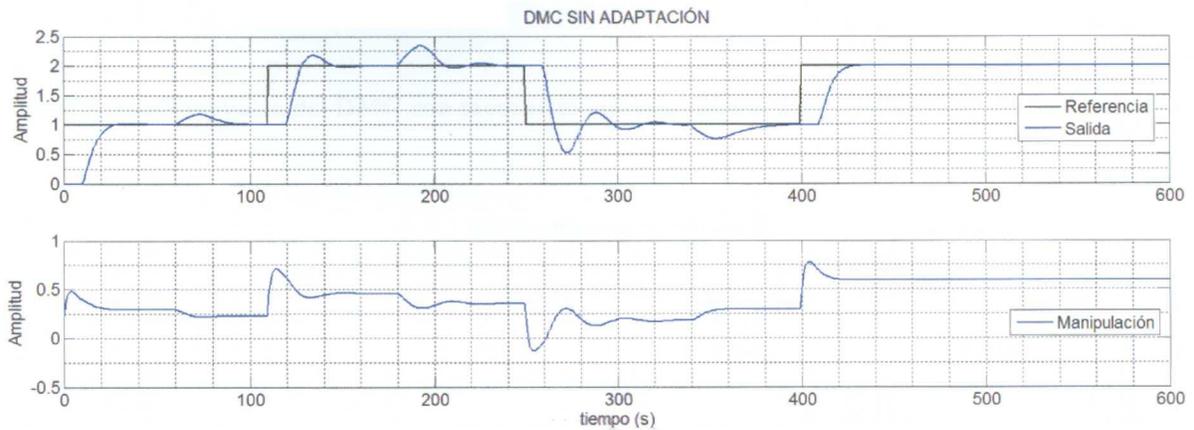


**Fig. 4.3 – DMC vs. PI ante perturbaciones**

En esta prueba se evalúa el rechazo de perturbaciones de ambos controladores. Se agrega una perturbación tipo escalón de valor unitario que se mantiene constante a partir de los 100 seg. Podemos apreciar en la figura 4.3 que ambos controladores llevan nuevamente el sistema a

estado estable pero con diferentes velocidades. El controlador DMC lleva la salida del sistema dentro de la banda de error de 2% en 32 seg. Mientras que el PI lo hace en 60 seg.

**Prueba #3: Respuesta del DMC ante cambio del parámetro  $b$**



**Fig. 4.4– DMC ante cambio de parámetros**

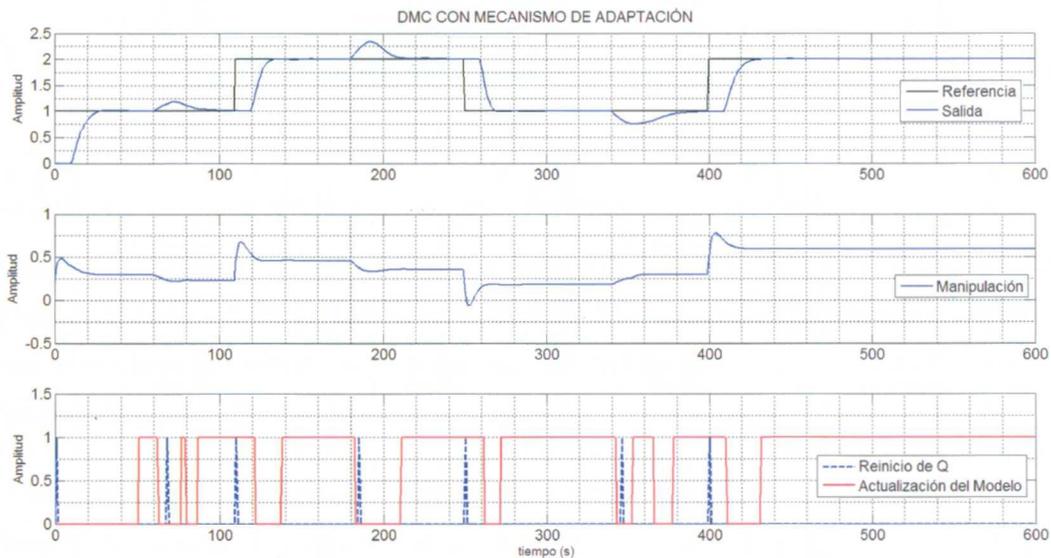
En la figura 4.4 podemos observar el resultado obtenido ante cambios en el parámetro  $b$  de la planta. La variación incluida en los parámetros se seleccionó en base a los cambios que generaban en la dinámica del sistema en lazo abierto (entiéndase la ganancia y el tiempo de estabilización del sistema), esta consideración fue utilizada para establecer los cambios tanto en el parámetro  $b$  como en el parámetro  $a$ . En la tabla 4.2 podemos ver a detalle la variación del parámetro  $b$ .

Tiempo	$b$
0	0.2713
50	0.35
170	0.45
330	0.2713

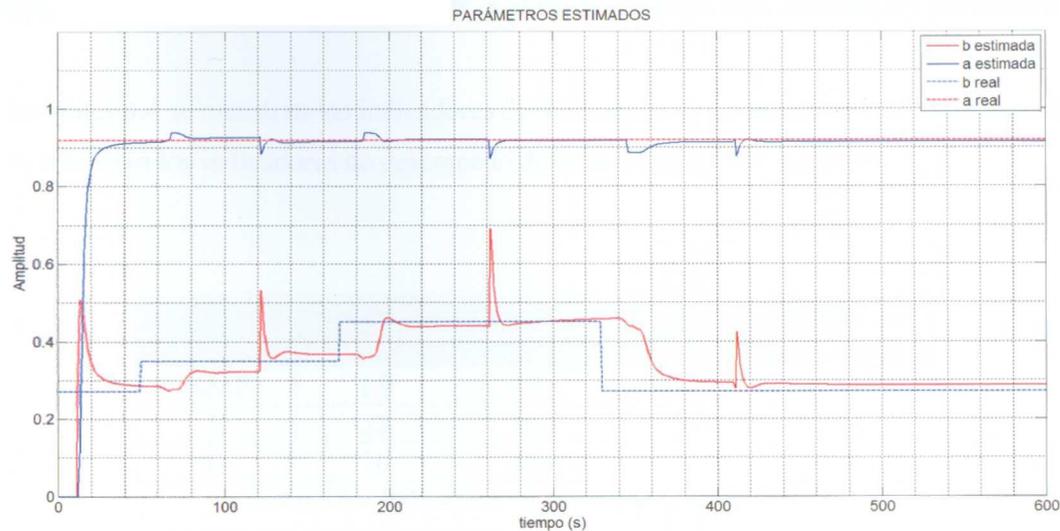
**Tabla 4.2 - Variaciones del parámetro  $b$**

Es visible que el controlador lleva al sistema a su estado estable con las variaciones del parámetro, pero se presentan sobretiros y oscilaciones cuando se intenta controlar la nueva planta. Podemos ver que para los escalones aplicados en 0 y en 400 se obtiene una respuesta libre de sobretiros y oscilaciones teniendo en estos dos casos el sistema original bajo el cual se diseñó el controlador. Para los escalones aplicados en 110 y 250 observamos sobretiros y oscilaciones producto de los cambios en el parámetro  $b$ .

**Prueba #4: Respuesta del DMC con mecanismo de adaptación ante cambio del parámetro  $b$**



**Fig. 4.5 – DMC adaptivo ante cambio de parámetros**



**Fig. 4.6 – Evolución de los parámetros estimados de la planta**

En esta prueba se utiliza la versión extendida del DMC con mecanismo de adaptación. Los cambios en el parámetro  $b$  son los mismos utilizados para la prueba #3 y se encuentran definidos en la tabla 4.2. Es apreciable en la figura 4.5 la mejora en el rendimiento general del sistema, eliminando los sobretiros y oscilaciones producidas por el cambio del parámetro  $b$  en los cambios de referencia.

En la parte inferior de la figura 4.5 se pueden observar las acciones de conmutación para el mecanismo de adaptación propuesto en el capítulo 3 de este trabajo. El funcionamiento del estimador MCR se puede resumir en la tabla 4.3 donde se presentan los valores reales del modelo y los valores estimados. La evolución de los parámetros  $a$  y  $b$  se puede observar en la figura 4.6. El error de estimación que se produce en esta prueba no supera el 4.5% para el parámetro  $b$  mientras que el error máximo para el parámetro  $a$  es de apenas 0.51%.

$a$	$b$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	%Error en $\hat{a}$	%Error en $\hat{b}$
0.92	0.2713	0.9153	0.2833	0.51086957	4.42314781
0.92	0.35	0.9212	0.3444	0.13043478	1.6
0.92	0.45	0.92	0.4499	0	0.02222222
0.92	0.2713	0.9205	0.2695	0.05434783	0.66347217

**Tabla 4.3 - Valores reales y valores estimados por MCR**

### Comparación de desempeño entre el DMC y el DMC adaptivo ante cambios del parámetro $b$ .

En las tablas 4.4 se muestran los indicadores de desempeño del controlador DMC. En la tabla 4.5 se muestran los indicadores de desempeño del controlador DMC adaptivo.

