

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS  
SUPERIORES DE MONTERREY**  
CAMPUS MONTERREY  
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA



**T E S I S**

**ALGORITMO PARA DETERMINAR LA REGION  
TRIDIMENSIONAL DESDE LA CUAL UN OBJETO  
ES TOTALMENTE VISIBLE**

**MAESTRO EN CIENCIAS**

**ESPECIALIDAD EN INGENIERIA ELECTRONICA**

**LUIS ERNESTO RAMIREZ VELARDE**

**DICIEMBRE DE 1994**

045.62  
TEC.94  
1994  
C.2

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS  
SUPERIORES DE MONTERREY**

**CAMPUS MONTERREY  
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA**



**T E S I S**

**ALGORITMO PARA DETERMINAR LA REGIÓN  
TRIDIMENSIONAL DESDE LA CUAL UN OBJETO  
ES TOTALMENTE VISIBLE**

**MAESTRO EN CIENCIAS  
ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

**LUIS ERNESTO RAMIREZ VELARDE**

**DICIEMBRE DE 1994**

**Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de  
Monterrey  
Campus Monterrey**

Programa de Graduados en Ingeniería

**Tesis**

**Algoritmo para determinar la región tridimensional  
desde la cual un objeto es totalmente visible.**

Maestro en Ciencias  
Especialidad en Ingeniería Electrónica

Luis Ernesto Ramírez Velarde

Diciembre de 1994.



## Dedicatoria

---

Este trabajo está dedicado a todas las personas que de alguna u otra forma me ayudaron a salir adelante.

A mis padres, Valente y Evangelina.

A mis hermanos, Raúl y Claudia

A Narcy



## Agradecimientos

---

Agradezco la ayuda y las ideas brindadas por todos los que me rodean. Muy en especial a todas las personas que pacientemente escucharon lo que yo tenía que decir para aclarar mis ideas.

Agradezco la ayuda de mis asesores de tesis Dr. Sergio Sedas y Dr. Jorge Olvera por su asesoría y entendimiento.

Doy también las gracias a todos mis compañeros del departamento de Ciencias Computacionales que me apoyaron en todo momento.

A los ingenieros Mario De la Fuente y Lázaro Salinas, que con su amistad le han dado un nuevo sentido a la palabra compañero.

Agradezco la ayuda del Ing. Martín Gutiérrez, que con su amistad y conocimiento logró despejar ciertas dudas, encausando así mi camino.

A todos los miembros activos y con licencia del tres veces honorable Club de Toby, los cuales siguieron de cerca el desarrollo de este trabajo y siempre estuvieron listos para apoyar, discutir y criticar mis ideas.

A mis padres que desde lejos vigilan mi desempeño y siempre están listos para felicitarme en mis éxitos y apoyarme en mis fracasos.

A mi hermano Raúl el cual tiene mi admiración, respeto y cariño.

Muy especialmente a Nancy por su cariño, apoyo, comprensión y ratos de entretenimiento, sin los cuales esta tesis hubiese sido un trabajo difícil y tedioso.

A Dios por darme la inteligencia y capacidades suficientes para salir adelante con mis tareas.

Por último quisiera agradecer al Programa de Asistentes de Docencia (PAD) de I.T.E.S.M. Campus Monterrey el cual me dio y a dado oportunidad a muchas personas de hacer estudios de postgrado en esta Institución.



## Resumen

---

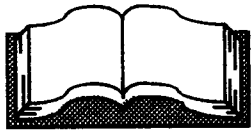
Posicionamiento de sensores es encontrar el mejor lugar para colocar un sensor de visión, en el cual se puede observar un objeto en forma completa. Para encontrar este lugar se pueden realizar diversas técnicas. Unas de éstas pueden ser de naturaleza aleatoria, las cuales no aseguran obtener la información completa. Otras pueden ser exhaustivas en el análisis, las cuales requieren demasiados recursos y tiempo. Es importante desarrollar algoritmos mas simples que aseguren obtener toda la información con el menor número de imágenes posibles.

Para que algún punto se candidato para posicionar ahí el sensor, este debe cumplir con ciertas restricciones, una de estas es visualización, la cual tiene dos forma de aplicarse. Obtener la región de obstrucción debido a algún cuerpo cercano al objeto y la obtención de la región de visualización para la cual todos los puntos del objeto son observables. Esta segunda forma ha sido desarrolladas por Sedas [1] para dos dimensiones. Esta tesis es una extensión a tres dimensiones del trabajo de Sedas. Es importante realizar dicha extensión, debido a que se deben tener al algoritmo que asegure visualizar objeto tridimensional, sin tener que invertir demasiados recursos para ello.

Los resultados de ésta investigación son:

1. Debido a la forma en que Sedas [1] resolvió el problema en dos dimensiones, es necesario catalogar las superficies a visualizar en tres tipos; cóncavas hacia arriba, cóncavas hacia abajo y superficies sin concavidad definida. A cada uno de estos tipos de superficies se les desarrolló un algoritmo que asegure observar todos los puntos de la superficie. Los algoritmos para las superficies cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo fueron expandidos de una forma casi directa del algoritmo desarrollado por Sedas [1]. El algoritmo para superficies sin concavidad definida, fue desarrollado utilizando información expuesta por Sedas. Se encontró que con un solo plano se puede describir la región de obstrucción para un contorno límite cuando se intenta generar la región de visualización de una superficie.

2. Se diseñaron criterios para poder dividir superficies completas en segmentos que cumplan con las restricciones necesarias para poder aplicar los algoritmos del punto anterior. En esta parte se obtuvieron tres criterios; Cambio de concavidad, concavidad menor a  $180^\circ$  y continuidad de la superficie. Esta es la aportación mas importante de la tesis, pues se describieron herramientas nuevas y algoritmos para poder lograr esta tarea.



# Tabla de Contenidos

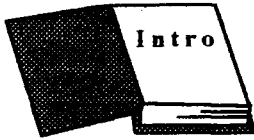
---

<b>Dedicatoria</b> .....	<b>i</b>
<b>Agradecimientos</b> .....	<b>ii</b>
<b>Resumen</b> .....	<b>iii</b>
<b>Tabla de Contenidos</b> .....	<b>iv</b>
<b>Capítulo I: Introducción</b> .....	<b>1</b>
1. Introducción .....	1
2. Objetivos de la Tesis .....	2
3. Organización de la Tesis .....	2
<b>Capítulo II: Posicionamiento de sensores</b> .....	<b>4</b>
Resumen .....	4
1. Introducción .....	4
2. Métodos de posicionamiento de sensores .....	5
2.1. Visibilidad .....	5
2.1.1. Posicionamiento de sensores libre de obstáculos .....	6
2.1.2. Posicionamiento automático de sensores .....	8
2.1.3. Algoritmos para el posicionamiento automático de sensores .....	9
<b>Capítulo III: Regiones de visualización</b> .....	<b>12</b>
Resumen .....	12
1. Introducción .....	12
2. Superficies cóncavas hacia abajo .....	13
2.1. Arrastre orientado .....	14
2.2. Región de visualización .....	14
2.3. Validación del algoritmos .....	16
3. Superficies cóncava hacia arriba .....	18
4. Superficies sin concavidad definida .....	21
5. Sinopsis .....	24
6. Región de visualización de superficies .....	25
7. Conclusiones .....	26
<b>Capítulo IV: División de superficies</b> .....	<b>28</b>
Resumen .....	28
1. Introducción .....	28
2. Criterios para dividir una superficie .....	29
2.1. Cambio de concavidad .....	29

2.1.1. Concavidad según Hillier-Lieberman .....	30
2.1.2. Concavidad según Taha .....	30
2.1.3. Concavidad según Phillips-Ravindran-Solberg.....	31
2.1.4. Detección del cambio de concavidad.....	32
2.2. Concavidad de 180° .....	34
2.2.1. Base vectorial de visión (BVV).....	36
2.2.2. División de una superficie usando BVV.....	37
2.2.3. Restricción al método de división de superficies por BVV.....	41
2.2.4. Superficies que no pueden ser divididas usando BVV.....	41
2.3. Continuidad de la superficie.....	42
3. División de superficies.....	43
<b>Capítulo V: Región de visualización de una superficie .....</b>	<b>44</b>
Resumen.....	44
1. Introducción.....	44
2. Región de visualización de una superficie.....	44
2.1. Segundo criterio de división de superficies .....	45
2.2. División en segmentos.....	46
2.3. Subregiones de visualización .....	47
2.4.1. Segmentos cóncavos hacia abajo .....	47
2.4.2. Segmentos cóncavos hacia arriba.....	49
2.4. Región de visualización de la figura.....	51
3. Conclusiones.....	51
<b>Capítulo VI: Conclusiones .....</b>	<b>52</b>
Resumen.....	52
1. Introducción.....	52
2. Resultados.....	53
3. Conclusiones.....	53
4. Contribuciones.....	54
4.1. Superficies cóncavas hacia abajo.....	54
4.2. Superficies cóncavas hacia arriba.....	54
4.3. Superficies sin concavidad definida.....	55
4.4. Criterio de cambio de concavidad .....	55
4.5. Criterio de concavidad máxima .....	55
4.6. Criterio de continuidad.....	55
5. Trabajos futuros .....	55
<b>Apéndice A: Splines .....</b>	<b>58</b>
1. Splines Normalizados.....	58



2. Splines Normalizados Simplificados.....	61
3. Condiciones extremos para splines.....	62
3.1. Condición de extremos relajados.....	62
3.2. Condición de extremos cíclicos.....	62
3.3. Condición de extremos anticíclicos.....	62
<b>Apéndice B: Sistemas de ecuaciones no lineales.....</b>	<b>63</b>
<b>Apéndice C: Regresiones.....</b>	<b>65</b>
1. Criterios de error.....	65
2. Mínimos cuadrados.....	65
3. Gauss-Newton.....	67
4. Ejemplo.....	69
<b>Apéndice D: Listados.....</b>	<b>72</b>
1. Listados de la simulación para la superficie del capítulo V.....	72
2. Listado para generar splines.....	74
<b>Bibliografía.....</b>	<b>76</b>
<b>Vita.....</b>	<b>77</b>



# Capítulo I: Introducción

"En el principio creó Dios los cielos y la tierra. La tierra era caos y confusión y oscuridad por encima del abismo, y un viento de Dios aleteaba por encima de las aguas. Dijo Dios: <Haya luz>, y hubo luz. Vio Dios que la luz estaba bien, y apartó Dios la luz de la oscuridad y llamó Dios a la luz <día>, y a la oscuridad la llamó <noche>. Y atardeció y amaneció: día primero." Génesis 1:1-5.

---

## 1. Introducción

El objetivo principal del posicionamiento automático de sensores, es el determinar la posición en la cual se obtiene la información mas completa y exacta de un objeto. Se requiere encontrar esta posición para minimizar el número de imágenes requeridas para lograr una descripción completa del objeto.

Se han desarrollado técnicas que toman como punto de partida restricciones de visibilidad, campo de visión, precisión y resolución entre otras, para definir la posición, orientación y parámetros del sensor. Estas técnicas obtienen una región la cual es el conjunto de puntos en el espacio que satisface todas las restricciones. Algunas técnicas son tridimensionales, otras de ellas consideran obstáculos, o basan su análisis en diferentes tipos de sensores como son los ópticos o láser.

Posicionamiento de sensores tiene aplicación en planeación de trayectoria de robots, o en reconocimiento de objetos. Un ejemplo puede ser un brazo pintor, para el cual el sensor de visión es el aplicador de pintura, este tiene características específicas como el ángulo del cono de pintura que se aplica, su alcance y otros parámetro relevantes al tipo de pintura que se aplica. Si se desea pintar algún objeto, se puede programar la trayectoria por la que debe pasar el aplicador y la distancia a la que se debe encontrar del objeto para que la capa de pintura sea uniforme y se tenga el menor desperdicio de pintura.

Con el fin de observar todos los puntos de un objeto, se han desarrollado diversas formas de encontrar la posición de un sensor de visión. En estos análisis toman en cuenta varias restricción para que una región en el espacio sea candidata a posicionar el sensor. Una de estas restricciones es la región de visualización del objeto, la cual define la región en el espacio dentro de la cual el objeto es visto totalmente. Este tipo de algoritmos tiene dos formas de desarrollarse, la primera es encontrar la región de obstrucción debida a cuerpos que se encuentran cercanos al objeto que se desea observar y la otra es la región de visualización del objeto, esta encuentra la región o las regiones desde la cual todos los puntos del objeto son visibles.

## **2. Objetivos de la Tesis**

En esta tesis se extenderá el algoritmo desarrollado por Sedas [1], debido a que este está en dos dimensiones. Sedas [1] utiliza una aproximación en base a rectas para generar la región de visualización de un objeto, su algoritmo está dividido en dos tipos de curvas cóncavas y convexas, para lo cual se tiene que dividir todo un objeto en curvas de estos dos tipos.

Se tiene el objetivo de definir criterios más robustos para dividir superficie, debido a que Sedas en su trabajo [1], realiza un análisis poco profundo de este problema. Se explica en su trabajo que se deben encontrar puntos de inflexión y expone un problema llamado sobre convexidad. En este trabajo se obtendrán criterios que sirvan a para dividir superficies en segmentos a los cuales se les pueda aplicar los algoritmos de visualización.

## **3. Organización de la Tesis**

El capítulo II describe los trabajos sobre visualización de los diferentes grupos de investigadores. En estas investigaciones se pueden detectar dos tendencias, la primera de ellas es realizar un análisis de visualización libre de obstáculos, la segunda es generar una región de visualización sugerida por la geometría del objeto o observar.

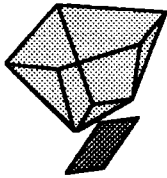
Los algoritmos para generar las regiones de visualización de curvas se explican en el capítulo III, es en este en el cual se define catalogar a las superficies cóncavas hacia arriba, cóncavas hacia abajo y sin concavidad definida. Se definen los algoritmos para dichos tipos de superficies y se exponen las restricciones de los mismos algoritmos. Cuando una superficie está segmentada, se generan varias regiones de visualización, una por cada segmento, es en este capítulo en el que se propone un algoritmo secuencia para agrupar segmentos de tal forma que se obtenga el menor número de imágenes de la superficie.

En el capítulo IV se muestran los tres criterios para dividir superficies. Estos criterios toman tres factores importantes, los cuales son cambio de concavidad, sobre concavidad y continuidad. De estos tres factores surgen los tres criterios para dividir superficies. El primer criterio define los cuando existe un cambio de concavidad en una superficie y define unos contornos límites para satisfacer dicho criterio. El segundo criterio es sobre concavidad, este criterio define un algoritmo para poder detectar y dividir cuando una superficie es demasiado cóncava. El tercer criterio divide la superficie por contornos límite que son llamados "regiones naturales de división", estos son lugares en los cuales la superficie no es continua.

En el capítulo V se aplican los criterios de división de superficies a una superficie, en este capítulo se describe la forma de utilizar las herramientas y algoritmos propuestos en los capítulos

III y IV. En el ejemplo se observa que con solo algunos puntos que describen a la superficie es posible generar la región de visualización de la superficie.

El capítulo final de la tesis, es el capítulo VI, en este se exponen las conclusiones y aportaciones de la tesis. Se cuenta con una sección en el cual se describen trabajos futuros.



## Capítulo II: Posicionamiento de sensores

---

### Resumen

Posicionamiento de sensores es encontrar el mejor lugar para colocar un sensor de visión, en el cual se puede visualizar un objeto en forma completa. Es importante diseñar algoritmos más simples que aseguren obtener toda la información con el menor número de imágenes posibles. Se obtuvo tres grupos principales de investigadores, Cowan-Kovesi explica la forma de obtener la región de obstrucción de un cuerpo, Tarabanis-Tsai-Allen también obtiene la región de obstrucción de un objeto, enfocándose a representar la obstrucción con uniones y restas de cuerpos únicamente convexos (convex hull) y Sedas implementa una aproximación geométrica de objetos en dos dimensiones, para obtener la región de visualización de cada objeto. Los tres grupos de investigadores tienen la misma meta; "Obtener la región de visualización de un objeto, desde la cual se puede observar este con el menor número de imágenes y libre de obstrucciones".

### 1. Introducción

El objetivo principal del posicionamiento automático de sensores, es el determinar la posición en la cual se obtiene la información más completa y exacta de un objeto. Se requiere encontrar esta posición para minimizar el número de imágenes requeridas para obtener una descripción completa del objeto.

Existe la necesidad de crear algoritmos automáticos de posicionamiento de sensores para obtener la mayor información posible con el menor número de imágenes. La información adquirida es necesaria para establecer sistemas de navegación o inspección automática entre otras. Existen sistemas que se basan en métodos aleatorios o simplemente son extensivos en la adquisición de información, pero estos son deficientes puesto que pueden llegar a dar información redundante, no aseguran recolectar toda la información necesaria o consumen demasiados recursos.

Se han logrado sintetizar tres grupos principales de investigadores. Estos tienen algunas diferencias, pero los tres grupos buscan lo mismo; obtener el número mínimo de imágenes. Los grupos son Tarabanis-Tsai-Allen [5,6,7], Cowan-Kovesi [2,3,4] y Sedas [1]. Tarabanis-Tsai-Allen tratan de obtener la región de obstrucción de un objeto y obtienen un algoritmo que descompone dicha obstrucción en conjuntos convexos (convex hull).

El grupo Cowan-Kovesi realizan un análisis más simple de la obstrucción suponiendo una obstrucción simple. Logran descifrar la forma con la cual se puede obtener la región de obstrucción de un objeto debido a un obstáculo. Esto lo logran mediante la división del espacio por planos. Estos planos se forman usando un borde de objeto a observar y algún punto de la

obstrucción.

Sedas por otra parte, intenta descifrar la geometría del objeto para lograr eliminar la posibilidad de posicionar el sensor en algún punto en el cual alguna parte del objeto no sea visible ya que está siendo tapada por el objeto mismo. Esto lo logra definiendo un criterio para estableciendo la región donde una curva cóncava es visible y donde lo es una curva convexa. Dentro del análisis hecho por Sedas se menciona que pueden llegar a lograrse mas de una región de visibilidad.

En la sección 2 se describen cuales son las restricciones que se aplican para obtener la región de las posibles posiciones del sensor. En la sección 2.1 se explican los diferentes algoritmos desarrollados por los grupos de investigadores mencionadas. En la sección 2.1.1 se explica cual es el algoritmo propuesto por Tarabanis-Tsai-Allen para poder generar la región de visualización libre de obstáculos, se da especial atención al análisis de la obstrucción. El algoritmo propuesto por el grupo Cowan-Kovesi obtienen la región de visualización del objeto libre de obstrucciones, el enfoque de este grupo es diferente al anterior pues no describen en una forma muy detallada el obstáculo. Sedas desarrolla una aproximación geométrica con la cual es capaz de obtener la región de visualización del objeto cuando este está formado por curvas cóncavas y convexas.

## **2. Métodos de posicionamiento de sensores**

Las principales investigaciones en el campo describen las siguientes cuatro restricciones que delimitan la región en la cual se puede posicionar el sensor.

1. Visibilidad
2. Campo de visión
3. Resolución
4. Precisión

Todas estas investigaciones se basan en una aproximación geométrica y analítica. Para cada grupo de investigación las restricciones tienen una característica particular y la representan de diferente forma. En esta sección se presentaran los aspectos más importantes de cada grupo de investigadores con respecto a visibilidad.

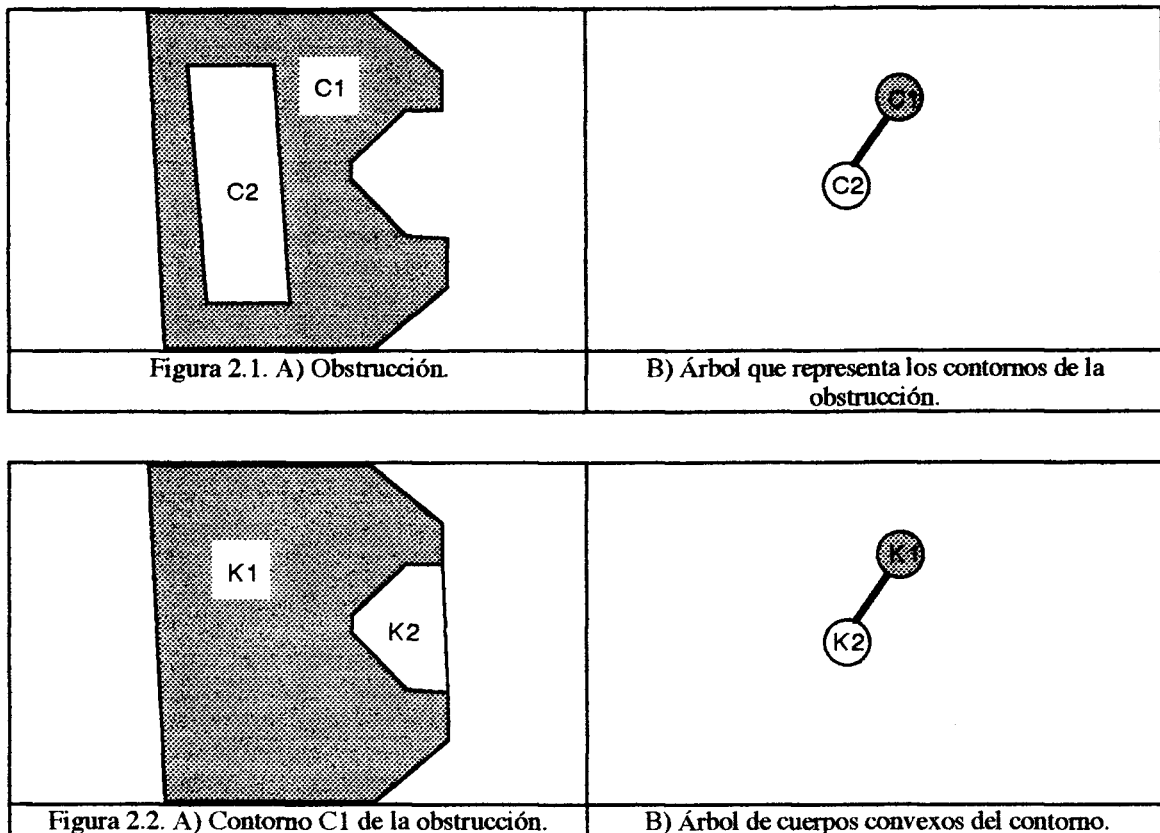
### **2.1. Visibilidad**

Definición: delimita la región desde donde un sensor puede observar todos los puntos un objeto, dicha región puede estar formada por varias subregiones independientes. La única

condición que se debe aplicar es que se minimice el número de subregiones.

### 2.1.1. Posicionamiento de sensores libre de obstáculos

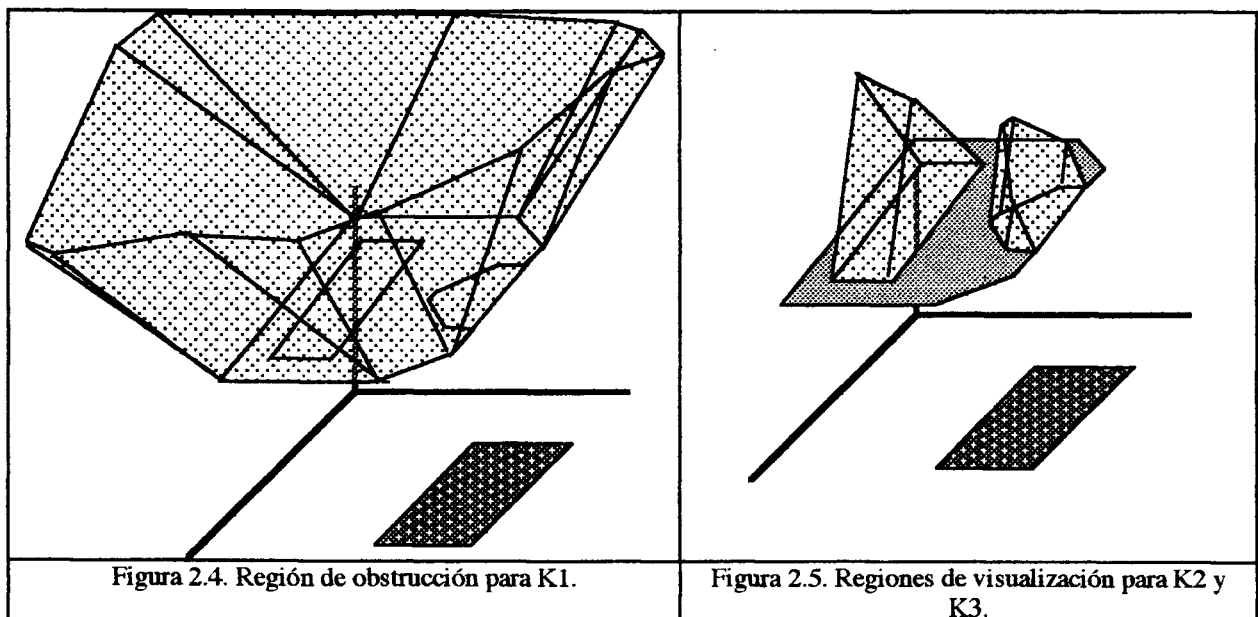
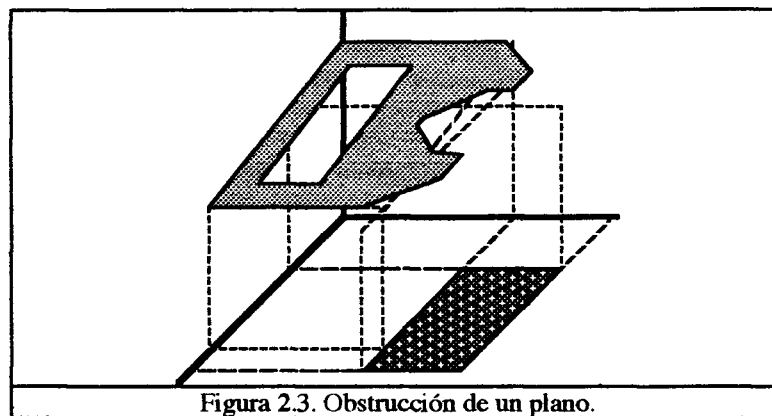
Tarabani-Tsai-Allen realizan su análisis [7] tratando de obtener la región dentro de la cual el objeto no es visible, es decir la región de obstrucción. El algoritmo está basado en cuerpos convexos, y cualquier cuerpo puede ser dividido en una suma y resta de cuerpos de este tipo. De aquí surge la primer parte de su análisis, se genera un árbol en el cual cada rama es un contorno del obstáculo, las ramas impares son los contornos que representan material y las pares son los que representan un agujero.



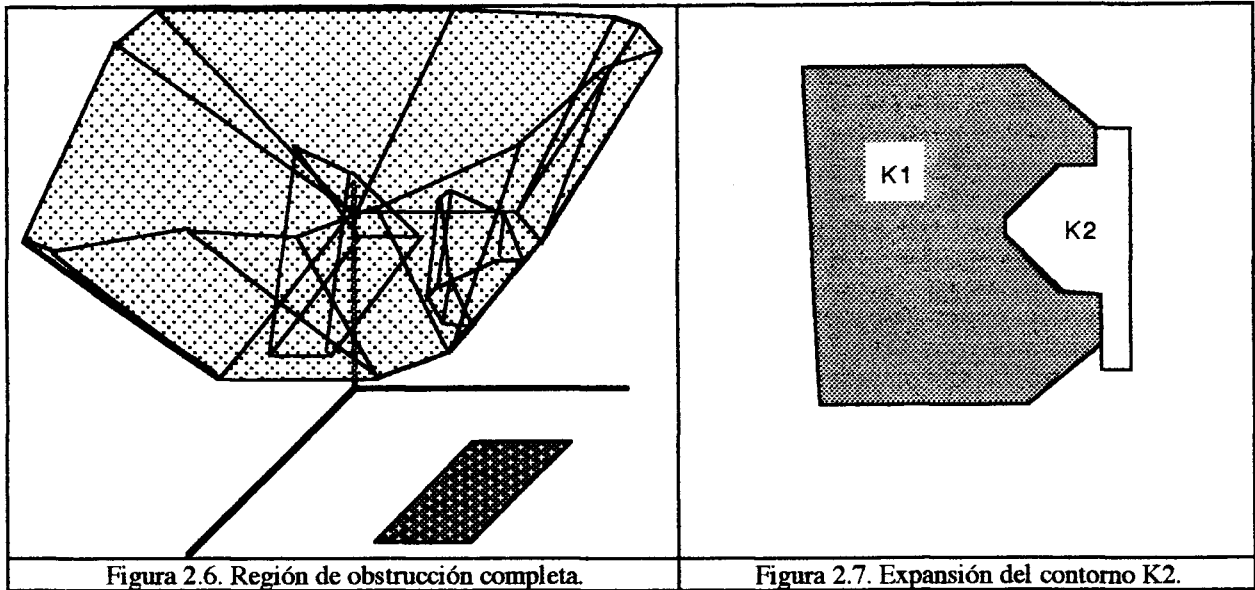
En la figura 2.1 se muestra un ejemplo de lo que se explica. La figura 2.1.A es un cuerpo, y la 2.1.B es el árbol de contornos. Cada contorno a su vez es representado por otro árbol; segunda fase del análisis. Este segundo árbol divide cada contorno en cuerpos convexos que se suman o restan para obtener la forma. Como se muestra en la figura 2.2. El cuerpo K1 es un objeto convexo de material y el cuerpo K2 es un hueco dentro de K1, como se puede ver K1 y K2 también son cuerpos convexos. En la figura 2.2.A se muestra la división en cuerpos convexos del contorno C1 y en la 2.2.B se muestra el árbol para ese contorno. Ahora teniendo la obstrucción dividida en cuerpos convexos se obtiene la región de obstrucción para cada cuerpo, y estas se suman o se restan (dependiendo si son material de obstrucción o agujeros)

para obtener el volumen en el cual el cuerpo no puede ser visto en su totalidad.

Ya separada la obstrucción en contornos y sabiendo qué operación hacer con éstos, se obtiene la región de obstrucción de cada cuerpo convexo. Suponiendo que la obstrucción esta sobre un objeto como en la figura 2.3 y éste se desea ver, se generaría la región de obstrucción para K1 como se muestra en la figura 2.4 y las regiones de visualización para K2 y K3 como se muestra en la figura 2.5. Como se ve el resultado es la resta de  $R1-R2-R3$  se muestra en la figura 2.6, pero ésta tiene un defecto ya que por la "cueva" K2 se debe generar una región de obstrucción con una "cueva" y no con dos agujeros como se observa en la misma figura. Esto es arreglado aplicando una ampliación a la "cueva". En la figura 2.7 se muestra un ejemplo del aumento que se le hace a la región K2, este aumento está controlado por un algoritmo propuesto por este grupo de investigadores, el cual se encuentra explicado en la referencia [7]. En la figura 2.8 se muestra la región de visualización de K2 con el aumento, dando así una región de obstrucción mostrada en la figura 2.9.



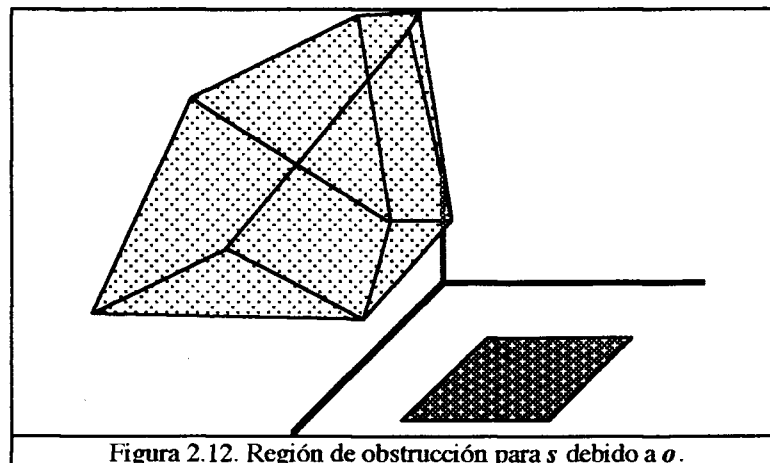
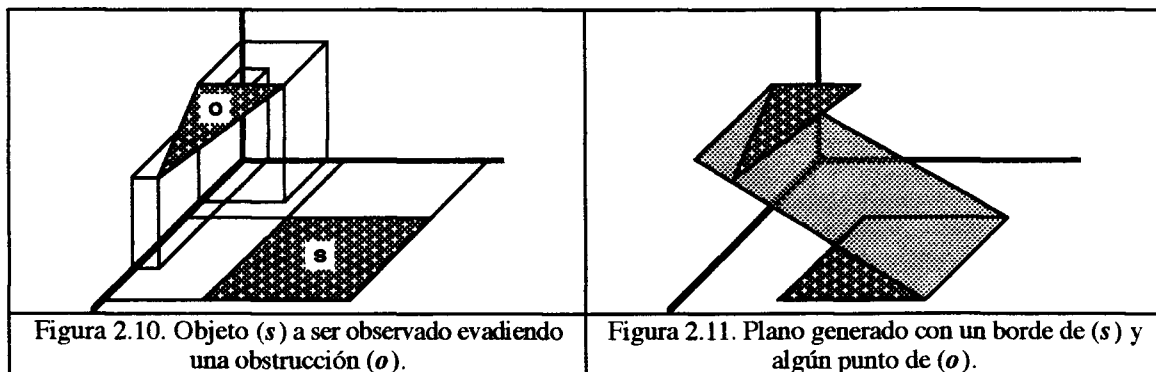
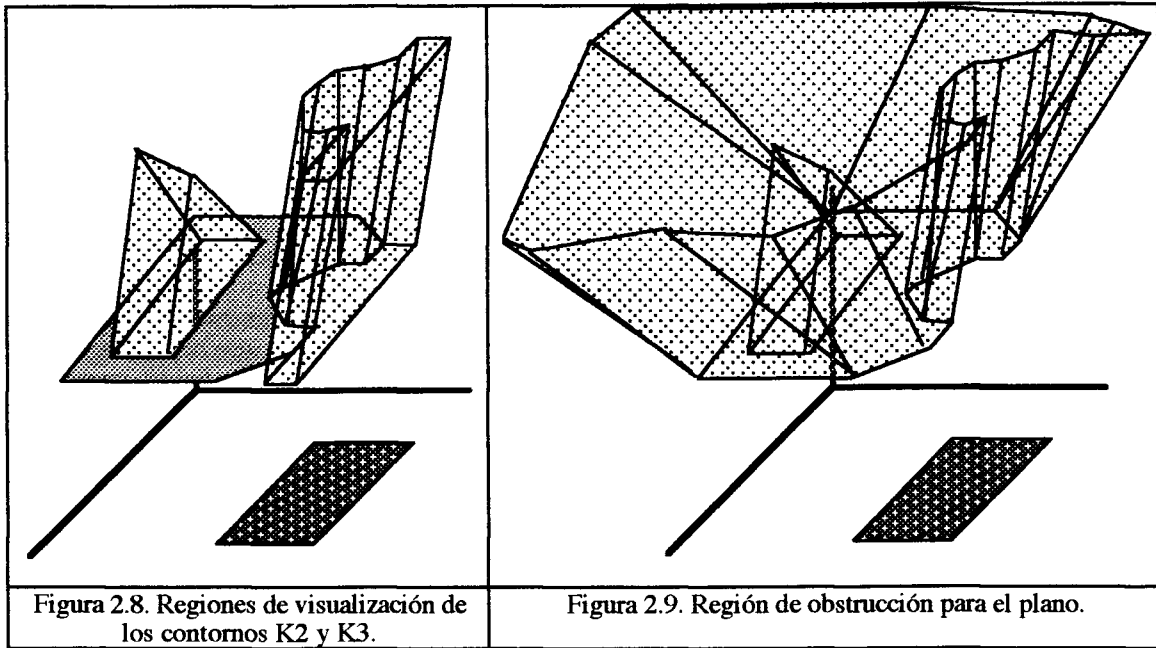




### 2.1.2. Posicionamiento automático de sensores

El grupo de Cowan-Kovesi "subdivide el espacio de todos los posibles puntos de visión para formar regiones tales que, para cualquier punto de visión, ninguna porción de la superficie esté escondida por ningún objeto en el ambiente" [2]. Esto es logrado ya que se forman planos que separan el objeto de la obstrucción.