DMC	Referencia 1	Referencia 2	Referencia 3	Referencia 4
%MP	1.9	9.15	52.55	0
Tr	22	16.7	14.8	21
Ts	26	32.8	75.9	27.2

Tabla 4.4 – Indicadores de desempeño para el DMC

DMC adap.	Referencia 1	Referencia 2	Referencia 3	Referencia 4
%MP	1.9	0.25	2.5	0
Tr	21.8	18	16.4	22
Ts	26	22	18.3	27

Tabla 4.5 – Indicadores de desempeño para el DMC adaptivo

Podemos observar que al incluir el mecanismo de adaptación en el controlador se logra una mejora notable en el desempeño. Los sobretiros son limitados a un máximo de 2.5% para el controlador adaptivo mientras que en el primer caso se producen sobretiros de hasta 52.5%. El tiempo de estabilización también mejora para el caso adaptivo.

### Prueba #5: Respuesta del DMC ante cambio del parámetro $a$

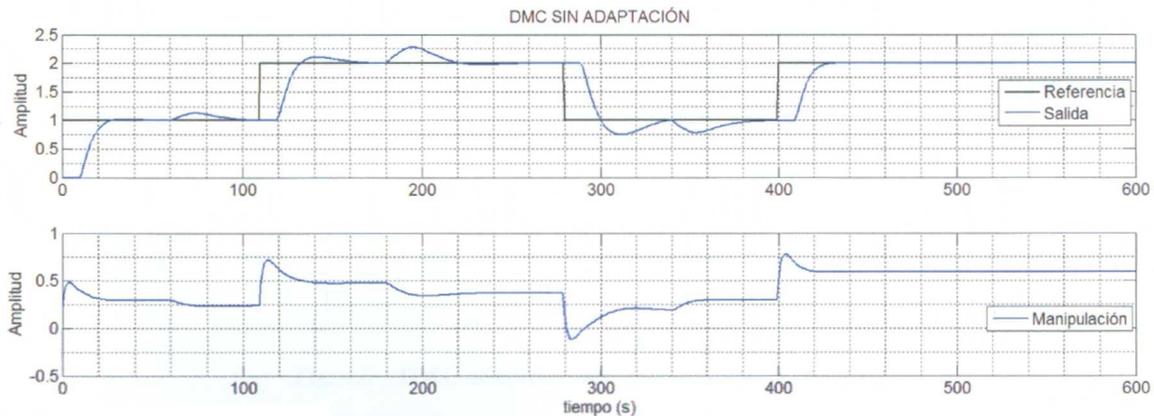


Fig. 4.7 – DMC ante cambio de parámetros

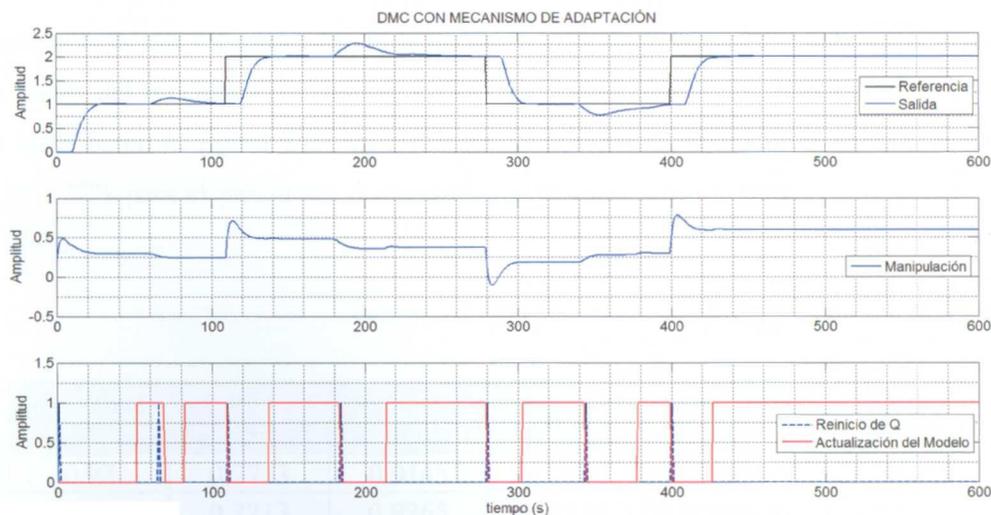
En la figura 4.7 podemos observar el resultado obtenido ante cambios en el parámetro  $a$  de la planta. En la tabla 4.6 podemos ver a detalle la variación del parámetro  $a$ .

Tiempo	$a$
0	0.92
50	0.935
170	0.95
330	0.92

**Tabla 4.6 – Variaciones del parámetro  $a$**

Es visible que el controlador lleva al sistema a su estado estable con las variaciones del parámetro, pero al igual que en la prueba #3 se presentan sobretiros y oscilaciones cuando se intenta controlar la nueva planta. Podemos ver que para los escalones aplicados en 0 y en 400 se obtiene una respuesta libre de sobretiros y oscilaciones teniendo en estos dos casos el sistema original bajo el cual se diseñó el controlador. Para los escalones aplicados en 110 y 280 observamos sobretiros producto de los cambios en el parámetro  $a$ .

**Prueba #6: Respuesta del DMC con mecanismo de adaptación ante cambio del parámetro  $a$**



**Fig. 4.8 – DMC adaptivo ante cambio de parámetros**

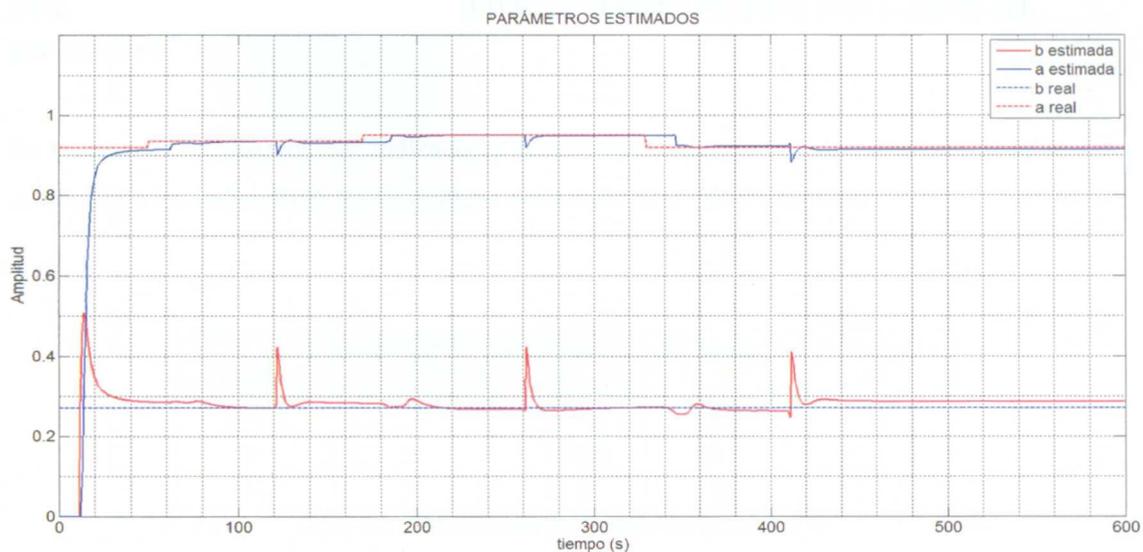


Fig. 4.9 – Evolución de los parámetros estimados

En esta prueba se utiliza la versión extendida del DMC con mecanismo de adaptación. Los cambios en el parámetro  $a$  son los mismos utilizados para la prueba #5 y se encuentran definidos en la tabla 4.6. Podemos apreciar en la figura 4.8 una mejora en el rendimiento general del sistema, eliminando los sobretiros producidos por el cambio del parámetro  $a$  en los cambios de referencia. En la parte inferior de la figura 4.8 se pueden observar las acciones de conmutación para el mecanismo de adaptación propuesto en el capítulo 3 de este trabajo.

El funcionamiento del estimador MCR se puede resumir en la tabla 4.8 donde se presentan los valores reales del modelo y los valores estimados. La evolución de los parámetros  $a$  y  $b$  se pueden apreciar en la figura 4.9. El error de estimación que se produce en esta prueba no supera el 5.23% para el parámetro  $b$  mientras que el error máximo para el parámetro  $a$  es de apenas 0.9%.

$a$	$b$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	% Error en $\hat{a}$	% Error en $\hat{b}$
0.92	0.2713	0.9145	0.2845	0.59782609	4.86546259
0.935	0.2713	0.9265	0.2834	0.90909091	4.46000737
0.95	0.2713	0.9492	0.2709	0.08421053	0.14743826
0.92	0.2713	0.9158	0.2855	0.45652174	5.23405824

Tabla 4.7 – Valores reales y valores estimados por MCR

### Comparación de desempeño entre el DMC y el DMC adaptivo ante cambios del parámetro $a$ .

En la tabla 4.8 se muestran los indicadores de desempeño del controlador DMC. En la tabla 4.9 se muestran los indicadores de desempeño del controlador DMC adaptivo.

DMC	Referencia 1	Referencia 2	Referencia 3	Referencia 4
%MP	1.9	5.4	25	0
Tr	22	19.5	18.5	21.5
Ts	26	21.6	55	27.3

Tabla 4.8 - Indicadores de desempeño para el DMC

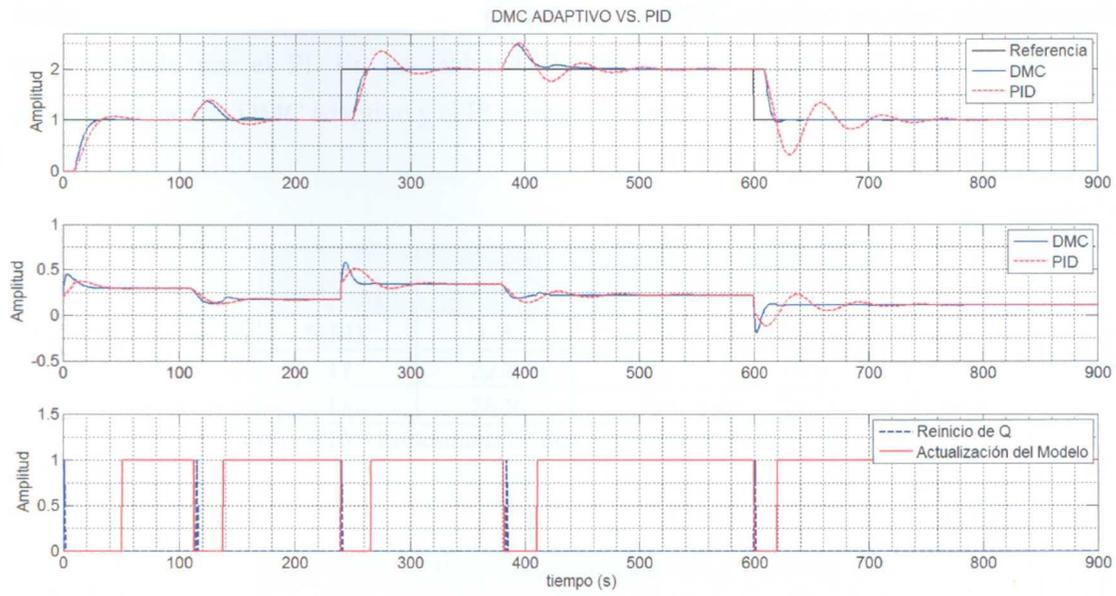
DMC adap.	Referencia 1	Referencia 2	Referencia 3	Referencia 4
%MP	1.9	0.6	0.59	2
Tr	21.8	20.2	20	20.3
Ts	26	25	24	29

Tabla 4.9 - Indicadores de desempeño para el DMC adaptivo

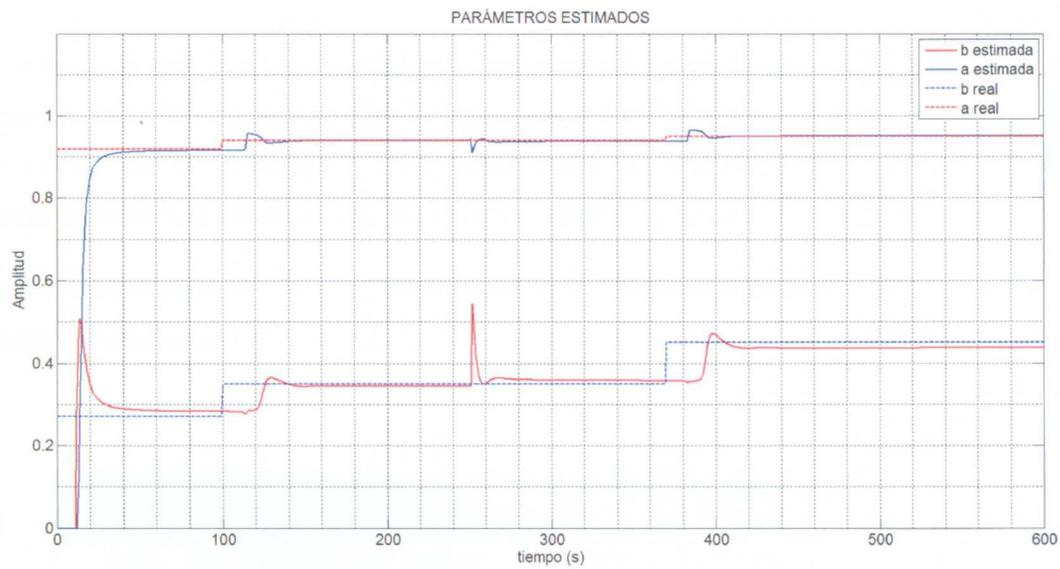
Podemos observar una mejora en los indicadores de desempeño al incluir el mecanismo de adaptación. Se logra reducir el sobretiro máximo obtenido por el DMC sin adaptación de 25% a apenas un 0.59%. También se mejora el tiempo de estabilización más lento del DMC sin adaptación de 55 seg. a 24 seg.

### Comparación de desempeño entre el DMC adaptivo y un PI ante cambios del parámetro

Como última prueba se compara el rendimiento que brinda el DMC adaptivo vs. un PI. En la figura 4.10 podemos ver los resultados obtenidos.



**Fig. 4.10 – DMC adaptivo vs. PI**



**Fig. 4.11 - Evolución de los parámetros estimados**

Podemos observar que el rendimiento brindado por el DMC adaptivo superior al rendimiento proporcionado por el PI. En las tablas 4.10 y 4.11 podemos observar los indicadores de desempeño para el DMC adaptivo y el PI respectivamente.

DMC adap.	Referencia 1	Referencia 2	Referencia 3
%MP	1.3	0.25	4
Tr	22.8	18.5	15.8
Ts	26.9	22	24.2

**Tabla 4.10 – Indicadores de desempeño para el DMC adaptivo**

PI	Referencia 1	Referencia 2	Referencia 3
%MP	7.1	36	68
Tr	28.2	22	18.2
Ts	31.5	22.6	171.5

**Tabla 4.11 – Indicadores de desempeño para el PI**

Las diferencias son notables principalmente en los sobretiros producidos bajo el controlador PI llegando a tener un sobretiro de 68% mientras que el DMC adaptivo limita los sobretiros a un máximo de 4%. En el tiempo de estabilización notamos una mejora notable para el tercer cambio de referencia siendo 24 seg. para el DMC adaptivo y 171.5 seg. para el PI.

Adicionalmente podemos observar la evolución de los parámetros en la figura 4.11 y el detalle es estos parámetros en la tabla 4.12.

$a$	$b$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	% Error en $\hat{a}$	% Error en $\hat{b}$
0.92	0.2713	0.9147	0.2819	0.57608696	3.9071139
0.94	0.35	0.9404	0.3655	0.04255319	4.42857143
0.95	0.45	0.9511	0.4396	0.11578947	2.31111111

**Tabla 4.12 – Valores reales y valores estimados por MCR**

## **4.2 Implementación del controlador en un proceso de laboratorio**

---

Con ánimos de mostrar el funcionamiento del controlador junto con el mecanismo de adaptación propuesto se presenta su implementación sobre un proceso real.

A continuación se presenta el diseño del controlador para esta aplicación, los resultados obtenidos y comparaciones para el DMC y el DMC con mecanismo de adaptación.

### **Descripción del Proceso**

El controlador DMC fue aplicado a un proceso térmico compuesto por un conjunto de resistencias y un ventilador. La variable del proceso es la temperatura medida al extremo del conducto del secador mientras que la variable de control es el porcentaje de la alimentación AC que se deja pasar a los resistores. Controlando el ciclo de trabajo de esta señal se controla la potencia disipada en las resistencias.

### **Diseño del Controlador**

Para el diseño del controlador DMC se requiere obtener la respuesta al escalón del sistema y elegir los parámetros de ajuste propios del controlador. Para la selección de estos parámetros se ha utilizado el método propuesto en [12] presentado en el apéndice A.

La respuesta al escalón se obtuvo bajo la operación manual del proceso en lazo abierto. Utilizar un escalón unitario para este sistema en particular no genera información relevante limitando el comportamiento dinámico del sistema a un nivel local muy restringido. Se utilizó arbitrariamente un escalón a la entrada del 30% buscando obtener información relevante de la dinámica del proceso. La respuesta obtenida muestra claramente una respuesta aproximada de primer orden como se puede observar en la figura 4.12.