Para cada borde del objeto generan un plano que topa con algún punto de la obstrucción. En la figura 2.10 se muestra un ejemplo de objeto obstruyendo ( $\sigma$ ) a un plano ( $s$ ). En la figura 2.11 se muestra el plano que se forma con uno de los bordes de  $s$  y un punto de  $\sigma$ . Dicha división es formado inclinando el plano usando un borde de  $s$  como referencia (como si fuese una bisagra) hasta que toque algún punto de la obstrucción  $\sigma$ , el procedimiento se repite para todos los bordes de  $s$ . Se realiza el mismo procedimiento para los bordes de  $\sigma$  y algún punto de  $s$ . De esta forma para este ejemplo se obtienen siete planos. Tres son por parte de  $\sigma$  y cuatro por parte de  $s$ . Si se intersectan las regiones que están del lado de  $\sigma$  de todos los planos, se obtendrá un volumen dentro del cual no se puede ver a  $s$  completamente debido a  $\sigma$ . Este volumen está ilustrado en la figura 2.12.



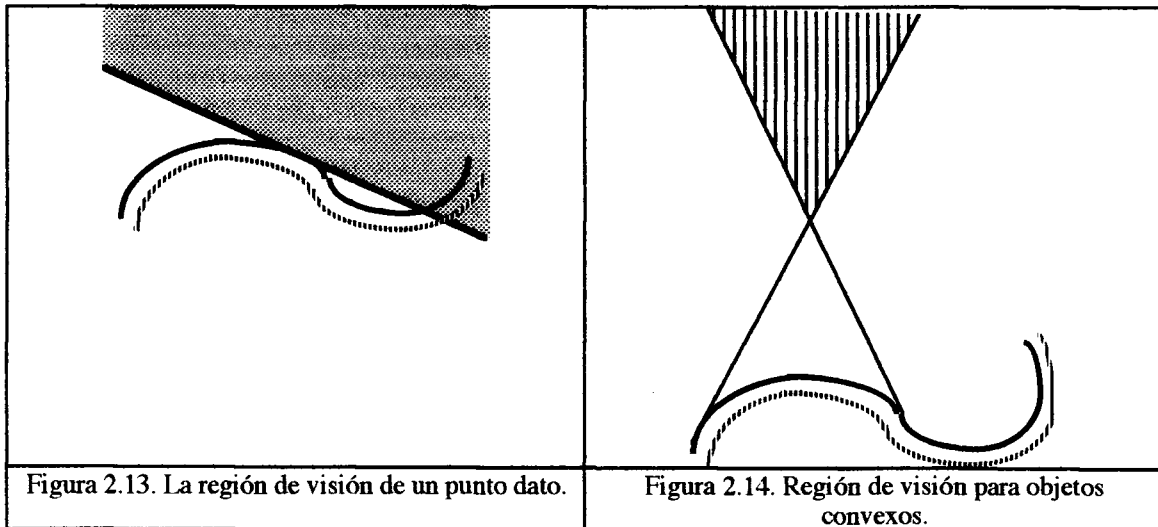
### 2.1.3. Algoritmos para el posicionamiento automático de sensores

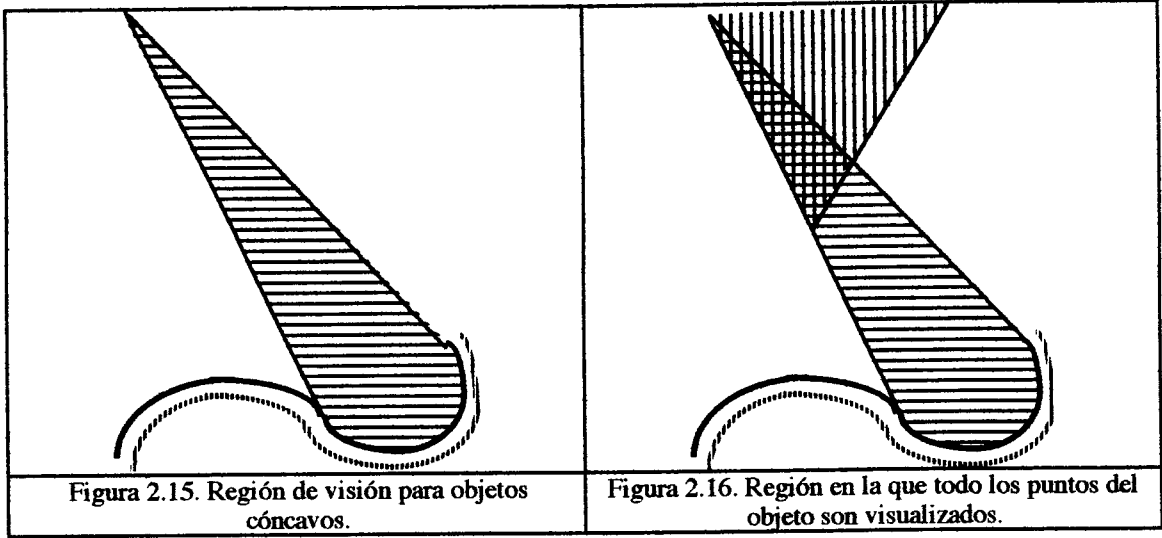
Sedas define la región de visibilidad como la región desde la cual todo punto de las caras de un objeto pueda ser visto [1]. Su método para determinar la región de visibilidad de un objeto

consiste en encontrar regiones en la cual partes de éste son visibles. La intersección de estas regiones forma la región en la cual todo el objeto es visible. Este documento demuestra cómo el número de operaciones para generar la región es mínimo cuando la región es enteramente cóncava o convexa. Esto permite reducir el número de operaciones necesarias para calcular dicha región, ya que cualquier forma bidimensional se puede dividir en formas cóncavas o convexas. Esta misma técnica le permite obtener puntos en el interior de una cavidad, los cuales no son obtenibles por las técnicas de Cowan-Kovesi [2] y Tarabanis-Tsai-Allen [6,7]. Sin embargo una limitante es que este análisis está desarrollado en dos dimensiones, lo cual impide su aplicación a problemas que por naturaleza son tridimensionales.

El algoritmo de Sedas [1] se describe como sigue. Dado un objeto, el conjunto de puntos que se encuentra por encima de una recta tangente a un punto en el objeto, es la región desde la cual se puede ver el dicho punto. En la figura 2.13 se representa este conjunto de puntos con el área sombreada. Esto se repite para cada punto generando un número infinito de regiones; la intersección de todas estas es la región desde donde toda la superficie puede ser vista.

Tomando todos los puntos de la curva, aplicando este criterio nos damos cuenta que se necesita un número infinito de operaciones. Si se discretisara este cálculo se obtendría un número finito de puntos y dependiendo de la resolución se podría llegar a tener muchos puntos por lo que el costo computacional se elevaría, sin embargo, Sedas [1] observó que la región desde la cual un cuerpo cóncavo es visto en su totalidad, esta dada por la intersección de las regiones obtenidas en los extremos del cuerpo como se ejemplifica en la figura 2.14. Lo mismo para un cuerpo convexo (ver figura 2.15). Un cuerpo cualquiera puede ser dividido en segmentos cóncavos y convexos. Para obtener la región completa de puntos donde cada punto de objeto es visible, se deben de intersectar todas las regiones de los segmentos cóncavos y convexos como se muestra en la figura 2.16.







## Capítulo III: Regiones de visualización

---

### Resumen

Un sensor de visión debe ser capaz de poder ver todos los puntos de una superficie o todos los puntos de algún detalle de la superficie, por lo que es necesario realizar algoritmos de visión que aseguren poder ver todos los puntos deseados. Lo que principalmente se busca en este capítulo es exponer un algoritmo simple de aplicar. Para esto se han clasificado las superficies en tres tipos, superficie cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo y sin concavidad definida. Se muestran cuales son los algoritmos adecuados para sensar cada tipo de superficie y las restricciones de cada uno de estos.

### 1. Introducción

Con respecto a lo visto en el capítulo anterior sabemos que existen algoritmos que aseguran generar una región de visualización libre de obstáculos. Es ahora cuando debemos refinar el conocimiento y encontrar la región o las regiones para las cuales una superficie es totalmente visible, se extenderá el algoritmo de Sedas [1] de dos dimensiones a tres dimensiones. Esto se debe intentar hacer mediante algoritmos simples y fáciles de implementar, que no consuman demasiados recursos y tiempo. Es por eso que se intenta obtener una aproximación geométrica del objeto para asegurar ver al objeto en su totalidad.

Cuando se desea observar un objeto lo que se desea observar es su superficie, por lo que modelar a los objetos en base a superficie es correcto, ya que una vez obtenida una representación matemática de la superficie podremos realizar análisis geométrico. En el Apéndice C se muestra algoritmos para ajustar ecuaciones a una muestra de puntos. Se puede intentar modelar alguna serie de puntos con un cuádrico<sup>1</sup> y ajustar la ecuación con alguno de los métodos expuestos en ésta sección.

Una vez que se tiene una representación adecuada de la superficie del objeto se debe poder encontrar el tipo de concavidad de esta. Eso es importante ya que dependiendo del tipo de concavidad es el algoritmo que se debe aplicar. Una superficie tiene que ser dividida en segmentos con cóncavos hacia arriba o cóncavos hacia abajo, este tema se desarrolla en el siguiente capítulo. Las próximas secciones muestran cual es el algoritmo propuesto para cada tipo de superficie.

---

<sup>1</sup> Cuádricos son ecuaciones que a las figuras cónicas estándares como la elipse, parábola o hipérbola en dos o tres dimensiones.

En la sección 2 se muestra cual es el algoritmo adecuado y sus restricciones para generar la región de visualización de una superficie cóncava hacia abajo, en la sección 3 se muestra el algoritmo para una superficie cóncava hacia arriba, en la sección 4 se muestra el algoritmo para una superficie sin concavidad definida, en la sección 6 se muestra un algoritmo para generar la región de visualización de una superficie formada de varios segmentos.

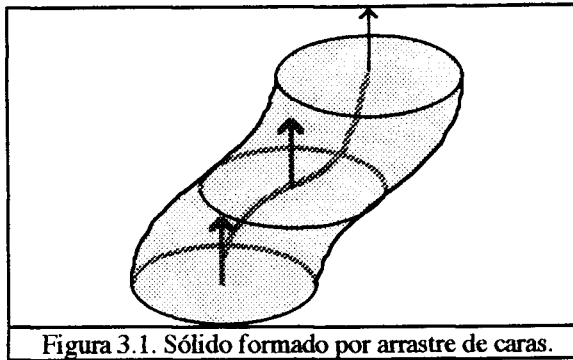
## 2. Superficies cóncavas hacia abajo

Antes de iniciar el análisis veremos como está definida una superficie cóncava hacia abajo. Se necesita que los cortes de la superficie por los planos XZ y YZ sean cóncavas hacia abajo, es decir como se muestra en (3.1)

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0 \\ (3.1) \end{array}}$$

Las superficies cóncavas hacia abajo son el tipo de superficie a la que más fácilmente se le genera su región de visualización. Haciendo una analogía con la teoría expuesta por Sedas [1], sabemos que para genera la región de visualización se necesitan trazar rectas tangentes a la curva en los limites de la misma e intersectar las regiones limite de visualización. En tres dimensiones no se tienen puntos limite, si no que curvas limites. Volviendo a hacer analogías las rectas que Sedas [1] utiliza para limitar la región de visualización se convierten en planos tangentes.

Por observación podemos deducir que la generación de regiones de visualización en tres dimensiones es mas compleja que en dos. Por lo que debemos encontrar una herramienta que nos ayude a realizar esta operación. Una herramienta que puede servir es el arrastre de caras (Sweep), esta consta en definir una cara (plano limitado por algunas restricciones) y trasladarla a través de una trayectoria para formar un objeto sólido (no tiene que ser un plano, puede se una linea, solo que el objeto creado no será un objeto sólido). En la figura 3.1 se observa como un cara circular es arrastrada a través de una trayectoria para formar un objeto. Observando el objeto creado podemos ver que la cara es arrastrada pero conserva en todo punto su orientación original. Esta herramienta no cumple con las necesidades de nuestro problema, pues debe ser capaz de orientar el plano.

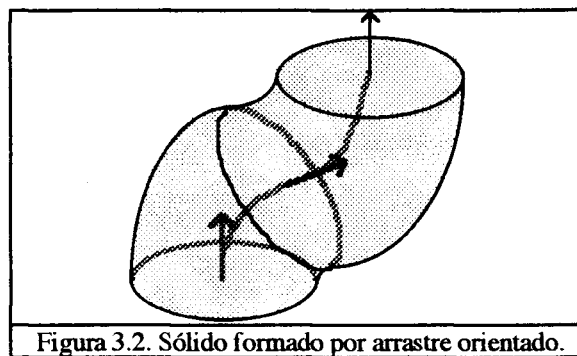


Si observamos el problema podremos ver que se necesita una herramienta parecida, es decir para generar la región de visualización de una superficie se requiere arrastrar un plano a través de su contorno límite orientándolo con respecto a su vector normal en cada punto del contorno. Se requiere de un arrastre de caras utilizando orientación.

### 2.1. Arrastre orientado

Como ya se mencionó esta herramienta traslada una superficie. El primer trabajo es definir la trayectoria por lo cual se arrastrará la superficie, esta trayectoria puede estar definida mediante puntos que forzosamente se deben tocar y el resto usando un algoritmo de ajuste de splines. En el apéndice A se desarrolla la teoría sobre splines.

La orientación de la cara se logra definiendo la orientación de los vectores normales de la cara en cada punto de la trayectoria. Como la trayectoria está definida por unos cuantos puntos y por lo tanto solo se cuenta con algunos vectores, el cambio entre muestra y muestra se hará en forma lineal. En la figura 3.2 se muestra un arrastre orientado.



### 2.2. Región de visualización

Para generar la región de visualización de una superficie de este tipo debemos tomar en cuenta lo siguiente; el arrastre de caras equivale a realizar la unión de los puntos de la cara para cada diferencial de desplazamiento. Pero dada la teoría de Seda [1] sabemos que las regiones de visualización de los extremos se deben intersectar. Usando la propiedad de teoría de conjuntos

mostrada en (3.2) podemos encontrar la relación entre la operación Arrastre orientado y la región de visualización.

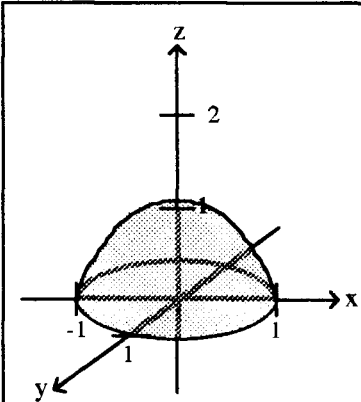
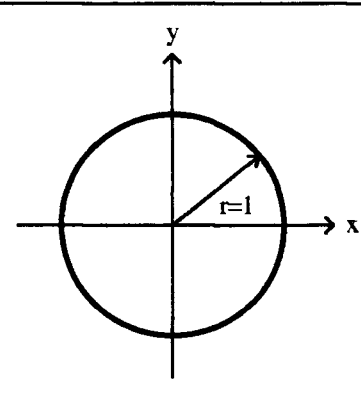
$(A \cap B)^* \cong A^* \cup B^*$
(3.2)

Es decir en vez de realizar la intersección de todos los puntos por encima de los planos tangentes a la superficie, realizaremos un arrastre orientado de un cuadrado infinito que siempre esta por debajo de los planos tangentes a la superficie. Al terminar la operación la región resultante será la "Región de obstrucción" de la superficie, es decir el complemento de la región de visualización.

**Definición 3.1.** Región de obstrucción de un punto: Llamaremos *región de obstrucción de un punto* al conjunto de puntos en el espacio para los cuales el punto queda oculto.