Fig. 4.12 – Resposta del sistema ante un escalón de 30%

### Parámetros del controlador DMC

Los valores para los distintos parámetros del controlador, calculados a partir del método propuesto en [12] y con ajuste posterior son:

$$p = 298$$

$$N = 298$$

$$m = 100$$

$$\lambda = 60$$

Los valores de los parámetros utilizados en el mecanismo de adaptación fueron los siguientes:

$$na = 1$$

$$nb = 1$$

$$nd = 3$$

$$\gamma = 0.99$$

$$c_1 = 3$$

$$c_2 = 3$$

$$c_3 = 3$$

$$c_4 = 0.001$$

$$c_5 = 3$$

### Prueba # 1: DMC ante cambios de referencia

Para esta prueba se utilizó el controlador DMC sin utilizar el mecanismo de adaptación y así crear una base de comparación para evaluar el rendimiento del DMC adaptivo. La prueba consistió en una serie de cambios de referencia cuyo detalle se muestra en la tabla 4.13.

Tiempo del cambio de Ref.	Referencia
0	40
269	50
461	60
657	50
842	40

Tabla 4.13 – Referencias utilizadas en la prueba #1

El resultado obtenido en esta prueba puede observarse en la figura 4.13

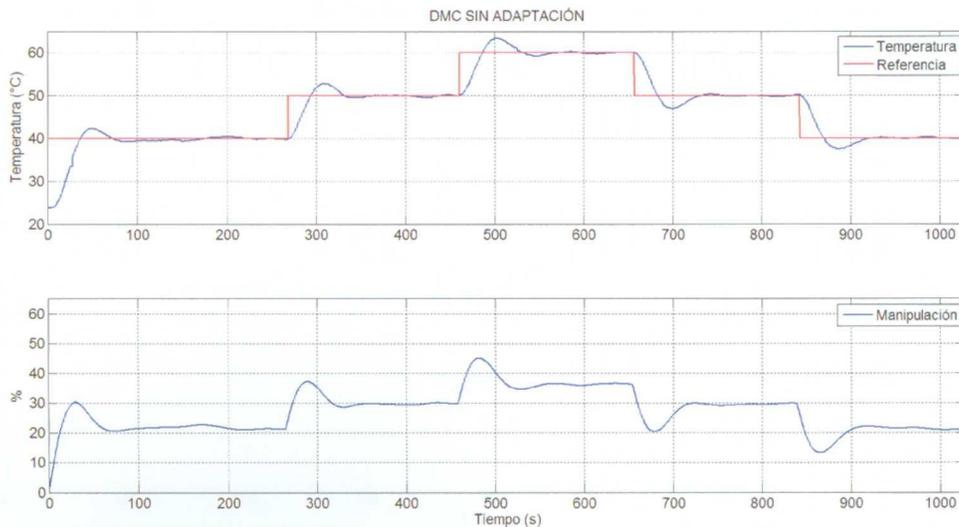


Fig. 4.13 - Respuesta del sistema ante cambios en referencia

### Prueba #2: DMC adaptivo ante cambios de referencia

De forma similar a la prueba anterior se obtiene la respuesta del sistema ante cambios de referencia utilizando esta vez el controlador DMC adaptivo. En la tabla 4.14 se muestra en detalle los cambios de referencia aplicados.

Tiempo del cambio de Ref.	Referencia
0	40
190	50
313	60
460	50
616	40

Tabla 4.14 – Referencias utilizadas en la prueba #2

En las figuras 4.14 y 4.15 podemos observar la evolución de la temperatura y la evolución de los parámetros estimados respectivamente.

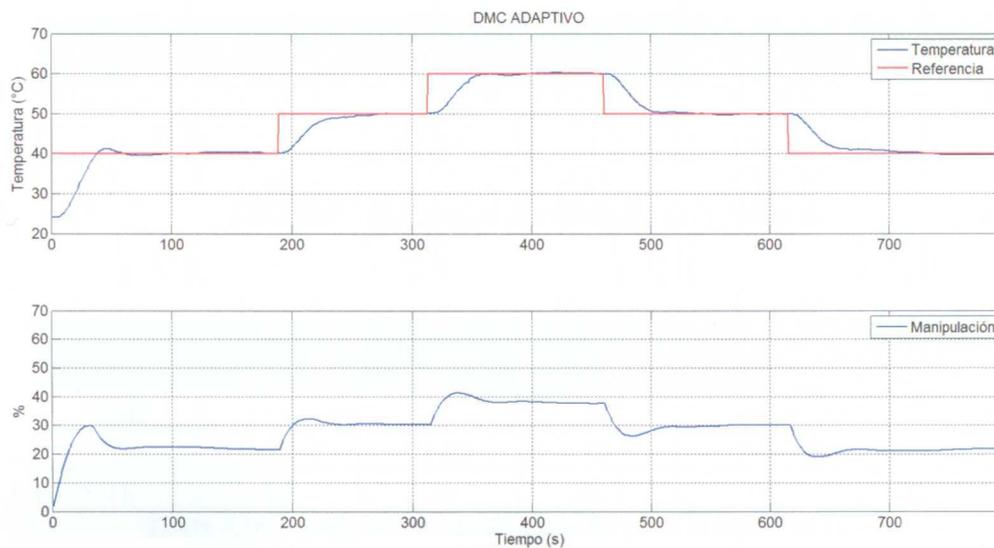
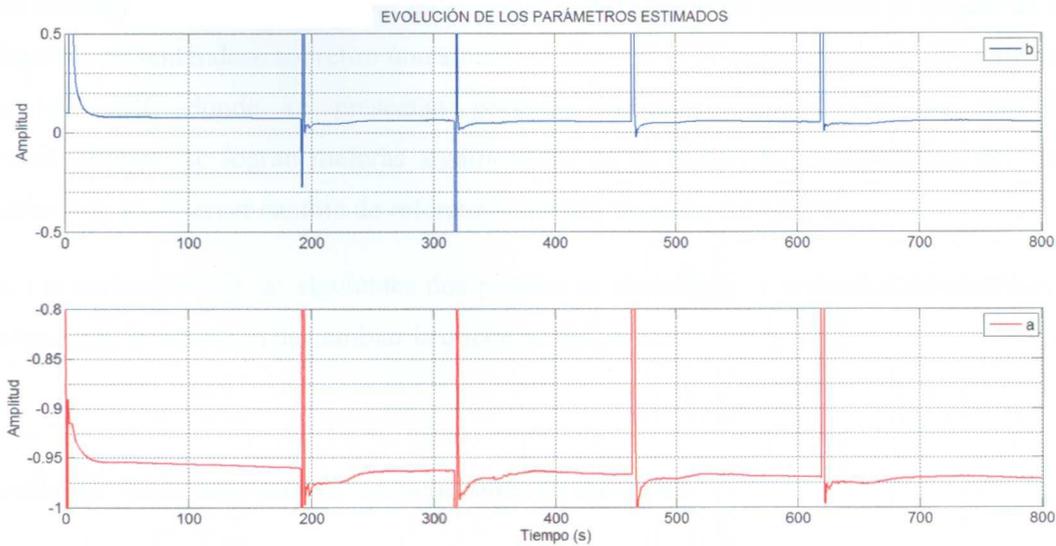


Fig. 4.14 - Respuesta del sistema ante cambios en referencia



**Fig. 4.15 - Evolución de los Parámetros estimados**

### Comparación del DMC y el DMC adaptivo ante cambio de referencias

En las tablas 4.15 y 4.16 se muestra el desempeño del DMC y el DMC adaptivo respectivamente.

DMC	Referencia 1	Referencia 2	Referencia 3	Referencia 4	Referencia 5
%MP	6	5.6	5.67	6	6.25
Tr	28.4	13.4	11.6	16.4	18
Ts	66	57.25	62	63.5	68

**Tabla 4.15 – Indicadores de desempeño para el DMC**

DMC adap.	Referencia 1	Referencia 2	Referencia 3	Referencia 4	Referencia 5
%MP	3	0	0	0	0
Tr	29	21.25	20	22	27
Ts	52	50	35.5	38	75

**Tabla 4.16 – Indicadores de desempeño para el DMC adaptivo**

Los resultados indican una mejora en el porcentaje de sobretiro producido al utilizar el DMC adaptivo, presentándose sobretiro únicamente al alcanzar la primera referencia en comparación con el DMC donde se presentan pequeños sobretiros sobre todas las referencias. Adicionalmente se logran mejoras significativas en el tiempo de estabilización del sistema obteniendo en el tercer cambio de referencia una disminución del 42.7%.

Para la realización de las siguientes dos pruebas se disminuyó la velocidad del ventilador del sistema con la intención de cambiar la dinámica del mismo.

### Prueba #3: DMC ante cambio en condiciones de operación

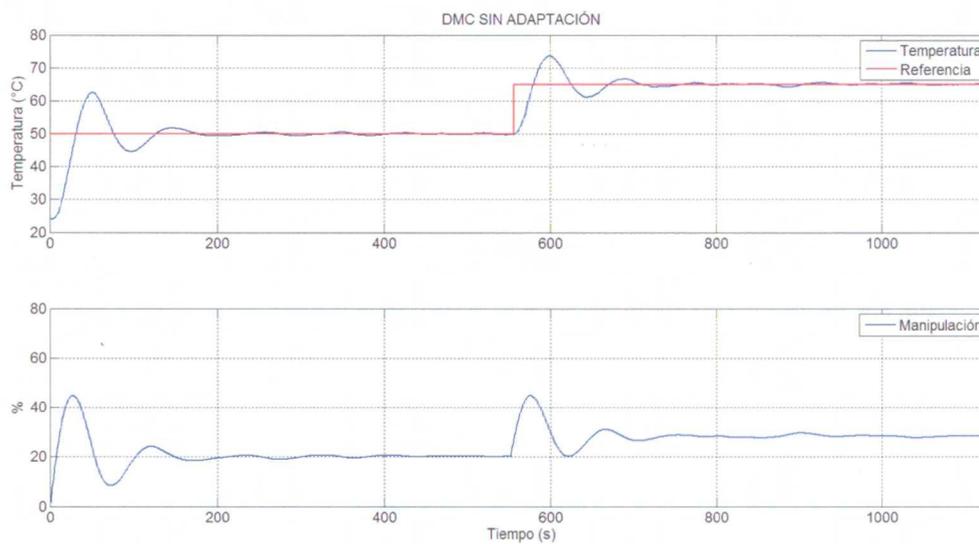


Fig. 4.16 - Respuesta ante cambio de condiciones de operación con DMC

### Prueba #4: DMC adaptivo ante cambio en condiciones de operación

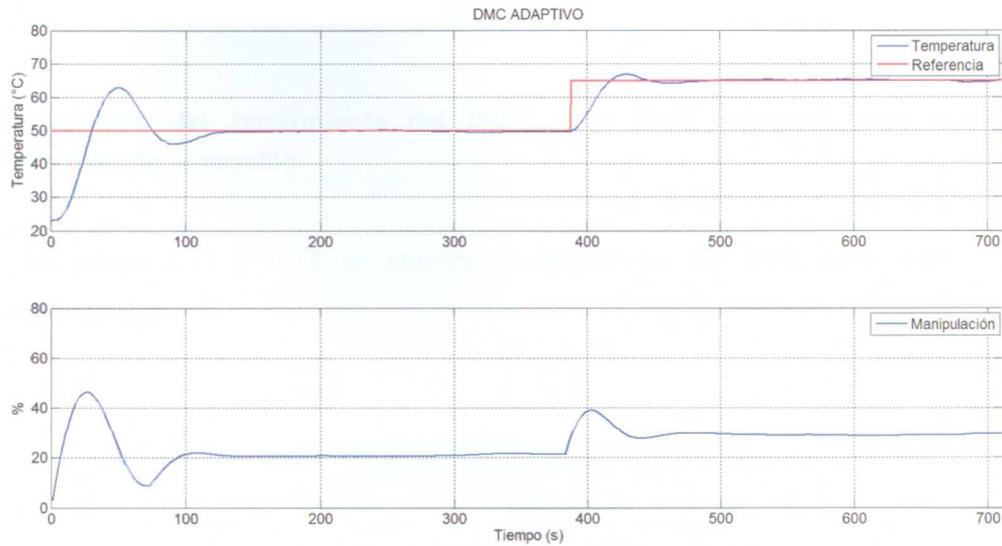


Fig. 4.17 – Respuesta ante cambio de condiciones de operación con DMC adaptivo

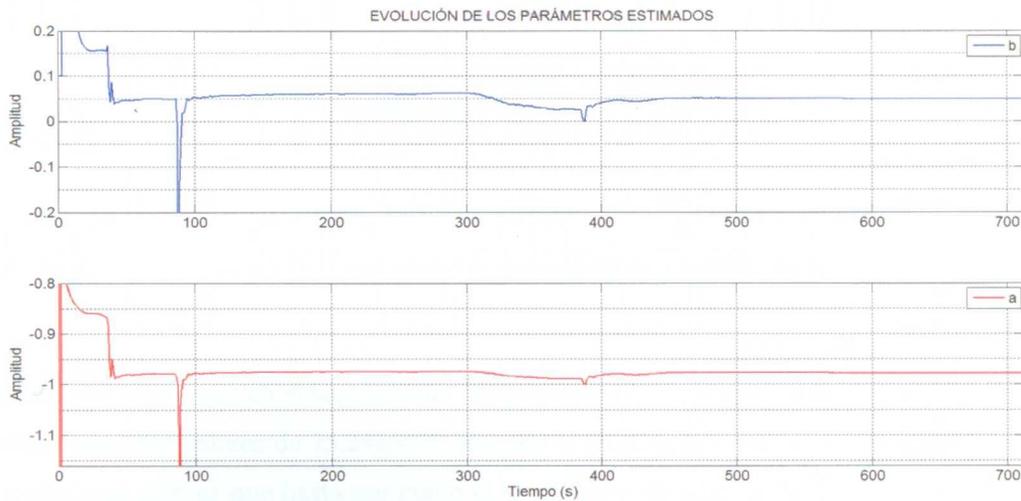


Fig. 4.18 - Evolución de los parámetros estimados

En las figuras 4.16 podemos observar el comportamiento del sistema al cambiar las condiciones de operación del proceso antes de iniciar la prueba utilizando el controlador DMC. En las figuras 4.17 y 4.18 podemos ver el comportamiento del sistema, para cambio de las condiciones

de operación previo a la prueba utilizando el controlador DMC adaptivo, y la evolución de los parámetros estimados respectivamente.

### **Comparación del rendimiento del DMC y el DMC adaptivo ante cambios en condiciones de operación**

En las tablas 4.17 y 4.18 se muestra el desempeño del DMC y el DMC adaptivo respectivamente.

DMC	Referencia 1	Referencia 2
%MP	25.2	13.23
Tr	27.3	21.66
Ts	162.5	140.5

**Tabla 4.17 – Indicadores de desempeño para el DMC**

DMC adap.	Referencia 1	Referencia 2
%MP	25.3	2.92
Tr	26.5	16.8
Ts	117	49

**Tabla 4.18 – Indicadores de desempeño para el DMC adaptivo**

Podemos observar que en el seguimiento del primer escalón, se presenta un sobretiro similar en ambos casos con valores de 25.2% y 25.3% para el DMC y el DMC adaptivo respectivamente, la razón para esto es que hasta ese punto el mecanismo de adaptación no había actualizado el modelo del proceso. Se puede apreciar una mejora de rendimiento por parte del DMC adaptivo obteniendo una disminución del 28% en el primer tiempo de estabilización comparado con el logrado por el controlador DMC.

Para el segundo cambio de referencia, se logra una mejora aún mejor en el rendimiento del sistema. Se obtiene un sobretiro del 2.92% en el DMC adaptivo comparado con un sobretiro de

13.23% con el DMC. El tiempo de estabilización es también mejorado en el caso del DMC adaptivo presentando una disminución del 65.12% del tiempo de estabilización logrado con el DMC.

### Prueba #5: DMC ante cambio repentino de condiciones de operación

Para la realización de esta prueba se lleva al sistema a una referencia de 50 °C y repentinamente se bloquea parte de la salida de aire del sistema. Este bloqueo se mantiene por el resto de la prueba con lo que cambia la dinámica del sistema a partir de ese momento. En la figura 4.17 se muestra la respuesta obtenida para esta prueba.