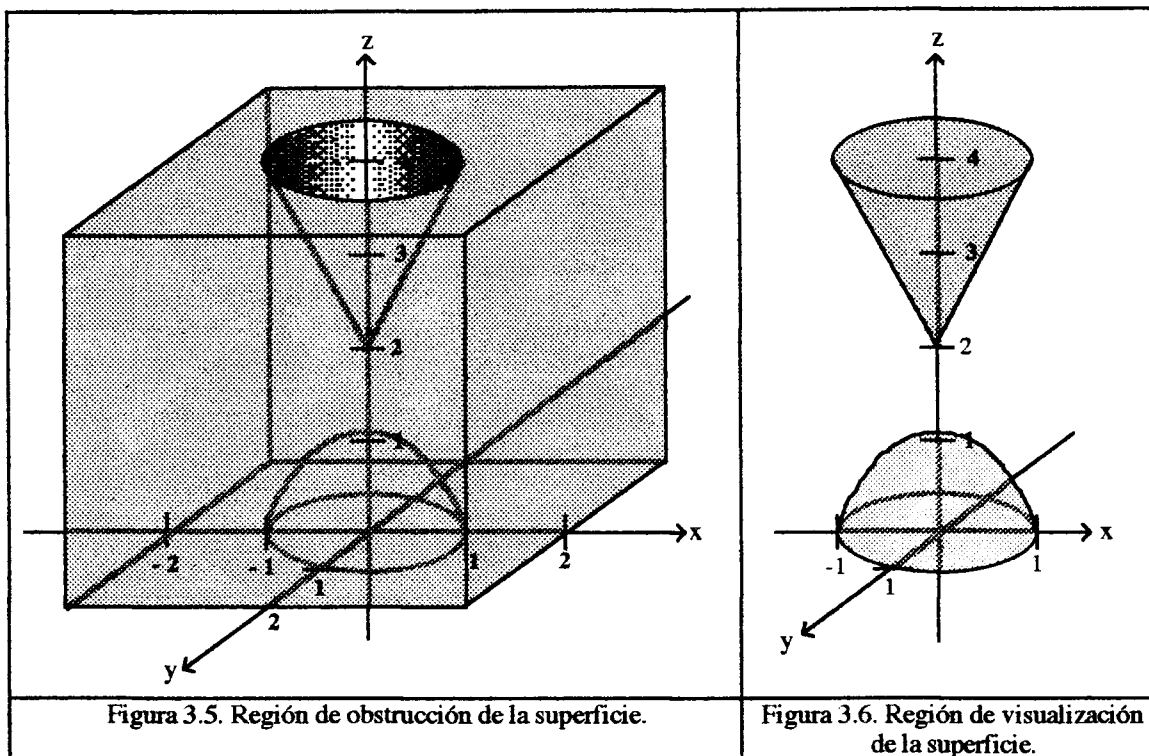
**Definición 3.2.** Región de obstrucción: Llamaremos *región de obstrucción* a la intersección de las regiones de obstrucción de todos los puntos de la superficie.

**Ejemplo Uno.** Obtener la región de visualización de la superficie  $z = -x^2 - y^2 + 1$  dentro del siguiente dominio  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ . Dicho dominio define todos los puntos dentro de una circunferencia centrada en el origen de radio 1, en la figura 3.3 se muestra la superficie. Las segundas derivadas parciales de la ecuación son igual a -2 por lo que la superficie es cóncava hacia abajo. Los planos tangentes tienen la ecuación mostrada en (3.3), los puntos  $X_0$  y  $Y_0$  son las coordenadas en el límite de la superficie, dichas coordenadas siguen la relación  $x^2 + y^2 = 1$

		$z = -2X_0x - 2Y_0y + 2$
<p>Figura 3.3. Superficie de un parabolóide elíptico.</p>	<p>Figura 3.4. Extremo del dominio de la superficie.</p>	<p>(3.3)</p>

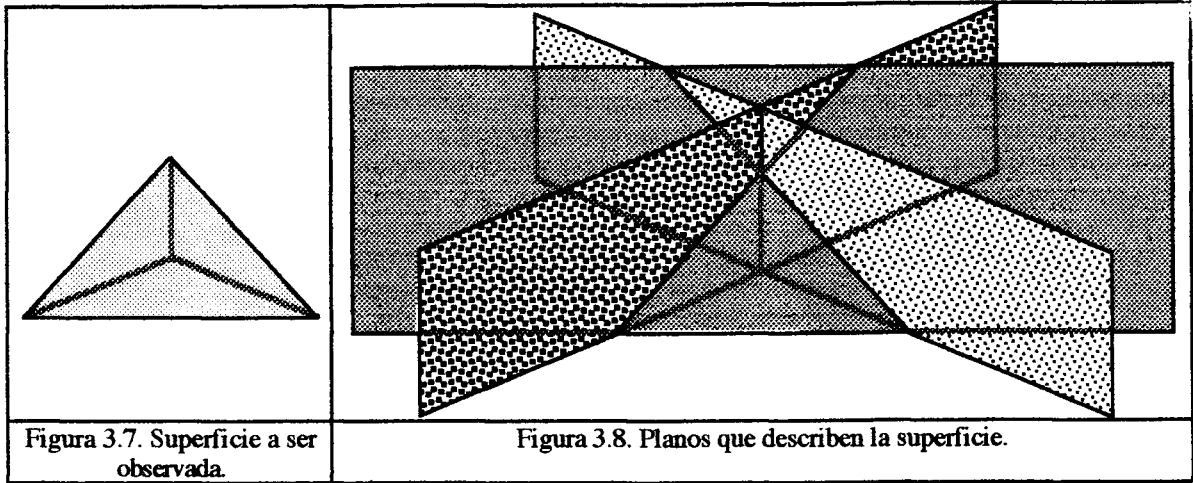


En la figura 3.5 se muestra el resultado del arrastre orientado (región de obstrucción). El arrastre se realizó con un cubo muy grande que siempre se encuentra debajo del plano tangente. En la figura 3.6 se muestra la región de visualización de la superficie.

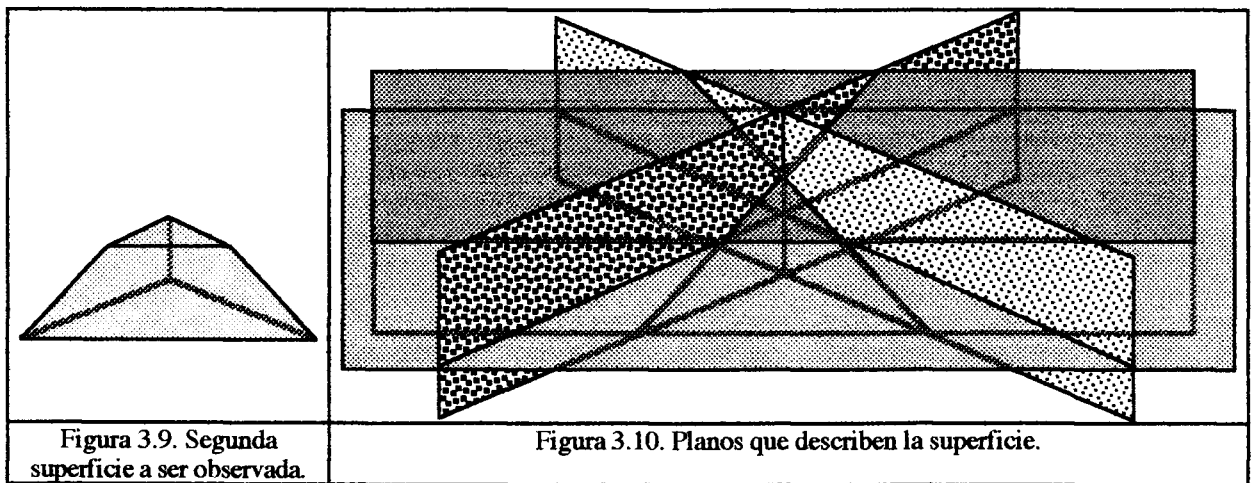


### 2.3. Validación del algoritmos

Hasta el momento se ha explicado como funciona el algoritmo pero no se ha explicado si es válido o no, es decir no se ha dicho si en realidad asegura visualizar todos los puntos de la superficie. Para demostrar esto supongamos una superficie generada con tres caras. Una superficie como la de una pirámide, en la figura 3.7 se muestra dicha superficie. Si intersectamos planos tangentes a las caras observaremos lo que se muestra en la figura 3.8. Es evidente que los tres planos generan otra pirámide similar a la original, solo que con el pico apuntando para abajo. Si estos planos se escogieran como frontera, se puede decir que todos los puntos que se encuentran por encima de cada plano, tienen una línea recta sin obstrucciones con cada punto de la cara correspondiente. Es decir que si deseamos ver cada punto de la superficie, necesitamos conocer cuales son los puntos comunes en las regiones que se describieron anteriormente. Esto significa encontrar la intersección de las tres regiones limitadas por cada uno de los planos.



Esto no demuestra lo que se asegura, ahora supongamos que la figura está limitada por cuatro caras como se muestra en la figura 3.9. Si ponemos los planos de cada cara como en el caso anterior se tendrá lo que se observa en la figura 3.4. Si volvemos a generar regiones de visualización para cada cara tendríamos que escoger a todos los puntos que se encuentran por encima de cada plano. Para obtener la región de visualización del objeto, se tienen que intersectar todas estas regiones. Al hacer esta operación se puede observar claramente que la región de visualización será igual a la del ejemplo anterior. Esto se debe a que lo que se intenta hacer con los planos es encontrar extremos de visión. El plano de la cuarta cara no contribuye en nada a la región de visualización porque no es un extremo de la figura, es decir, no se encuentra en un límite donde termine la figura, es una cara intermedia. Si continuáramos agregando caras intermedias a la figura (manteniendo la concavidad), estas no contribuirían a la región de visualización.



### 3. Superficies cóncava hacia arriba

Una superficie cóncava hacia abajo es la que está definida conforma se muestra en (3.4), como se observa en esta expresión, es lo contrario de (3.1) como era de esperarse.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$$

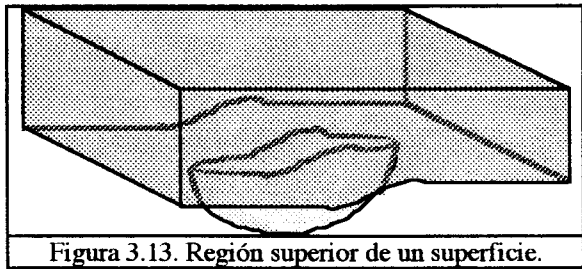
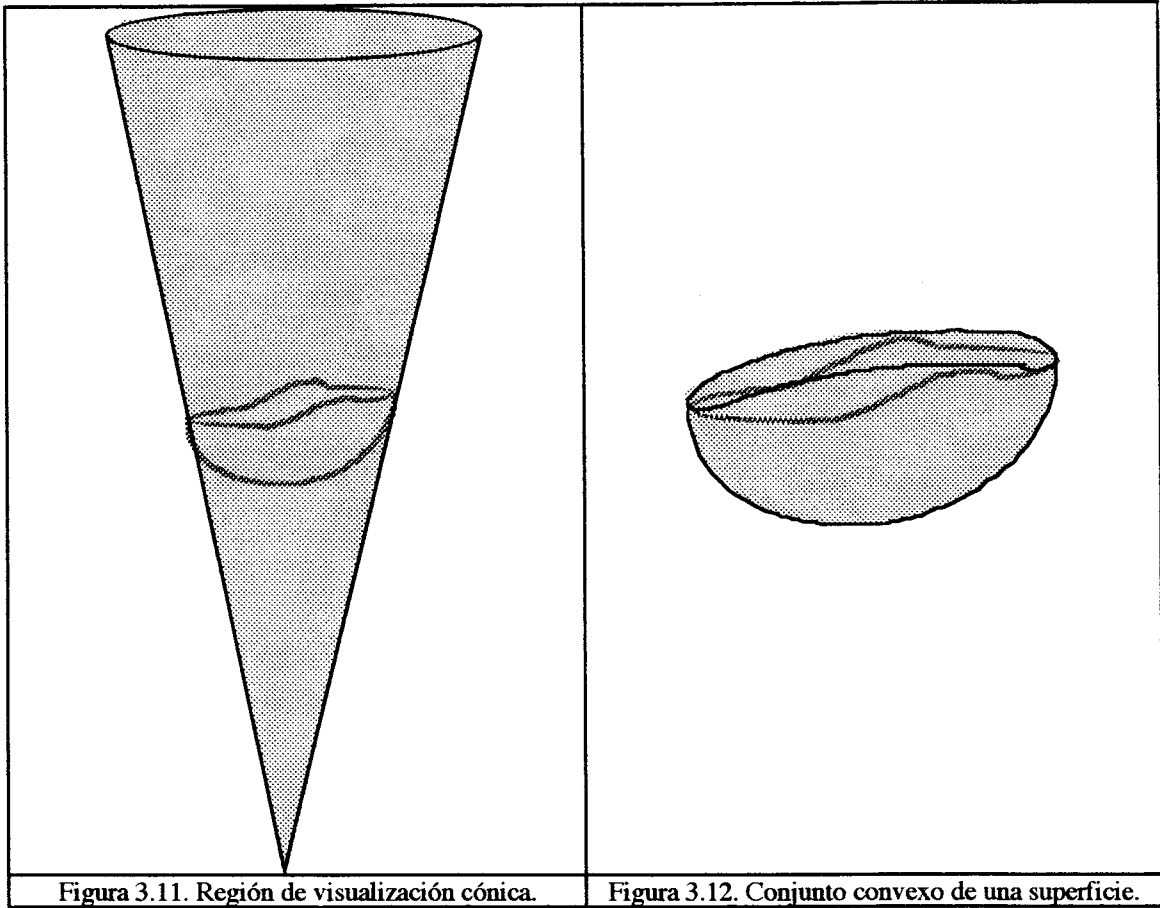
(3.4)

Para este tipo de superficies el algoritmo tiene que tomar en cuenta el interior de la concavidad, ya que si aplicamos el mismo método que se aplicó en la sección anterior, obtendremos una región de visualización que no es correcta, esto se muestra en la figura 3.11. A esta región la llamaremos "región cónica de visualización" (RC). Debemos dividir la región de visualización en parte, como lo propone Sedas [1]. Iniciaremos con el "convex hull" o conjunto convexo (CC).

**Definición 3.3.** Conjunto convexo: Llamaremos conjunto convexo al grupo de puntos, para los cuales si se unen dos punto por medio de una línea recta, esta queda totalmente incluida dentro de los punto del conjunto convexo.

Un ejemplo de conjunto convexo es una esfera sólida, pues si intentamos unir dos puntos de la esfera la recta queda dentro de la esfera, en la figura 3.12 se muestra un ejemplo de conjunto convexo. Si representamos el interior de la concavidad de la superficie mediante un conjunto convexo, podremos completar la región de visualización realizando la intersección de la región cónica con el conjunto convexo.

Dicha operación es insuficiente pues el resultado es el mismo conjunto convexo. Se necesita incluir la parte superior al cono. Esta región la llamaremos región superior (RS) y está limitada por una superficie que toca todos los puntos limitadores de la superficie. En la figura 3.13 se muestra la región superior a una superficie. En el Apéndice C se muestran métodos de ajuste de funciones, alguno de los cuales puede ser usado para encontrar la ecuación de la superficie que mejor se ajuste al contorno límite de la superficie que se desea visualizar.



Con estas tres regiones podremos encontrar la región de visualización de cualquier superficie cóncava hacia arriba. La expresión se muestra en (3.5). Esta expresión propone la unión de RS con CC y el resultado intersectarlo con RC.

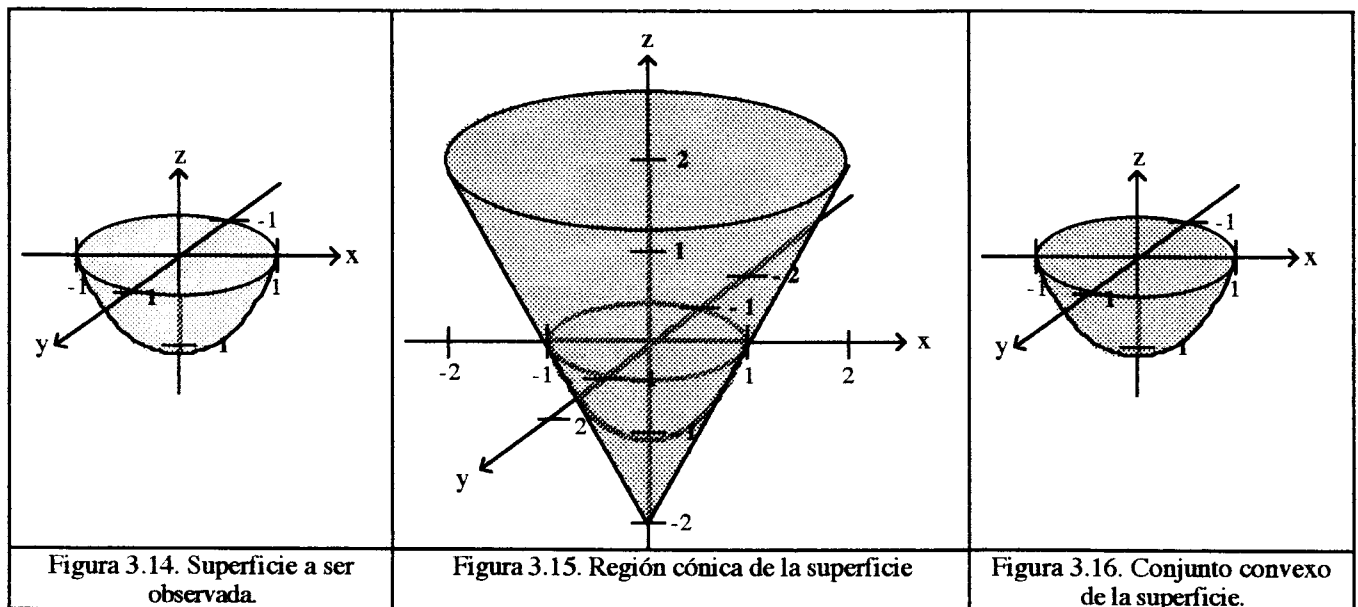
$RC \cap (RS \cup CC)$
(3.5)

**Ejemplo Dos.** Obtenga la región de visualización de la superficie  $z=x^2+y^2-1$  dado que es válida cuando  $0 \leq x^2+y^2 \leq 1$ . En la figura 3.14 se muestra la superficie a visualizar, el extremo de la superficie es igual al ejemplo anterior, en la figura 3.4 se muestra una gráfica de este. Si se aplica lo visto en la sección anterior se obtendrá la región mostrada en la figura 3.15, esta es la

región cónica. Los planos que limitan dicha región están definidos como es muestra en (3.6), donde los valores de  $X_0$  y  $Y_0$  siguen la relación (3.7). En la figura 3.16 se muestra el conjunto convexo de la superficie. Se puede observar que si se unen cualesquiera dos puntos del conjunto, la recta quedará dentro del conjunto, como dato particular de esta superficie, el conjunto convexo de la superficie son todos los puntos de la superficie, mas los puntos dentro de la concavidad de la superficie.