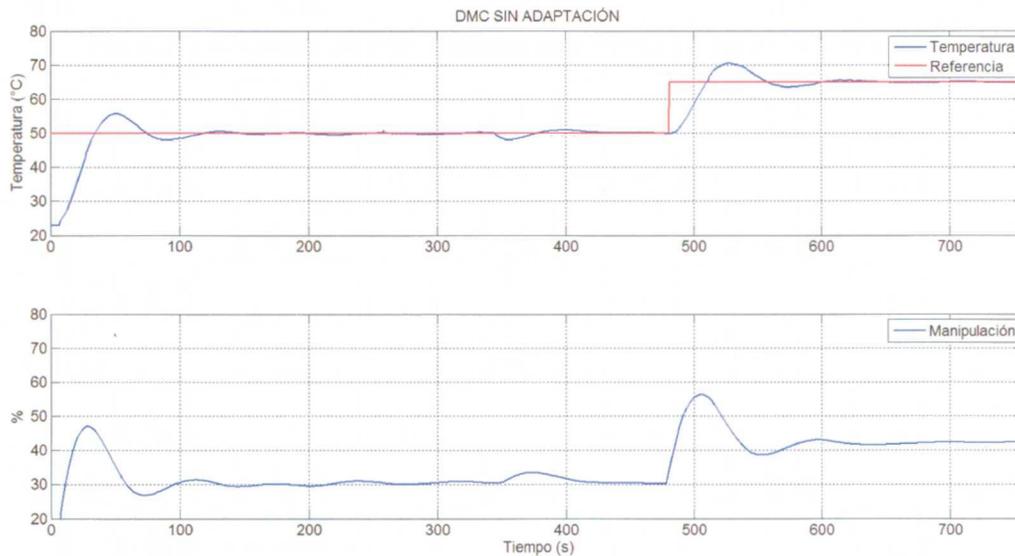
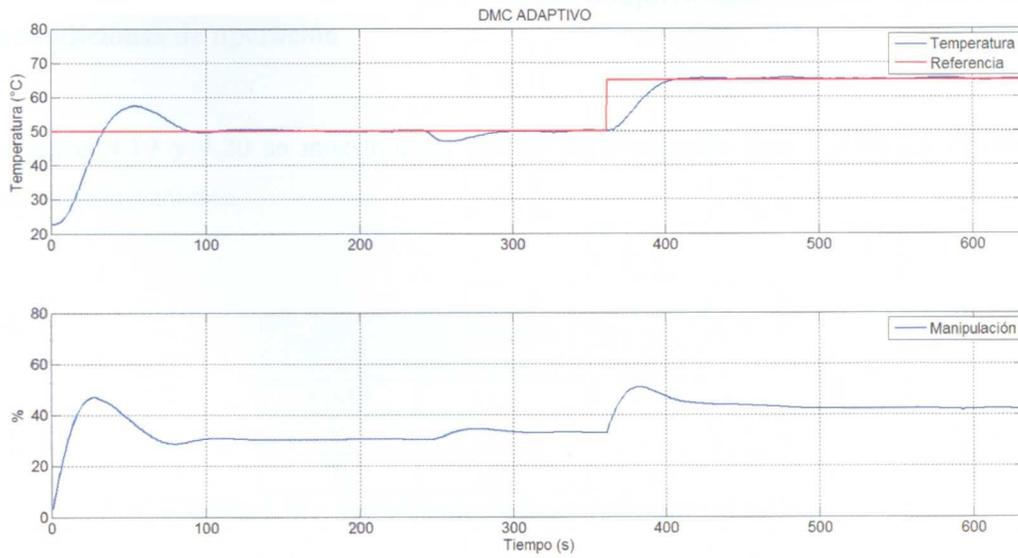


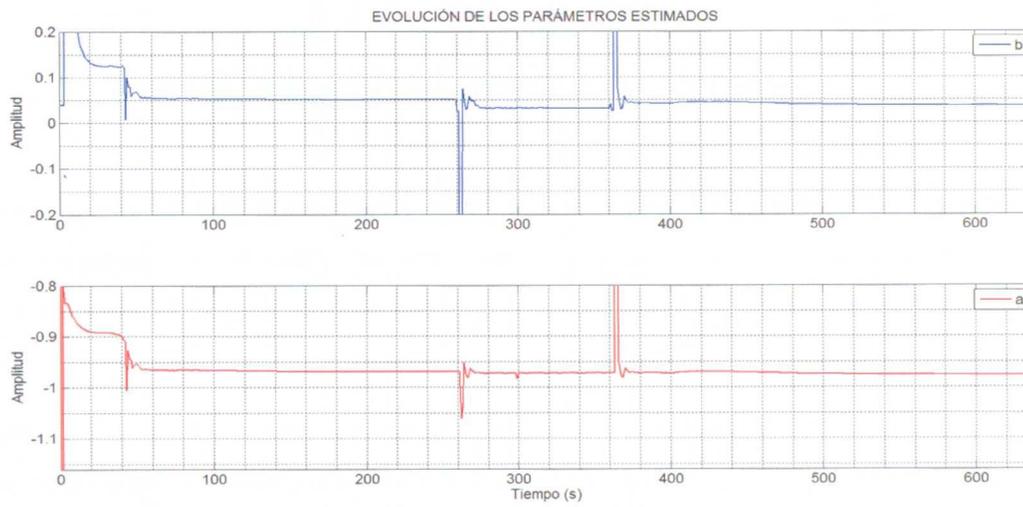
Fig. 4.19 – Respuesta del DMC ante cambio repentino de operación

### Prueba #6: DMC adaptivo ante cambio repentino de condiciones de operación

De igual manera que para la Prueba #5 se lleva al sistema a una referencia de 50°C y posteriormente se bloquea parte de la salida de aire del sistema. La respuesta obtenida se presenta en la figura 4.18



**Fig. 4.20 – Respuesta del DMC adaptivo ante cambio repentino de operación**



**Fig. 4.21 – Evolución de los parámetros estimados**

### Comparación del rendimiento del DMC y el DMC adaptivo ante cambios repentinos en las condiciones de operación

En las tablas 4.19 y 4.20 se muestran los índices de desempeño para el DMC y el DMC adaptivo respectivamente.

DMC	Referencia 1	Referencia 2
%MP	11.6	8.46
Tr	29	19
Ts	107	98

Tabla 4.19 – Indicadores de desempeño para el DMC

DMC	Referencia 1	Referencia 2
%MP	14.8	0.7
Tr	27.9	21.4
Ts	83.7	35.3

Tabla 4.20 - Indicadores de desempeño para el DMC adaptivo

Podemos observar un mejor desempeño en cuanto al tiempo de estabilización del DMC adaptivo comparado con el DMC. Se logra una disminución del 21.8% en el tiempo de estabilización para el seguimiento de la primera referencia y de 63.78% en la segunda referencia.

En cuanto al porcentaje de sobretiro, tenemos 3.2% más sobretiro para el DMC adaptivo ante el seguimiento de la primera referencia, mientras que se logra un 7.76% de sobretiro con el DMC adaptivo ante el seguimiento de la segunda referencia.

# **Capítulo 5.**

## Conclusiones y Trabajos Futuros

## 5.1 Conclusiones

---

Las reglas propuestas en el capítulo 3 en conjunto con los métodos y consideraciones para la identificación en lazo cerrado [13] [14] [3], generan un mecanismo de adaptación que cumple tanto con el correcto accionamiento del estimador de mínimos cuadrados recursivos como con la correcta actualización del modelo del proceso.

Se puede concluir que la implementación conjunta del mecanismo de adaptación propuesto en el capítulo 3 de este trabajo brinda una mejora en el desempeño general del sistema. Fue claro tanto a nivel de simulación como de implementación en la planta real, que la versión adaptiva del controlador DMC presenta mejor comportamiento ante las posibles imprecisiones del modelo identificado para el diseño del controlador DMC estándar de igual manera que para los cambios en las condiciones de operación del sistema a controlar. Esta aseveración se basa en los resultados presentados en el capítulo 4 donde se observaron disminuciones considerables en el tiempo de estabilización y en el sobretiro generado.

Tanto las simulaciones como la implementación se desarrollaron con sistemas que se han modelado como un ARX donde se asume que las perturbaciones que actúan sobre el sistema son de carácter gaussiano. En sistemas o modelos que no cumplen con esta asunción, será necesario redefinir el mecanismo de adaptación utilizando modelos de ruido correctos como se ha detallado en [14] especialmente al utilizar un método de identificación directa. Resulta importante cuando se manejen sistemas ruidosos, realizar un filtrado de los datos previo a su entrada al estimador, como se plantea en [3], para evitar que el ruido produzca sesgo en el estimador.

Finalmente podemos concluir que se logra el objetivo global de esta investigación, obteniendo un controlador DMC adaptivo que presenta mejor robustez ante condiciones cambiantes del sistema.

## 5.2 Trabajos Futuros

---

A partir de este trabajo se pueden derivar investigaciones posteriores como pueden ser:

- Desarrollar un análisis de estabilidad del DMC adaptivo presentado en este trabajo
- Extender el sistema propuesto para el caso multivariable
- Extender el mecanismo de adaptación propuesto para la inclusión de modelos de ruido
- Desarrollar un clasificador para identificar los cambios de parámetros del proceso y accionar de manera correcta el mecanismo de adaptación

## Bibliografía

- [1] Don Morrison, "Is it time to replace PID?," *International Society of Automation*, marzo 2005.
- [2] J. M. Maciejowski, *Predictive Control with Constraints.*: Prentice Hall.
- [3] Karl Johan Åström and Wittenmark Björn, *Adaptive Control*, segunda edición ed., Addison-Wesley, Ed. Estados Unidos, 1994.
- [4] J. A. Rossiter, *Model Based Predictive Control: A Practical Approach*. United States of America: CRC Press, 2004.
- [5] J. A. Richalet, A. Rault, J. D. Testud, and J. Papon, "Model Predictive Heuristic Control: Application to Industrial Processes," *Automatica*, no. 13, p. 413, 1978.
- [6] C. R. Cutler and B. Ramaker, "Dynamic matrix control—a computer control algorithm," in *Joint Automatic Control Conference* , 1980.
- [7] C. E. Garcia and A. M. Morshedi, "Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC)," *Chem. Eng. Commun*, no. 46, pp. 73-87, 1986.
- [8] D. W. Clarke, C. Mohtadi , and P. S. Tuffs, "Generalised predictive control, Parts 1 and 2," *Automatica*, no. 23, pp. 137-160, 1987.
- [9] N. L. Ricker, "Model Predictive Control: State of the Art," in *International Conference on Chemical Process Control*, Padre Island, 1991, pp. 271-296.
- [10] J. B. Rawlings and K. R. Muske, "The Stability of Constrained Receding Horizon Control," in *IEEE trans. on Auto. Control*, 1993, pp. 1512-1516.
- [11] Eduardo F. Camacho and Carlos Bordons, *Model Predictive Control*. Londres, Gran Bretaña: Springer, 1998.
- [12] Rahul Shridhar and Douglas J. Cooper, "A Tuning Strategy for Unconstrained SISO Model Predictive Control," *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 36, no. 3, pp. 729-746, 1997.
- [13] Urban Forssell, Properties and Usage of Closed-Loop Identification Methods, 1997, Tesis N°641, Division of Automatic Control, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Suecia.

- [14] Torsten Söderström and Petre Stoica, *System Identification*. Cambridge: Prentice Hall International, 1988.
- [15] Lennart Ljung, *System Identification: Theory for the User*, Segunda Edición ed.: Prentice Hall, 1999.
- [16] Chang Hang, Tong Lee, and Weng Ho, *Adaptive Control*. Carolina del Norte, Estados Unidos: Instrument Society of America, 1993.

# Apéndice A

En [12] se propone el siguiente método para la sintonía de los parámetros del controlador DMC

1. Aproximar el modelo del proceso a un modelo de primer orden con tiempo muerto

$$G_p(s) = \frac{K_p}{1 + \tau_p s} e^{-\theta s}$$

2. Seleccione el horizonte de predicción  $p$  y el tiempo de estabilización  $N$  a partir de:

$$p = N = \frac{5\tau_p}{T} + \frac{\tau_p}{T} + 1$$

3. Seleccione del horizonte de control  $m$  a partir de:

$$m = 2 \frac{\tau_p}{T} + 1$$

4. Seleccione el coeficiente de supresión como:

$$\lambda = \begin{cases} 0 & m = 1 \\ \frac{m}{10} \left( \frac{3.5\tau_p}{T} + 2 - \frac{(m-1)}{2} \right) K_p^2 & m = 0 \end{cases}$$

# Apéndice B

## Ejemplo de Aplicación del Algoritmo DMC

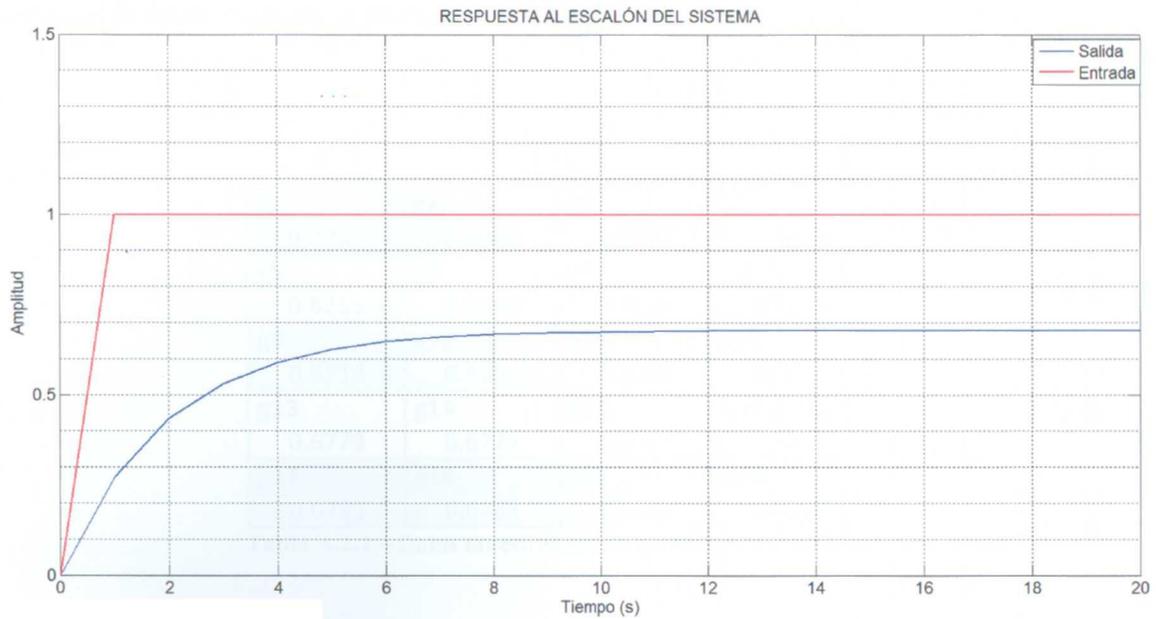
---

A continuación se presenta un ejemplo de la aplicación del algoritmo de control DMC mostrando el desarrollo de cada uno de los pasos.

Supongamos que tenemos un sistema de primer orden cuya función de transferencia discreta es:

$$G(z) = \frac{0.2713}{1 - 0.6z^{-1}}$$

Aplicando un escalón unitario al sistema obtenemos la respuesta mostrada en la figura A.2.1



**Fig. A.2.1 – Respuesta al escalón del sistema**

Paso #1: obtener la respuesta al escalón del sistema.

<b>g1</b> 0.2713	<b>g2</b> 0.4340	<b>g3</b> 0.5317	<b>g4</b> 0.5903
<b>g5</b> 0.6255	<b>g6</b> 0.6466	<b>g7</b> 0.6592	<b>g8</b> 0.6668
<b>g9</b> 0.6714	<b>g10</b> 0.6741	<b>g11</b> 0.6757	<b>g12</b> 0.6767
<b>g13</b> 0.6773	<b>g14</b> 0.6777	<b>g15</b> 0.6779	<b>g16</b> 0.6780
<b>g17</b> 0.6781	<b>g18</b> 0.6781	<b>g19</b> 0.6782	<b>g20</b> 0.6782

Paso #1: obtener el vector  $g$ .

Los datos muestreados de la respuesta al escalón, nos proporcionan los elementos para conformar el vector  $g$ . Para este caso se utiliza un tiempo de muestreo de un segundo. El conjunto de datos obtenidos se muestra en la tabla A.2.1

<b>g1</b> 0.2713	<b>g2</b> 0.4340	<b>g3</b> 0.5317	<b>g4</b> 0.5903
<b>g5</b> 0.6255	<b>g6</b> 0.6466	<b>g7</b> 0.6592	<b>g8</b> 0.6668
<b>g9</b> 0.6714	<b>g10</b> 0.6741	<b>g11</b> 0.6757	<b>g12</b> 0.6767
<b>g13</b> 0.6773	<b>g14</b> 0.6777	<b>g15</b> 0.6779	<b>g16</b> 0.6780
<b>g17</b> 0.6781	<b>g18</b> 0.6781	<b>g19</b> 0.6782	<b>g20</b> 0.6782

Tabla A.2.1 – Datos muestreados de la respuesta al escalón

Paso #2: Seleccionar  $p$ ,  $m$ ,  $N$  y  $\lambda$

Se utilizan los siguientes valores para los parámetros de diseño del controlador:

$p$	10
$m$	5
$N$	10
$\lambda$	1

Tabla A.2.2 – Parámetros del Controlador DMC

Paso #3: Construcción de la matriz G

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_3 & g_2 & g_1 & 0 & 0 \\ g_4 & g_3 & g_2 & g_1 & 0 \\ g_5 & g_4 & g_3 & g_2 & g_1 \\ g_6 & g_5 & g_4 & g_3 & g_2 \\ g_7 & g_6 & g_5 & g_4 & g_3 \\ g_8 & g_7 & g_6 & g_5 & g_4 \\ g_9 & g_8 & g_7 & g_6 & g_5 \\ g_{10} & g_9 & g_8 & g_7 & g_6 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.2713 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.43408 & 0.2713 & 0 & 0 & 0 \\ 0.531748 & 0.43408 & 0.2713 & 0 & 0 \\ 0.5903488 & 0.531748 & 0.43408 & 0.2713 & 0 \\ 0.62550928 & 0.5903488 & 0.531748 & 0.43408 & 0.2713 \\ 0.64660557 & 0.62550928 & 0.5903488 & 0.531748 & 0.43408 \\ 0.65926334 & 0.64660557 & 0.62550928 & 0.5903488 & 0.531748 \\ 0.666858 & 0.65926334 & 0.64660557 & 0.62550928 & 0.5903488 \\ 0.6714148 & 0.666858 & 0.65926334 & 0.64660557 & 0.62550928 \\ 0.67414888 & 0.6714148 & 0.666858 & 0.65926334 & 0.64660557 \end{bmatrix}$$