$z=2X_0x+2Y_0y-2$	$X_0^2+Y_0^2=1$
(3.6)	(3.7)

La región superior de la superficie está limitada por el plano  $z=0$ , es decir el plano XY, esto se puede comprobar dado que los valores extremo están representados por (3.7), y la función en estos puntos siempre es 0, por lo que la región superior es el conjunto de todos los puntos donde  $z \geq 0$ , esta región se muestra en la figura 3.17. Ya obtenidas todas las regiones de visualización de la superficie, se obtiene la unión de RS con CC, este primer resultado parcial se muestra en la figura 3.18. La región de visualización de la superficie se obtiene finalmente al realizar la intersección de la región cónica con la región mostrada en la figura 3.18, este resultado se muestra en la figura 3.19.



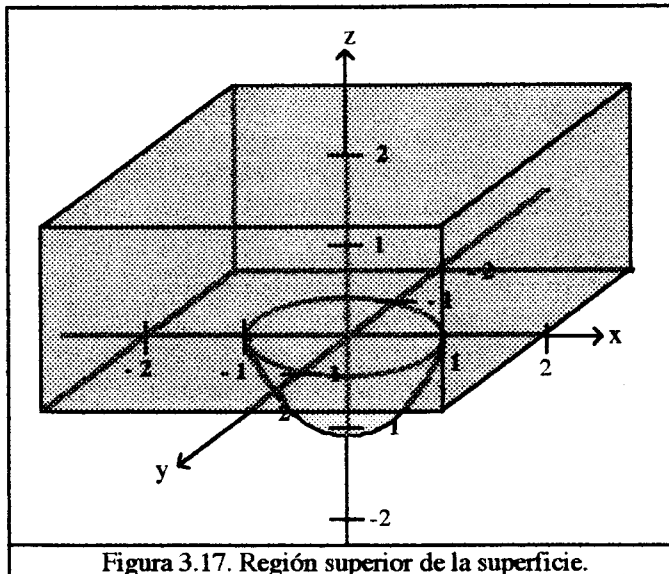


Figura 3.17. Región superior de la superficie.

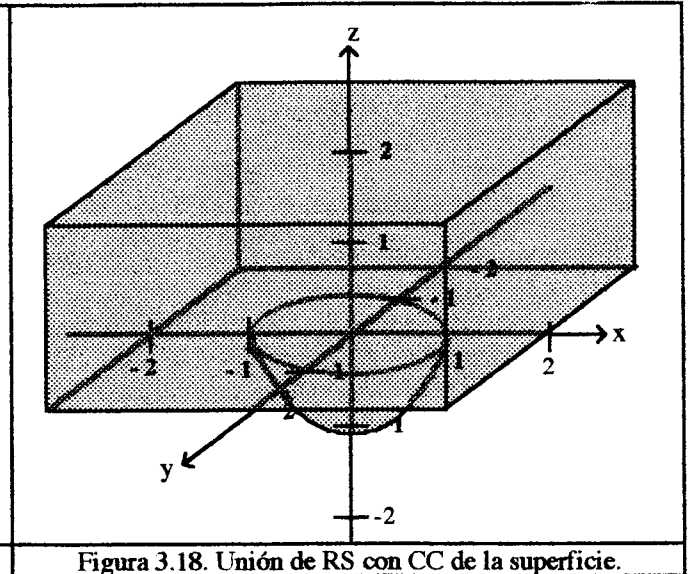


Figura 3.18. Unión de RS con CC de la superficie.

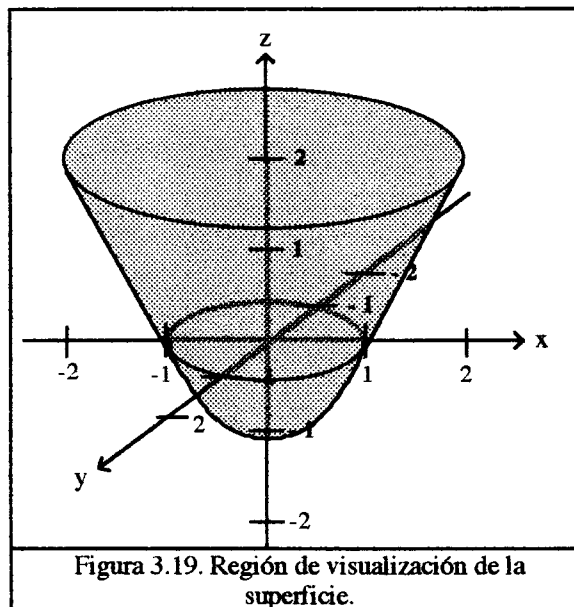


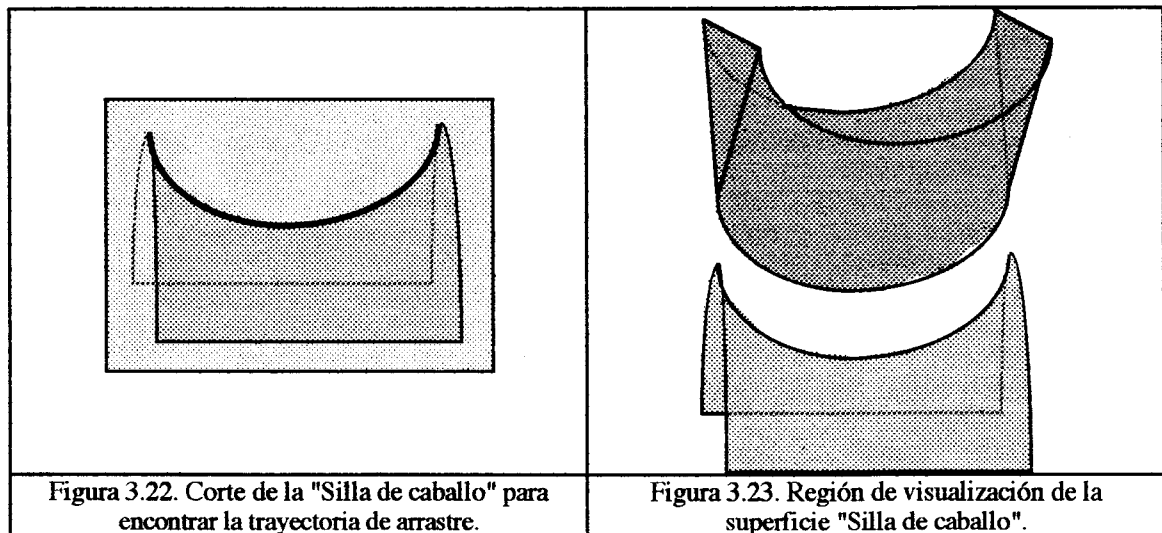
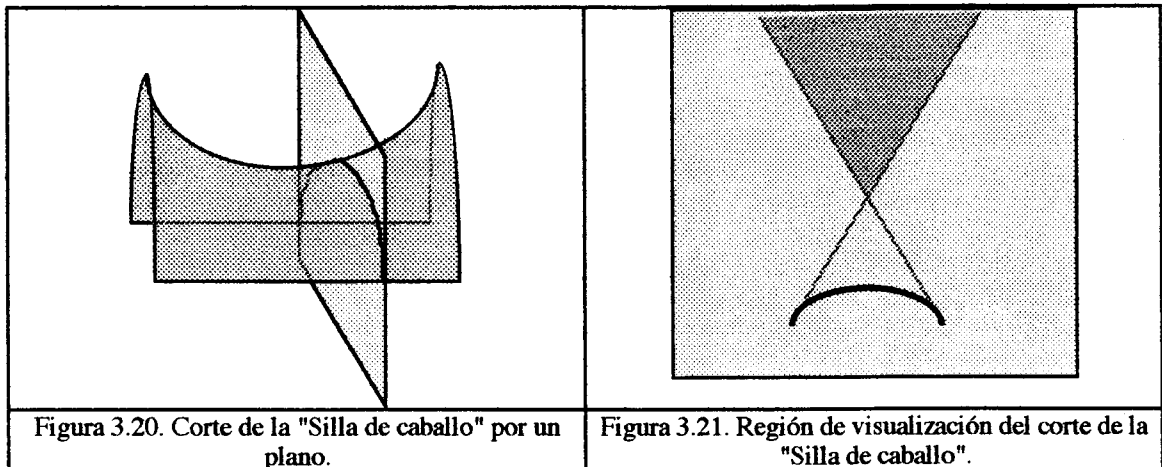
Figura 3.19. Región de visualización de la superficie.

#### 4. Superficies sin concavidad definida

Este tipo de superficies están definidas como se muestra en (3.1) o (3.4), por lo que no pueden ser solucionadas con ninguno de los algoritmos anteriores. Un ejemplo de este tipo de curvas es la llamada "silla de caballo". Esta curva es cóncava hacia arriba si se observa desde un eje y es cóncava hacia abajo si se observa desde el otro eje. Para poder resolver la región de visibilidad de esta curva se tienen que realizar arrastres de rectas. Es decir ya que este tipo de superficies no tiene concavidad definida mas que parcialmente desde alguno de los ejes, se debe tomar la concavidad desde ese eje y realizar un arrastre del resultado en dos dimensiones a través la superficie en el otro de los ejes.

Esto significa que, si la superficie tiene concavidad definida en uno de los ejes (la llamaremos eje definido), equivale a cortar la superficie con un plano paralelo al eje definido y a la gráfica obtenida se le puede obtener la concavidad en dos dimensiones, en la figura 3.20 se muestra un corte de una función "silla de caballo" y se observa que el corte genera una curva cóncava hacia abajo. Si se cumple esta condición entonces se puede generar una región de visualización para la superficie.

Al partir la superficie con un plano se obtiene una curva en dos dimensiones, si a esa curva se le obtiene la región de visualización propuesta por Sedas [1], aseguraremos ver todos los puntos de la superficie que se intersectan con el plano. Si arrastramos esta región por una trayectoria creada con la intersección de un plano en el origen perpendicular al eje definido y la superficie, se creará la región de visualización de toda la superficie. En la figura 3.21 se muestra la región de visualización del corte hecho por el plano paralelo al eje definido, en la figura 3.22 se muestra la trayectoria de arrastre, por último en la figura 3.23 se muestra la región de visualización generada por arrastre de la región de visualización en el plano.



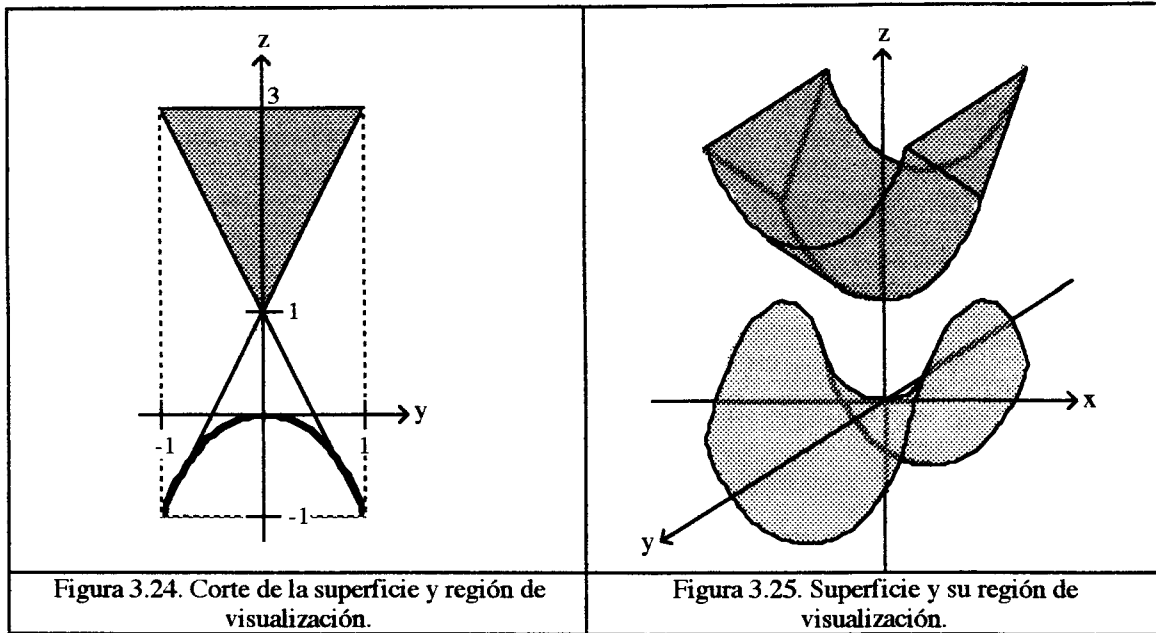
Esta región de visualización asegura que todos los puntos de la superficie puedan ser vistos desde dicha región. Pero para poder aplicar este método la superficie debe cumplir con algunas restricciones. No debe haber dependencia de las derivadas parciales en un eje con respecto a la variable del otro eje.

Superficies de este tipo por lo general son cóncavas hacia arriba por un eje y cóncavas hacia abajo por el otro, por lo que para este algoritmos el arrastre debe ser realizado a través del eje para el cual la superficie es cóncava hacia arriba. Para el arrastre se debe utilizar la región de visualización de la curva cóncava hacia abajo. Esto se debe a que si se hace al revés la región generada no asegurará una visualización total de la superficie.

**Ejemplo Tres.** Obtener la región de visualización de  $f(x,y)=x^2-y^2$ . Primero que nada se debe limitar la superficie con los siguientes rangos  $-1 < x < 1$  y  $-1 < y < 1$ . Las derivadas parciales son las mostradas en (3.8). Como se observa estas derivadas solo dependen de las variables por las que se deriva. Supongamos que el eje definido es  $y$  y por lo que el plano se moverá a través del eje  $x$ , eso significa considerar  $x$  constante por lo que la ecuación del plano  $YZ$  es la mostrada en (3.9). Con esta ecuación obtenemos las rectas tangentes en los extremos, estas se muestran en (3.10). Estas rectas se intersectan en el punto  $[y=0, z=1]$ . La región de visualización de esta curva es entonces  $R_v = \{y, z \in \mathfrak{R} : z > 2(y+1)-1 \text{ y } z > -2(y-1)-1\}$ . Esta región no está limitada a un valor máximo, pero para fines del ejemplo la representaremos con un triángulo, los otros dos puntos lo generaremos con los límites de la superficie, es decir que los vértices de este triángulo son  $(0,1), (-1,3), (1,3)$ . Si encontramos la intersección del plano  $XZ$  con la superficie obtenemos la ecuación (3.11). Por lo que debemos arrastrar el triángulo por la curva en (3.11). La figura 3.24 muestra el corte de la superficie y el triángulo de visualización, en la figura 3.25 se muestra la superficie y su región de visualización.

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x$ $\frac{\partial f}{\partial y}=-2y$	$z=K-y^2$	$R_{y=-1}:z=2(y+1)-1$ $R_{y=1}:z=-2(y-1)-1$	$z=x^2$
(3.8)	(3.9)	(3.10)	(3.11)





## 5. Sinopsis

Para poder encontrar a región de visualización de una superficie, es necesario contar con una representación de la superficie, esta debe ser catalogada en alguno de los tres tipos de superficie; cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo o sin concavidad definida. Definida su concavidad se debe aplicar alguno de los métodos expuestos anteriormente para poder encontrar la región de visualización de las superficies.

Estos algoritmos están muy fuertemente basados en el arrastre de caras, ya se arrastre o arrastre orientado. Uno solo define una trayectoria por la cual una cara debe ser trasladada y realiza la unión de los puntos de la cara con los de la cara trasladada un diferencia sobre la trayectoria. El arrastre orientado define una trayectoria además de una orientación a través de la trayectoria, con esto se logra que el vector normal de la cara este orientado en el sentido que se define para cada punto de la trayectoria. En este arrastre también se realiza la unión de los puntos de la cara.

Se usa el arrastre orientado para generar la región de visualización de superficie cóncavas hacia abajo y cóncavas hacia arriba. Para las superficie cóncavas hacia abajo el realizar el arrastre sobre el extremo de la superficie orientando en base a los vectores normales de la superficie es suficiente para encontrar la región de obstrucción de la superficie. Esta región al ser complementada genera la región de visualización.

## 6. Región de visualización de superficies

Para el caso de las superficies cóncavas hacia arriba, el realizar un arrastre orientado no es suficiente, se deben obtener dos regiones más. Una de ellas es llamada conjunto convexo, este debe incluir todos los puntos de la superficie mas los que se encuentran dentro de la concavidad. La segunda región es la región superior a la superficie, esta región son todos los puntos que se encuentran por encima de la superficie limitadas por una superficie que toca a todos los puntos extremo de la superficie a visualizar. Con las tres regiones mencionadas se genera la región de visualización de una superficie cóncava hacia arriba.

Para superficies sin concavidad definida el análisis es diferente, ya que se debe no puede ser considerada como alguna de la superficies de los análisis anterior. Esta superficies deben tener concavidad parcialmente definida, es decir que en un eje tengan concavidad definida. Las superficie de este tipo por lo general son cóncavas hacia abajo por un eje y cóncavas hacia arriba por el otro. Por lo que se toma la superficie por el eje para el cual es cóncava hacia abajo, se corta con un plano perpendicular al eje y se aplica el algoritmos propuesto por Sedas [1] para dos dimensiones, a esta región se le practica un arrastre por la curva generada con el corte de un plano paralelo al eje y la superficie. Esta región de visualización asegura ver todos los puntos de la superficie.

Con todo lo visto durante este capítulo, se toma por conocido que se conocen tanto la concavidad de la superficie como los límites de esta, en el capítulo siguiente se describen tres criterios para realizar esta división. Dividida una superficie en varios segmentos, se aplican los métodos a las segmentos para de esta forma generar varias regiones de visualización de un objeto en particular. Como primer avance diremos que la región de visualización de un objeto es la intersección de todas las regiones de visualización de sus segmentos. Esto no necesariamente es cierto, ya que por el tipo de objeto el resultado de la intersección nos puede dar el conjunto vacío. Es por esto que se debe tener cuidado con la forma en que se realiza esta última operación.

Uno de los postulados de esta tesis es el de encontrar el menor número de imágenes. Esto se puede lograr realizando la intersección de las subregiones de visualización por partes. Es decir, intersectar dos subregiones que sean vecinas.

**Definición 3.4.** regiones de visualización vecinas; Llamaremos *subregiones de visualización vecinas* a las regiones de visualización de dos segmentos de una superficie que comparten puntos de sus fronteras.

La forma de generar la región de visualización de todo un objeto es intersectar las regiones de visualización de dos segmentos vecinos, si la región resultante no es nula, intersectar el resultado con el de una región vecina a las dos regiones anteriores o a alguna de las dos. Así se sigue hasta que la última intersección de regiones de visualización sea nula, cuando eso suceda tomar la configuración anterior e iniciar la secuencia nuevamente con el último segmento. Dicho de otra forma se muestra el algoritmo mostrado en la tabla 3.1.

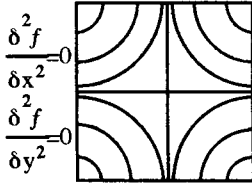
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Escoge un segmento que no ha sido Seleccionado.</li> <li>2. Si no hay segmento sin seleccionar ir a 11.             <ol style="list-style-type: none"> <li>2.1. Si hay marcar el seleccionado como Seleccionado.</li> </ol> </li> <li>3. Hacer La Región igual a la región del segmento.</li> <li>4. Intersectar La Región con la de un segmento vecino que no es Seleccionado.</li> <li>5. Si la intersección es nula escoger otro segmento vecino e ir a 4.             <ol style="list-style-type: none"> <li>5.1. Si no hay segmentos vecinos restantes ir a 8.</li> </ol> </li> <li>6. Si la intersección fue exitosa, La Región se convierte en el resultado de la intersección.             <ol style="list-style-type: none"> <li>6.1. Marcar al segmento vecino como Seleccionado.</li> </ol> </li> <li>7. Escoger otro segmento vecino e ir a 4.             <ol style="list-style-type: none"> <li>7.1. Si no hay segmentos vecinos restantes; La Intersección es una imagen necesaria;</li> <li>7.2. Guardar La Intersección.</li> <li>7.3. Ir a 1.</li> </ol> </li> <li>8. La Región es una imagen necesaria ; Guardar la región.</li> <li>9. La Región es ahora la del último segmento que se intersectó y causó intersección nula.             <ol style="list-style-type: none"> <li>9.1. Marcar el segmento como Seleccionado.</li> </ol> </li> <li>10. Ir a 4.</li> <li>11. Reportar todos las regiones que se hayan guardadas.</li> </ol>
<p style="text-align: center;">Tabla 3.1. Algoritmo para generar la región de visualización de un objeto.</p>

## 7. Conclusiones

Se vio que un objeto puede ser representado mediante su superficie, la cual puede ser modelada matemáticamente con fines de análisis, también se ha visto que no se necesitan conocer todos los puntos de su superficie para poder generar su región de visualización. Se expuso la necesidad de catalogar las superficies y se indicó que se tienen los criterios para poder dividir la superficies. Eso es lo que hasta ahora se tiene.

Se puede decir que con los algoritmos expuestos se simplifican el número de operaciones matemáticas que se deben realizar par poder generar la región de visualización de un objeto, es decir, que estamos cumpliendo con una de las primeras premisas que se deseaba cumplir: No

realizar un análisis exhaustivo y demasiado demandante de poder de cómputo. Otra de las premisas que se buscaba satisfacer es el hecho de poder encontrar el menor número de imágenes para poder observar un objeto. Con el algoritmo expuesto en la sección anterior se obtiene una buena aproximación a lo que se buscaba. La mas importante de las premisas que se buscaba cumplir era, el poder observar en su totalidad un objeto o algún detalle de este. Con los algoritmos expuestos se puede lograr visualizar en su totalidad la superficie, esto ya fue explicado anteriormente.



## Capítulo IV: División de superficies

---

### Resumen

Para poder realizar el análisis de visualización propuesto, a un objeto, se necesita tener las herramientas para poder dividir una superficie en secciones cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo. Es necesario aplicar ciertos criterios que nos lleven a la división de la superficie. Los criterios que se muestran en este capítulo son características suficientes que deben tener las superficies para poder tomar la decisión para definir cuales son los puntos frontera que dividen la superficie. Debe tomarse en cuenta que los criterios aquí expuestos están basados en la necesidad de obtener el menor número de secciones, para poder lograr el menor número de imágenes.

### 1. Introducción

Hasta ahora todos los métodos para obtener la región de visibilidad de un objeto parten del hecho que se conoce el medio ambiente que rodea al objeto o la forma misma del objetos. Sedas [1] dice que para poder ver en su totalidad a un objeto este debe ser dividido en curvas cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo, surgiendo así una analogía: Para poder observar un objeto en tres dimensiones, éste debe ser dividido en superficies cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo. Un objetivo de esta tesis es definir criterios que se deben tomar para partir un objeto.

Inicialmente se analizará cuando una superficie es visible, sabemos que si una superficie es cóncava hacia abajo tendrá una región de visualización diferente a la de una superficie cóncava hacia arriba. Por lo que teniendo una superficie compuesta<sup>1</sup>, es un criterio de partición los cambios de concavidad. Analizando una superficie esférica y tomado cualesquiera dos vectores normales a ésta, si el ángulo entre estos dos vectores es mayor que  $180^\circ$  entonces los puntos no podrán ser vistos. Es decir que cuando dos vectores normales a una superficie tengan  $180^\circ$  entre si, definirán a dos puntos que son límite de visión en la superficie. Un lugar para partir una superficie es una región de división natural, es decir el donde la primera derivada de la superficie no sea continua. En resumen se tienen tres criterios suficientes para partir una superficie:

- El cambio en la concavidad.
- Concavidad menor a  $180^\circ$ .
- Continuidad de la primera derivada.

---

<sup>1</sup> Superficie compuesta: Superficie que consta de regiones cóncavas hacia arriba y regiones cóncavas hacia abajo.

En la sección 2 se describe los criterios para dividir superficies, en la sección 2.1 se describe el primer criterio de división, en la sección 2.2 el segundo criterio y en la 2.3 el tercer criterio, en la sección 2.4 se muestra una sinopsis de los tres criterios desarrollados anterior mente.

## 2. Criterios para dividir una superficie

Como se puede notar, lo principal es poder manejar curvas cóncavas hacia arriba y curvas cóncavas hacia abajo. Pero dicho tipo de curvas no ha sido definida aún. Tomando las definiciones dadas por Leithold [8] se tiene lo siguiente:

"Definición 4.8.1: Se dice que la gráfica de una función  $f$  es **cóncava hacia abajo** en el punto  $(c, f(c))$ , si existe  $f'(c)$  y existe un intervalo abierto  $I$  que contenga a  $c$ , tal que para todos los valores de  $x$  diferentes de  $c$  en  $I$ , el punto  $(x, f(x))$  en la gráfica esté abajo de la recta tangente a la gráfica en  $(c, f(c))$ ".

"Definición 4.8.2: Se dice que la gráfica de una función  $f$  es **cóncava hacia arriba** en el punto  $(c, f(c))$ , si existe  $f'(c)$  y existe un intervalo abierto  $I$  que contenga a  $c$ , tal que para todos los valores de  $x$  diferentes de  $c$  en  $I$ , el punto  $(x, f(x))$  en la gráfica esté arriba de la recta tangente a la gráfica en  $(c, f(c))$ ".

La necesidad de partir una superficie en secciones surge debido a que se necesitan segmentos simples pues el algoritmo para obtener la región de visualización es aplicable únicamente a superficies con una sola concavidad. Por lo tanto es muy importante poder partir una superficie en superficies cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo, este criterio es el primero en definir.

### 2.1. Cambio de concavidad

Este criterio es llamado *Primer criterio de división* o restricción del cambio de concavidad. Tomando en cuenta un sistema de dos dimensiones la concavidad de una curva esta definida en base a la segunda derivada de la función. Leithold [8] dice:

"Teorema 4.8.3: Sea  $f$  una función diferenciable en algún intervalo abierto que contenga a  $c$ . Entonces: i) si  $f''(c) > 0$ , la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba en  $(c, f(c))$ ; ii) si  $f''(c) < 0$ , la gráfica de  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(c, f(c))$ ".

De aquí podemos definir lo que es un punto de inflexión [8]; "Teorema 4.8.5: Si la función  $f$  es diferenciable en algún intervalo abierto que contenga a  $c$  y si  $(c, f(c))$  es un **punto de inflexión** de la gráfica de  $f$ , si  $f''(c)$  existe,  $f''(c) = 0$ ".

En sistemas de dos dimensiones como se observa, gracias al Teorema 4.8.3 de Leithold [8], es posible definir concavidad usando el criterio de la segunda derivada. En sistemas de tres dimensiones se tiene la definición de concavidad, pero ésta es más compleja. Durante la investigación se encontró con tres definiciones que definen concavidad en tres dimensiones.

### 2.1.1. Concavidad según Hillier-Lieberman

"Precisamente de la misma manera en que puede usarse la segunda derivada (cuando existe en todas partes) para comprobar si una función de una sola variable es **cóncava hacia arriba** o no, las segundas derivadas parciales pueden emplearse para comprobar funciones de varias variables, aunque en una forma más complicada. En el caso de una función de dos variables,  $f(x,y)$  es **cóncava hacia arriba** si y solo si:

$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x^2} \frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y^2} - \left[ \frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x \delta y} \right]^2 \geq 0$	$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x^2} \geq 0$	$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y^2} \geq 0$
(4.1)	(4.2)	(4.3)

Para todos los valores posibles de  $(x,y)$ , suponiendo que estas derivadas existen en todas partes, mientras que  $f(x,y)$  es **cóncava hacia abajo** si se puede sustituir  $\geq$  por  $\leq$  en las condiciones (4.2) y (4.3)" [9].

### 2.1.2. Concavidad según Taha

"Dadas (4.4) y (4.5), la función  $Q(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  es llamada forma cuadrática de una matriz.

$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
(4.4)	(4.5)

La matriz  $\mathbf{A}$  puede ser supuesta como simétrica si es que cada elemento de cada par de elementos  $a_{ij}$  y  $a_{ji}$  ( $i \neq j$ ) puede ser reemplazado por  $\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$  sin cambiar el valor de  $Q(\mathbf{X})$ . La forma cuadrática anterior se dice que es:

1. *Definida positiva* si  $Q(\mathbf{X}) > 0$  para todo  $\mathbf{X} \neq 0$ .

2. *Semidefinida positiva* si  $Q(\mathbf{X}) \geq 0$  para todo  $\mathbf{X}$  y existe un  $\mathbf{X} \neq 0$  tal que  $Q(\mathbf{X}) = 0$ .
3. *Definida negativa* si  $-Q(\mathbf{X})$  es definida positiva.
4. *Semidefinida negativa* si  $-Q(\mathbf{X})$  es semidefinida positiva.
5. *Indefinido* si no se cumple ninguno de los criterios anteriores.

Definición: El k-esimo determinante minoritario principal de una matriz  $\mathbf{A}$  está dado por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \text{ para } k=1,2,\dots,n$$

Se puede probar que una condición suficiente y necesaria para relacionar los casos anteriores es:

1.  $Q(\mathbf{X})$  es definida positiva (semidefinida) si el valor de los determinantes minoritarios principales de  $\mathbf{A}$  son positivos (no negativos). En este caso se puede decir que  $\mathbf{A}$  es definida positiva (semidefinida).
2.  $Q(\mathbf{X})$  es definida negativa (semidefinida) si el valor del k-esimo determinante minoritario principal de  $\mathbf{A}$  tiene el signo  $(-1)^k$  (o es cero), donde  $k=1,2,3,\dots,n$ . En este caso  $\mathbf{A}$  es llamado definido negativo (semidefinida).

Una función  $f(\mathbf{X})$  se dice que es estrictamente **cóncava hacia arriba**, si para cualquiera dos punto diferentes  $\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}_2$ , se cumple  $f(\lambda\mathbf{X}_1+(1-\lambda)\mathbf{X}_2) < \lambda f(\mathbf{X}_1)+(1-\lambda)f(\mathbf{X}_2)$ , donde  $0 < \lambda < 1$ , es decir la función está por debajo de la recta que une los puntos. Por otro lado  $f(\mathbf{X})$  es estrictamente **cóncava hacia abajo** si  $-f(\mathbf{X})$  es estrictamente cóncava hacia arriba. Un caso importante es la forma cuadrática, sea  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X}$  donde  $\mathbf{C}$  es un vector constante y  $\mathbf{A}$  es una matriz simétrica; se puede probar que  $f(\mathbf{X})$  es estrictamente **cóncava hacia arriba** si  $\mathbf{A}$  es definida positiva, de igual forma  $f(\mathbf{X})$  es estrictamente **cóncava hacia abajo** si  $\mathbf{A}$  es definida negativa" [10].

### 2.1.3. Concavidad según Phillips-Ravindran-Solberg

"Sea  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  una función de  $n$  variables, se dice que es una función **cóncava hacia arriba** si y solo si para cualesquiera dos puntos  $\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}_2$  y sea  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $f(\lambda\mathbf{X}_1+(1-\lambda)\mathbf{X}_2) \leq \lambda f(\mathbf{X}_1)+(1-\lambda)f(\mathbf{X}_2)$ , una función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es **cóncava hacia abajo** si y solo si  $-f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es **cóncava hacia arriba**.



$$\mathbf{H}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2} & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_n} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2} & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_n \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_n \delta x_2} & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_n^2} \end{bmatrix}$$

(4.6)

La *Matriz Hessiana* de una función es una matriz simétrica dada por (4.6). Una función  $f$  es **cóncava hacia arriba** si la *Matriz Hessiana* de  $f$  es definida positiva o semidefinida positiva para todos los valores de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Una función  $f$  es **cóncava hacia abajo** si la *Matriz Hessiana* de  $f$  es definida negativa o semidefinida negativa para todo valor de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Para mostrar que  $f$  es cóncava hacia arriba, realizaremos las siguientes pruebas de  $\mathbf{H}$ ; es definida positiva o semidefinida positiva, si:

1.  $\mathbf{H}$  es simétrica.
2. Todos los elementos de la diagonal principal son positivos.
3. Todos los determinantes minoritarios principales son mayor a cero" [11].

#### 2.1.4. Detección del cambio de concavidad

Resumiendo la información anterior y aplicándola a un sistema de tres dimensiones, se vuelve a definir el Hessiano de una función como (4.7).