Paso #4: Construcción de la matriz H

$$H = \begin{bmatrix} (g_2 - g_1) & (g_3 - g_2) & (g_4 - g_3) & (g_5 - g_4) & \dots & (g_{11} - g_{10}) \\ (g_3 - g_1) & (g_4 - g_2) & (g_5 - g_3) & (g_6 - g_4) & \dots & (g_{12} - g_{10}) \\ (g_4 - g_1) & (g_5 - g_2) & (g_6 - g_3) & (g_7 - g_4) & \dots & (g_{13} - g_{10}) \\ (g_5 - g_1) & (g_6 - g_2) & (g_7 - g_3) & (g_8 - g_4) & \dots & (g_{14} - g_{10}) \\ (g_6 - g_1) & (g_7 - g_2) & (g_8 - g_3) & (g_9 - g_4) & \dots & (g_{15} - g_{10}) \\ (g_7 - g_1) & (g_8 - g_2) & (g_9 - g_3) & (g_{10} - g_4) & \dots & (g_{16} - g_{10}) \\ (g_8 - g_1) & (g_9 - g_2) & (g_{10} - g_3) & (g_{11} - g_4) & \dots & (g_{17} - g_{10}) \\ (g_9 - g_1) & (g_{10} - g_2) & (g_{11} - g_3) & (g_{12} - g_4) & \dots & (g_{18} - g_{10}) \\ (g_{10} - g_1) & (g_{11} - g_2) & (g_{12} - g_3) & (g_{13} - g_4) & \dots & (g_{19} - g_{10}) \\ (g_{11} - g_1) & (g_{12} - g_2) & (g_{13} - g_3) & (g_{14} - g_4) & \dots & (g_{20} - g_{10}) \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.1627 & 0.0976 & 0.0586 & 0.0351 & 0.0210 & 0.0126 & 0.00759 & 0.0045 & 0.0027 & 0.0016 \\ 0.2604 & 0.1562 & 0.0937 & 0.0562 & 0.0337 & 0.0202 & 0.0121 & 0.0072 & 0.0043 & 0.0026 \\ 0.3190 & 0.1914 & 0.1148 & 0.0689 & 0.0413 & 0.0248 & 0.0148 & 0.0089 & 0.0053 & 0.0032 \\ 0.3542 & 0.2125 & 0.1275 & 0.0765 & 0.0459 & 0.0275 & 0.0165 & 0.0099 & 0.0059 & 0.0035 \\ 0.3753 & 0.2251 & 0.1351 & 0.0810 & 0.0486 & 0.0291 & 0.0175 & 0.0105 & 0.00630 & 0.0037 \\ 0.3879 & 0.2327 & 0.1396 & 0.0838 & 0.0502 & 0.0301 & 0.0181 & 0.0108 & 0.0065 & 0.0039 \\ 0.3955 & 0.2373 & 0.1424 & 0.0854 & 0.0512 & 0.0307 & 0.0184 & 0.0110 & 0.0066 & 0.0039 \\ 0.4001 & 0.2400 & 0.1440 & 0.0864 & 0.0518 & 0.0311 & 0.0186 & 0.0112 & 0.0067 & 0.0040 \\ 0.4028 & 0.2417 & 0.1450 & 0.0870 & 0.0522 & 0.0313 & 0.0187 & 0.0112 & 0.0067 & 0.0040 \\ 0.4044 & 0.2426 & 0.1456 & 0.0873 & 0.0524 & 0.0314 & 0.0188 & 0.0113 & 0.0067 & 0.0040 \end{bmatrix}$$

Paso #5: Calcular E

$$E = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$$

$$E = \begin{bmatrix} 0.1684 & 0.1946 & 0.1615 & 0.1124 & 0.0665 & 0.0390 & 0.0225 & 0.0126 & 0.0066 & 0.0031 \\ -0.0748 & 0.0806 & 0.1187 & 0.1029 & 0.0673 & 0.0460 & 0.0332 & 0.0255 & 0.0209 & 0.0182 \\ -0.0487 & -0.1332 & 0.0277 & 0.0732 & 0.0605 & 0.0529 & 0.0483 & 0.0456 & 0.0439 & 0.0429 \\ -0.0292 & -0.0855 & -0.1703 & -0.0109 & 0.0278 & 0.0510 & 0.0650 & 0.0734 & 0.0784 & 0.0814 \\ -0.0164 & -0.0523 & -0.1138 & -0.2075 & -0.0634 & 0.0230 & 0.0749 & 0.1061 & 0.1247 & 0.1360 \end{bmatrix}$$

Paso #6: obtener  $y_m$

$$y_m = 0$$

Paso #7: obtener  $r$

$$r = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

Paso #8: obtener  $\Delta u_p$

$$\Delta u_p = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Notando que al iniciar el algoritmo las señales de control pasadas son nulas.

Paso #9: calcular  $f$

$$f = H\Delta u_p + y_m$$
$$f = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Paso #10: calcular  $\Delta u$

$$\Delta u = [1 \ 0 \ \dots \ 0]E(r - f)$$
$$\Delta u = 0.7876$$

Paso #11: Aplicar  $\Delta u$

Se itera desde el paso #6.

A continuación se presentan dos iteraciones adicionales

K=1

$$y_m = 0.2137$$

$$r = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

$$\Delta u_p = [0.7876 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$f = [0.3419 \ 0.4188 \ 0.4650 \ 0.4927 \ 0.5093 \ 0.5193 \ 0.5252 \ 0.5288 \ 0.5310 \ 0.5323]^T$$

$$\Delta u = 0.4401$$

K=2

$$y_m = 0.4613$$

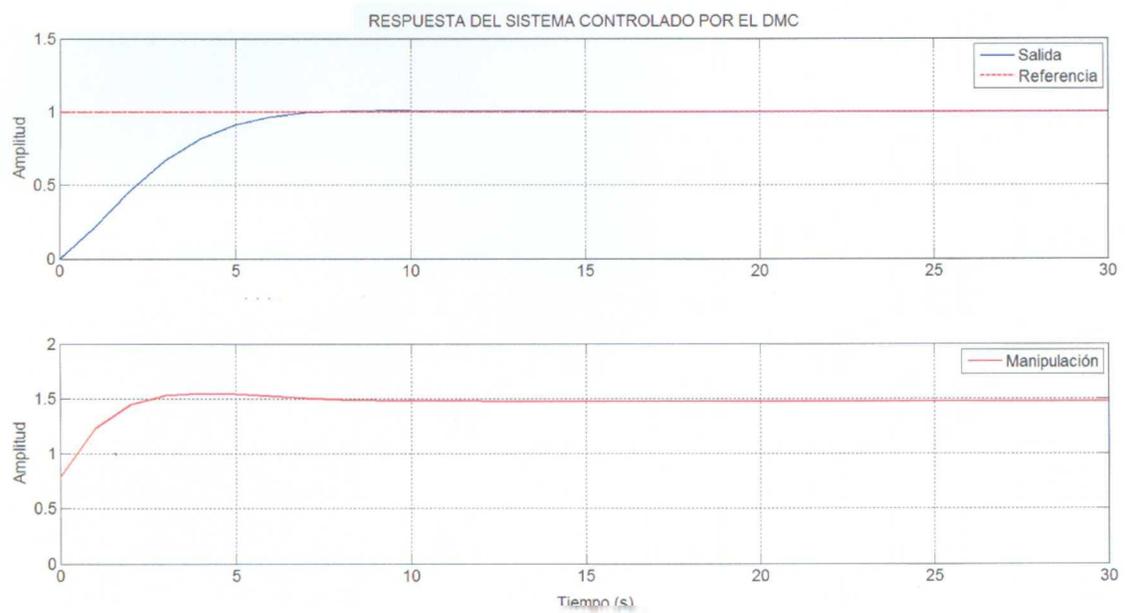
$$r = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

$$\Delta u_p = [0.4401 \quad 0.7674 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$f = [0.6099 \quad 0.6990 \quad 0.7525 \quad 0.7846 \quad 0.8038 \quad 0.8154 \quad 0.8223 \quad 0.8265 \quad 0.7081 \quad 0.8305]^T$$

$$\Delta u = 0.2166$$

Después de 30 iteraciones obtenemos el resultado presentado en la figura A.2.2



**Fig.A.2.2 – Respuesta del sistema en lazo cerrado**

Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey



**30002007497449**

<http://biblioteca.mty.itesm.mx>