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} & \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \end{bmatrix}$$

(4.7)

$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \geq 0$	$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \geq 0$	$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \leq 0$	$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \leq 0$	$\det(\mathbf{H}) \geq 0$
(4.8)	(4.9)	(4.10)	(4.10)	(4.10)

Y aplicando los criterios de Taha [10] y de los de Phillips-Ravindran-Solberg se tiene que: Sea  $f(x,y)$  una función de dos variables y sea  $\mathbf{H}$  el hessiano de  $f$ , entonces si se cumplen (4.8)

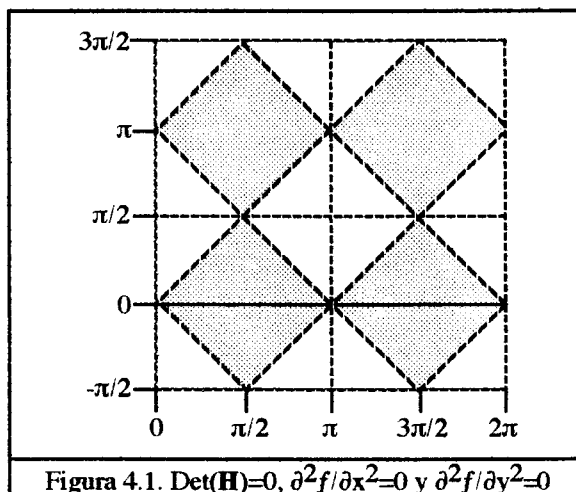
y (4.10), entonces  $f$  es **cóncava hacia arriba**. Y si se cumplen (4.9) y (4.10), entonces  $f$  es **cóncava hacia abajo**.

**Ejemplo Uno:** Supongamos que una superficie está definida por la función  $f(x,y)=\sin(x)\cos(y)$ , donde  $0 \leq x \leq 2\pi$  y  $-\pi/2 \leq y \leq 3\pi/2$ . Si se resuelven las derivadas parciales de segundo orden tendremos las ecuaciones (4.11) a (4.13) se obtienen que  $\det(\mathbf{H})$  está dado por (4.14):

Si se iguala (4.11) y (4.12) a cero y se resuelven para  $x$  y para  $y$  se obtiene que las ecuaciones de cambio de concavidad son en (4.15) y (4.16). Se puede tomar alguna decisión sobre concavidad si y solo si  $\det(\mathbf{H}) \geq 0$  es decir que los límites se encuentran cuando (4.14) sea igual a cero, esto da como resultado (4.17). Graficando estos resultados obtenemos las rectas en la figura 4.1.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x) \cos(y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(x) \cos(y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\cos(x) \sin(y)$	$\det(\mathbf{H}) = \sin^2(x) - \sin^2(y)$
(4.11)	(4.12)	(4.13)	(4.14)

$x = n\pi$	$y = (2n-1)\pi/2$ donde $n=0,1,2$	$x = \pm y$
(4.15)	(4.16)	(4.17)



En esta figura se muestran las ecuación (4.15) como las líneas verticales ( $x=0, \pi$  y  $2\pi$ ), la (4.16) como las horizontales ( $y=-\pi/2, \pi/2$  y  $3\pi/2$ ) y la ecuación (4.17) como las líneas inclinadas, las regiones sombreadas son las regiones donde  $\det(\mathbf{H}) > 0$ . Las pruebas expuestas por Hillier-Lieberman, Taha y Phillips-Ravindran-Solberg son la misma que Leithold [8] llama "Pruebas de la segunda derivada para garantizar extremos relativos" la cual dice lo siguiente:

"Sea  $f$  una función de dos variables tal que  $f$  y su primera y segunda derivada parciales sean continuas en algún disco abierto  $B((a,b),r)$ . Supóngase, además que  $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ . Entonces:

- i)  $f$  tiene un valor mínimo relativo en  $(a,b)$  si  $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}^2(a,b)>0$  y  $f_{xx}(a,b)>0$
- ii)  $f$  tiene un valor máximo relativo en  $(a,b)$  si  $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}^2(a,b)>0$  y  $f_{xx}(a,b)<0$
- iii)  $f(a,b)$  no es extremo relativo si  $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}^2(a,b)<0$
- iv) No podemos tener ninguna conclusión si:  $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}^2(a,b)=0$ "

Esto nos da la pauta para decir que la condición (4.10) sirve para obtener las regiones dentro de las cuales una superficie tiene extremos. Si observamos la gráfica anterior, las partes sombreadas son las regiones dentro de las cuales se encuentran los extremos de la función.  $f(x,y)$  tiene dos máximos relativos en  $(\pi/2, 0)$  y  $(3\pi/2, \pi)$  y dos mínimos relativos en  $(\pi/2, \pi)$  y  $(3\pi/2, 0)$ . Como el fin de este apartado no es el de encontrar extremos de la superficies, si no encontrar los cambios de concavidad, podemos llegar a la siguiente definición.

**Definición 4.1.** Sea  $z=f(x,y)$  una función tal que  $f$  sea diferenciable en una región, llamaremos **Curvas de inflexión** al conjunto de curvas en el plano XY definidas por (4.18) y (4.19), las cuales representan las curvas donde se tiene cambio de concavidad de  $f(x,y)$ .

$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=0$	$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}=0$
(4.18)	(4.19)

## 2.2. Concavidad de 180°

Esta es el criterio llamado *Segundo criterio de división* o restricción de concavidad y se basa en que; si hacemos la suposición de que estamos "viendo" una esfera, lo máximo que se logrará ver es uno de sus hemisferios, por lo que un límite natural de visualización es de 180° en la concavidad. Es decir si se tiene dos vectores normal a la esfera y estos tiene menos de 180° entre ellos, los vectores se encontrara en el mismo hemisferio. Esto no resuelve el problema, ya que al observar la esfera, se tendrán dos hemisferios opuestos, pero se tiene un número infinito de pares hemisféricos. Es decir que dependiendo del punto de vista del que se observa la esfera se tienen una par u otro par hemisférico. Cualquiera de las soluciones satisface la necesidad de ver todo el objeto por lo que se debe tomar la que menos nos divida la superficie.

La forma en que podemos detectar el ángulo entre dos vectores es obteniendo el producto escalar de los vectores. Antes debemos poder obtener el vector normal a una superficie. Esto se puede lograr mediante la definición dada por Leithold [8]. "Definición 19.1.6. Si  $f(x,y,z)=0$  es una ecuación de tres variables y las primeras derivadas parciales  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$  existen, entonces el **gradiente** de  $f$ , representado por  $\nabla f$ , está definido por:

$$\nabla f(x,y,z)=f_x(x,y,z)\mathbf{i}+f_y(x,y,z)\mathbf{j}+f_z(x,y,z)\mathbf{k}."$$

Y el "Teorema 19.2.2. Si una ecuación de una superficie  $S$  es  $f(x,y,z)=0$  y  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$  son continuas y no todas cero en el punto  $P_0(x_0,y_0,z_0)$  en  $S$ , entonces un vector normal a  $S$  en  $P_0$  esta dado por  $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ ".

El producto escalar esta definido según la siguiente definición y el siguiente teorema dados por Leithold [8]. "Definición 17.3.1. Si  $\mathbf{A}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$  y  $\mathbf{B}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ , el **producto escalar de A y B**, representado por  $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ , está dado por:  $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ ". "Teorema 17.3.4. Si  $\theta$  es la medida en radianes del ángulo entre los vectores distintos de cero  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  en  $V_3$ , entonces:  $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$ ". Es decir que todo integrado queda según la ecuación (4.20). En resumen el ángulo entre los dos vectores normales en los puntos  $P_0(x_0,y_0,z_0)$  y  $P_1(x_1,y_1,z_1)$  esta dada por la expresión (4.21) (usando la notación de Leithold que define  $f_x=\partial f/\partial x$  y  $f_y=\partial f/\partial y$ ).

$\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}=\cos\theta$	$\frac{f_x(P_0)f_x(P_1)+f_y(P_0)f_y(P_1)+f_z(P_0)f_z(P_1)}{\sqrt{f_x(P_0)^2+f_y(P_0)^2+f_z(P_0)^2}\sqrt{f_x(P_1)^2+f_y(P_1)^2+f_z(P_1)^2}}=\cos\theta$
(4.20)	(4.21)

Es evidente que se requiere de mucho cómputo para poder lograr la división de una superficie usando este criterios. Volviendo a tomar el cuestionamiento anterior sobre la división de la esfera, hagamos la siguiente analogía. La división de la esfera en dos hemisferios implica trazar una línea en el ecuador, ésta línea puede ser tomada como la línea que une dos vectores normales que tienen  $180^\circ$  entre si. Es decir que para encontrar el ecuador se deben encontrar los puntos de la esfera cuyos vectores normales tiene dichas direcciones. En la figura 4.2 se muestra una ilustración de lo expuesto.

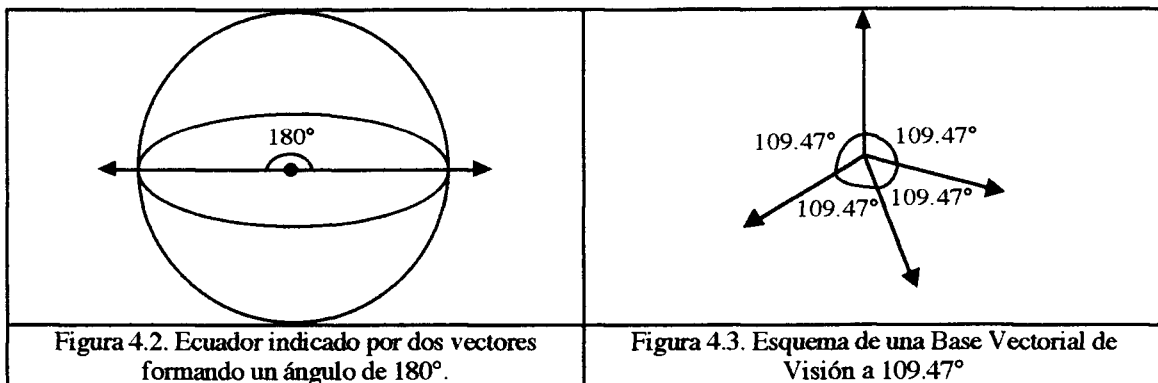
El limite de los  $180^\circ$  es una cota superior de visión, eso significa que ningún sensor de visión podrá lograr captar un hemisferio de la esfera en forma completa, debido a limitaciones físicas del sensor como lo son resolución o campo de visión, por lo que se debe limita el ángulo

de visualización. Una forma de hacer esto es usar una Base Vectorial de Visión (BVV), un ejemplo de BVV de apertura angular  $180^\circ$  son los dos vectores que se muestran en la figura 4.2. Antes de continuar se debe definir que significa *apertura angular* y *base vectorial de visión*

### 2.2.1. Base vectorial de visión (BVV).

**Definición 4.2.** Apertura angular: Es el ángulo formado entre dos líneas o vectores que parten de mismo punto.

**Definición 4.3.** Base Vectorial de Visión: Sean  $n$  vectores unitarios  $\in \mathfrak{R}^3$ , se dice que éstos forman una **Base Vectorial de Visión** si la *apertura angular* entre todos los vectores es  $K\theta$ , donde:  $K=1,2,\dots$  y  $\theta$  es un valor constante en grados.



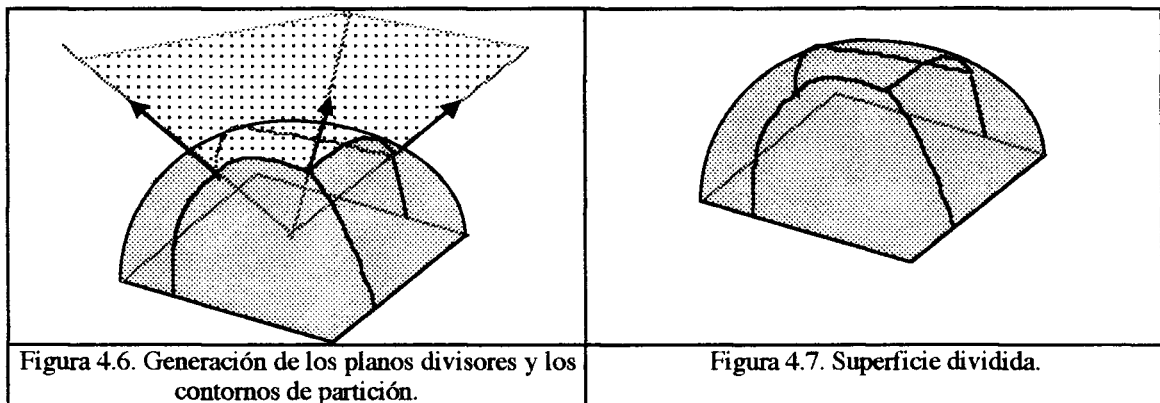
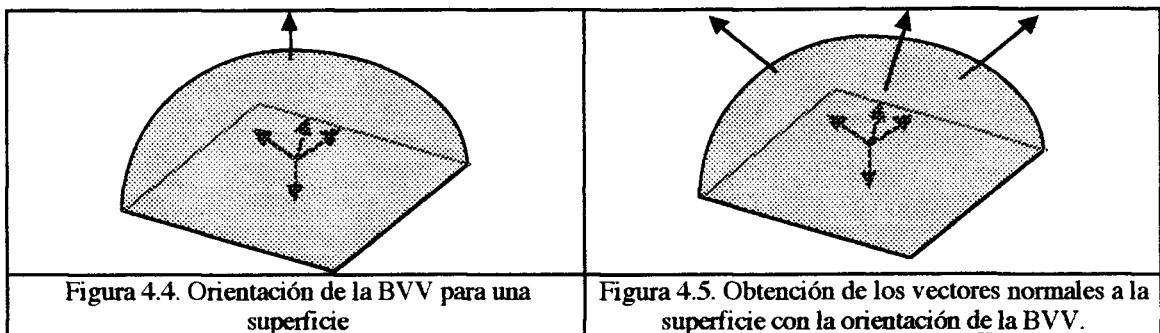
Si se observa, en una BVV de  $180^\circ$  se tienen dos vectores. Una BVV puede ser usada para partir una superficie en subregiones en las cuales dos vectores normales cualesquiera sobre el segmento no excedan una apertura angular definida. Con fines de visión se pueden llegar a tomar solo dos bases, la primera es la de  $180^\circ$  y una de  $109.47^\circ$  (que consta de cuatro vectores). El salto de dos a cuatro vectores se debe a que una base de tres vectores genera una apertura angular de  $120^\circ$  y estos vectores se encuentran en un mismo plano, lo cual intentaría partir una superficie mediante un plano y esto causaría el mismo efecto que una base de  $180^\circ$ . En la figura 4.3 se muestra un esquema de la base de cuatro vectores.

La forma de generar una BVV es compleja y sus características están descritas en un sistema de ecuaciones no lineales, el cual debe ser solucionado por algún método numérico iterativo. En el Apéndice B se muestra un método que puede ser usado. Para obtener una solución se pueden hacer dos cosas, aplicar un método que converja a una solución de muchas, o imponer restricciones para poder llegar a una solución. En el análisis hecho para este trabajo se impusieron restricciones para lograr una solución.

### 2.2.2. División de una superficie usando BVV

Para partir una superficie se hará una observación; en el espacio se puede generar un plano mediante un vector normal y un punto específico, mediante tres puntos o mediante dos vectores y un punto; se pueden usar dos vectores de la Base para generar un plano que cruce la superficie, de tal forma que la intersección de la superficie con el plano genere un contorno de partición.

**Definición 4.4:** Contorno de partición. Se llama **contorno de partición** a una curva  $C$  en el espacio, para la cual todos sus puntos son elementos de una superficie  $S$ . La cual define una frontera con el fin de dividir a  $S$ .



Es decir una base de dos vectores se genera dos planos (iguales) que producen un contorno de partición en el ecuador de la esfera. Es este el motivo por el cual una Base de tres vectores no genera mas información; los tres vectores generan tres planos iguales que partirían la esfera también por el ecuador. Un sistema de cuatro vectores genera seis planos partiendo así una esfera en cuatro superficies.

En una esfera es trivial el problema de colocar los vectores, ya que no importando como se coloquen cada uno de ellos es normal a la esfera y produce una división efectivamente al ángulo deseado. En una superficie no esférica es diferente, por lo que se define una metodología para

dividir las superficies. Puede haber muchas formas para realizar esta tarea, pero no se debe olvidar que la principal tarea es obtener una apertura angular máxima entre cualquier par de vectores normales de la superficie. Una metodología que se podría llegar a usar es la que se plantea en la tabla 4.1.

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Orientar uno de los vectores de la BVV en dirección opuesta al vector normal en el extremo absoluto de la superficie.</li> <li>2. Definir la orientación de los demás vectores de la Base (ver figura 4.4).</li> <li>3. Encontrar los puntos de la superficie cuyos vectores normales tengan la misma orientación que los demás vectores de la Base (ver figura 4.5).</li> <li>4. Si solo existe un punto o ninguno cuyo vector normal tiene la dirección de algún vector de la BVV dentro del dominio de la superficie, entonces <b>No es posible dividir la superficie mediante el uso de BVV.</b></li> <li>5. Si al menos existen dos puntos con vectores normales orientados a algún vector de la BVV; <b>Es necesario dividir.</b> Generar los planos divisores usando los vectores de la BVV y obtener los contornos de partición usando la intersección de la superficie con los planos divisores (ver figura 4.6).</li> <li>6. La superficie queda partida usando los contornos de partición que estén definidos dentro del dominio de la superficie (ver figura 4.7).</li> </ol> <p style="text-align: center;">Tabla 4.1. Pasos para dividir una superficies en base a la segunda restricción de visión.</p>
--

**Ejemplo Dos:** Obtener los contornos de partición de  $f(x,y)=x^2+y^2$ .

Definiendo una BVV formada por los siguientes cuatro vectores:

$$B_1=[0, 0, 1]$$

$$B_2=[0, -0.9428, -0.3333]$$

$$B_3=[0.8165, 0.4714, -0.3333]$$

$$B_4=[-0.8165, 0.4714, -0.3333]$$

El Gradiente de  $f$  está dado por  $\nabla f(x,y,z)=2xi+2yj-k$ , debemos encontrar un extremo de la función usando las derivadas parciales; como  $2x=0$  y  $2y=0$  encontramos que se tiene un extremo en  $(x,y)=(0, 0)$ . Mediante los criterios vistos en 2.1 encontramos que  $\det(\mathbf{H})=4$ , por lo que el punto  $(0, 0)$  es un mínimo y su vector normal es  $N_m=[0, 0, -1]$ . Con esto observamos que la BVV propuesta puede ser usada ya que  $B_1$  se encuentra en sentido opuesto a  $N_m$ .

Se debe cumplir que  $K_i B_i = \nabla f(x,y,z)$  donde  $K_i \in \mathfrak{R}$  y  $K_i > 0$  para que el vector de la BVV este en el mismo sentido que el vector normal a la superficie. Con este conocimiento se plantean los sistemas de ecuaciones y se resuelven para obtener las coordenadas de los puntos, como se muestra a continuación:

$$\underline{K_1 B_1 = \nabla f(x, y, z)}$$

$$(0)xK_1 = 2x$$

$$(0)xK_1 = 2y$$

$$(1)xK_1 = -1$$

$K = -1$  X No existe un punto.

$$\underline{K_2 B_2 = \nabla f(x, y, z)}$$

$$(0)xK_2 = 2x$$

$$-0.9428K_2 = 2y$$

$$-0.3333K_2 = -1$$

$$x = 0$$

$$y = -1.4142$$

$K = 3$  ✓ Existe el punto.

$$\underline{K_3 B_3 = \nabla f(x, y, z)}$$

$$0.8165K_3 = 2x$$

$$0.4714K_3 = 2y$$

$$-0.3333K_3 = -1$$

$$x = 1.224785$$

$$y = 0.7071$$

$K = 3$  ✓ Existe el punto.

$$\underline{K_4 B_4 = \nabla f(x, y, z)}$$

$$-0.8165K_4 = 2x$$

$$0.4714K_4 = 2y$$

$$-0.3333K_4 = -1$$

$$x = -1.224785$$

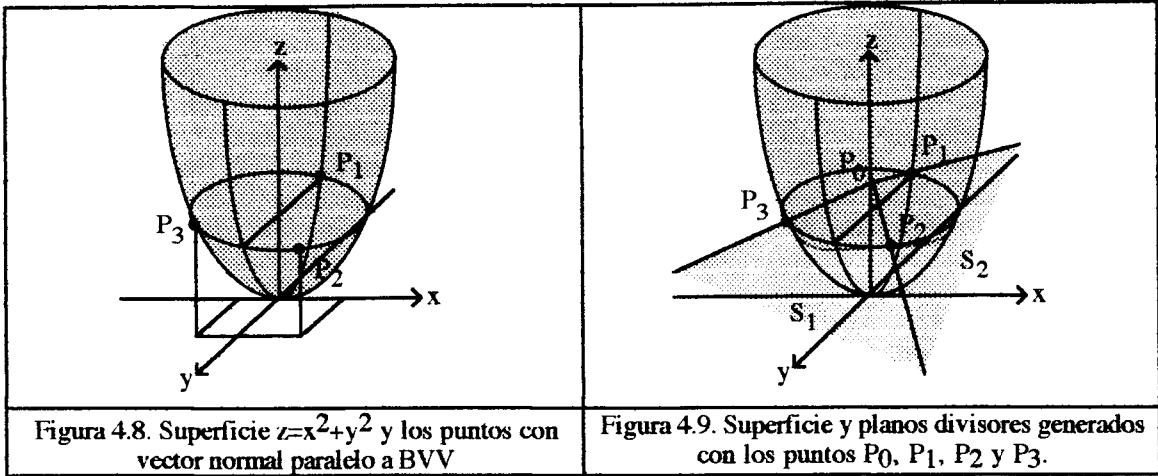
$$y = 0.7071$$

$K = 3$  ✓ Existe el punto.

Existen tres puntos ( $P_1 = (0, -0.4141, 2)$ ,  $P_2 = (1.224785, 0.7071, 2)$  y  $P_3 = (-1.224785, 0.7071, 2)$ ) cuyos vectores normales tienen la dirección de tres diferentes vectores de la Base Vectorial de Visión. usando estos puntos y los vectores de la BVV podemos llegar a obtener tres planos. Formaremos los planos utilizando un vector perpendicular a dos vectores de la Base (vector normal al plano) y algún punto en el espacio, la única restricción es que el plano generado toque los dos puntos de la superficie deseados.

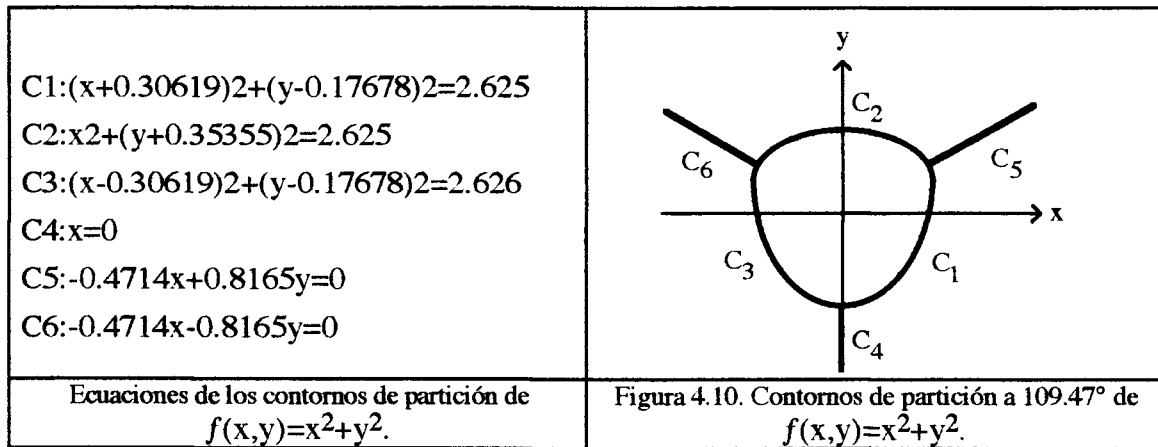
Generaremos las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por los puntos con la dirección de los vectores de la base. Las cuales son:  $[0, -1.4142 - 0.9428T, 2 - 0.3333T]$ ,  $[1.22475 + 0.8165T, 0.7071 + 0.4714T, 2 - 0.3333T]$  y  $[-1.22475 - 0.8165T, 0.7071 + 0.4714T, 2 - 0.3333T]$ , las cuales se intersectan en  $P_0 = (0, 0, 2.5)$ . Con el punto  $(0, 0, 2.5)$  y los vectores de la BVV podemos obtener los planos divisores. En la figura 4.8 se muestran los puntos sobre la gráfica de la función y en la figura 4.9 se muestran las rectas que intersectan en  $P_0$  y pasan por  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ . La ecuación del plano que une  $P_0 - P_1 - P_2$  es;  $S_1: 0.4714x - 0.61217y + 0.7698(z - 2.5) = 0$ , la del plano que une  $P_0 - P_2 - P_3$  es;  $S_2: 0.54433y + 0.7698(z - 2.5) = 0$  y la del plano que une  $P_0 - P_3 - P_1$  es;  $S_3: 0.4714x + 0.27217y - 0.7698(z - 2.5) = 0$ .





Se deben encontrar los planos formados por el vector  $[0, 0, 1]$  de la BVV, los demás vectores de la BVV y el punto  $(0, 0, 2.5)$ . Los planos son los siguientes;  $S_4: x=0$ ,  $S_5: -0.4714x+0.8165y=0$  y  $S_6: -0.4714x-0.8165y=0$ . Estos planos son planos verticales y como el origen es parte de ellos, entonces estos planos intersectan a  $f$ . Dichas expresiones representan el contorno de partición, los contornos de partición son ecuaciones en el plano XY que representan los puntos de la función que la intersectan con los planos divisores, estos se obtiene con la igualación  $f(x,y)=S_i(x,y)$ .

Con lo anterior llegamos a obtener las expresiones de los contornos de partición para  $f(x,y)=x^2+y^2$  usando una Base Vectorial de Visión de  $109.47^\circ$ . De los cuales  $C_1, C_2$  y  $C_3$  son segmentos de una circunferencia y  $C_4, C_5$  y  $C_6$  son segmentos de recta. En la figura 4.10 se muestran los contornos y las regiones en el plano XY entro de las cuales son válidos. A continuación se presentan las expresiones de los contornos de partición.



### 2.2.3. Restricción al método de división de superficies por BVV

El método para partición de superficies tiene como principal restricción, que sólo funcionar sobre superficies con la misma concavidad. Si se desea partir una superficies con cambios de concavidad se debe aplicar el método de partición a las regiones de la superficie que mantengan el mismo tipo de concavidad, por lo que se recomienda aplicar el Segundo criterio de división después de aplicar el Primer criterio de división.

Otra restricción es que la superficie debe poder ser expresada en forma analítica. Es evidente que la representación de la superficie tiene que ser diferenciable para poder obtener sus vectores normales.

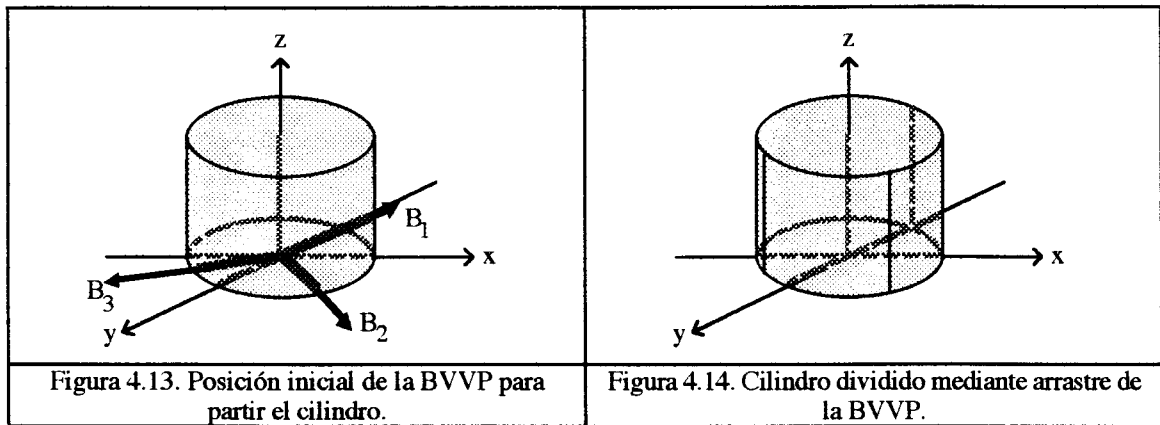
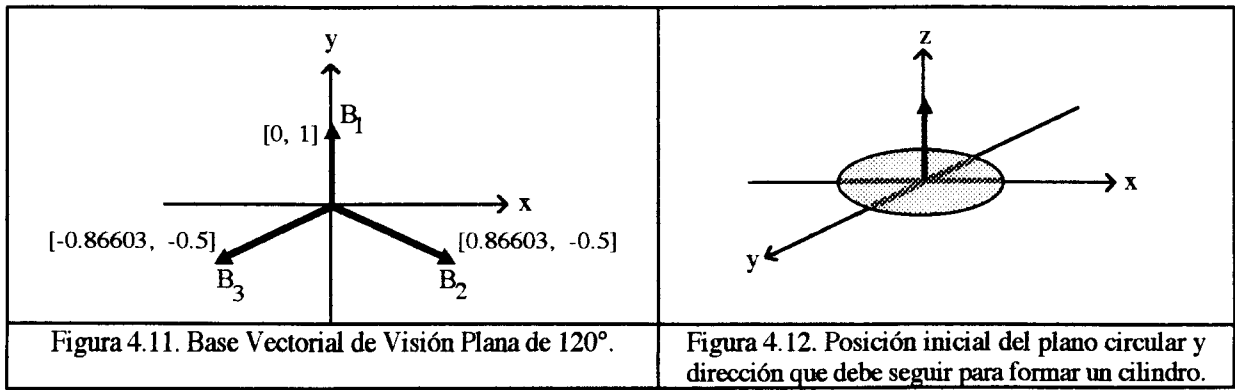
### 2.2.4. Superficies que no pueden ser divididas usando BVV

Un objeto puede llegar a ser expresado de tal forma que no se logre encontrar más de un vector normal en dirección a la Base Vectorial de Visión. Cuando eso sucede no se puede dividir la superficie usando BVV. Cuando esto sucede se tienen dos opciones. La primera es que no existan dos vectores normales a la superficie que tengan una apertura angular mayor a la de la BVV. Y la segunda es que la superficie sea el resultado del recorrido (sweep) de una figura a través de un desplazamiento. Por ejemplo un *cilindro* es el resultado de recorrer una cara circular en la dirección del vector normal a la cara.

Esto causará que los vectores normales al objeto se encuentren en un plano. Si se desea partir el objeto en superficies cuyas aperturas angulares máximas no excedan un limite, se puede generar una Base Vectorial de Visión Plana. Esta Base se recorre por la misma trayectoria que se siguió para construir el objeto y con eso se logra dividir el objeto.

**Definición 4.5.** Base Vectorial de Visión Plana: Es el resultado obtener  $n$  vectores unitarios sobre un plano, los cuales están igualmente espaciados entre si.

Es decir una BVVP de  $120^\circ$  son tres vectores, si trasladamos los vectores por el mismo recorrido usado para generar el objeto habremos dividido al objeto en regiones con una apertura angular máxima menor a la de la BVVP. En la figura 4.11 se muestra una BVVP de  $120^\circ$ , estos vectores son  $B_1=[0, 1]$ ,  $B_2=[0.86603, -0.5]$  y  $B_3=[-0.86603, -0.5]$ . En la figura 4.12 se muestra la cara circular y la dirección que se debe seguir para formar un cilindro mediante arrastre (Sweep), en la figura 4.13 se muestra la posición inicial del la BVVP antes de trasladarla a través del cilindro y en la figura 4.14 se muestra al cilindro dividido mediante el proceso de trasladar la BVVP a través del cilindro.



### 2.3. Continuidad de la superficie

Este es el tercer criterio para partir superficies y es llamado *Tercer criterio de división*, es el único de los criterios que define regiones naturales de división. Es natural que una superficie este dividida a través de cierto lugar en las cuales la superficie no es continua o no está definida. Ya que una región natural de división es en los puntos donde la superficie no es continua, también lo será en donde la superficie tiene un cambio brusco.

Haciendo referencia al Primer criterio de división, recordaremos que este encuentra los lugares en donde la concavidad cambia de signo, en el Tercer criterio de división encontraremos los lugares en donde la superficie no sea continua, por lo que la continuidad de la función y sus derivada toma un papel importante en el Tercer criterio de división.

Encontrar las regiones de discontinuidad es un trabajo que requiere conocimiento de la representación del objeto por lo que este tercer criterio de división solo quedará indicado y no se desarrollará una metodología para detectar discontinuidad. Este trabajo queda como ejercicio para trabajo futuro.

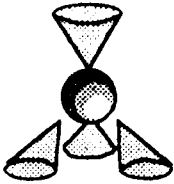
### 3. División de superficies

Para poder generar la región de visualización de un objeto es necesario aplicarle el algoritmo adecuado dependiendo del tipo de concavidad que presente, con esta necesidad se han logrado definir metodologías para poder dividir los objetos en superficies cóncavas hacia arriba o cóncavas hacia abajo. La forma de generar esto es mediante el criterio de la segunda derivada, el cual encuentra las *curvas de inflexión* de una superficie. Este es el *Primer Criterio de División*.

Por limitaciones físicas de cualquier sensor de visión, la concavidad de toda superficie tiene que ser limitada a una *apertura angular*. La forma para realizar esta división es mediante el uso de *Bases Vectoriales de Visión* (BVV), estas definen un conjunto de vectores con una apertura angular. Mediante el uso de las BVV es posible generar *planos divisores*, los cuales se intersectan con la superficie y generan *contornos de partición*. Si la superficie no puede ser dividida mediante BVV se utilizan *Bases Vectoriales de Visión Planas*, las cuales son la forma de generar regiones de partición a objetos que fueron creados mediante arrastre de caras. Este es el *Tercer Criterio de División*.

Como última parte se expresa la necesidad de partir una superficie a través de las *regiones naturales de división*, las cuales son cuando el objeto tiene discontinuidades ya sea en su superficie o en sus derivadas primera y segunda. Estos son los lugares naturales de división y este es el llamado *Tercer Criterio de División*.

Toda superficie debe ser limitada, ya sea por características físicas de los sensores o por limitaciones de los algoritmos. Los criterios que se presentan en esta sección son suficientes para dividir superficies mas no son definitivos, con esto se quiere decir que puede haber laguna superficie definida de alguna forma no considerada en este estudio, la cual quede partida de forma insuficiente o la partición.



## Capítulo V: Región de visualización de una superficie

---

### Resumen

En este capítulo se ejemplifica como es que se aplican los criterios de división de superficies y se une todo lo visto en los capítulos III y IV. Se desarrollo todo lo expuesto en los capítulos anteriores en forma de ejemplo. Este ejemplo sirve para hilar los conceptos que se han desarrollado y poder así afianzar el conocimiento. Se comienza con definir una superficie, después por aplicar los criterios de división de superficies y a cada segmento resultante de análisis mencionado se le aplican los algoritmos de visualización adecuados, de esta forma se logra obtener la región de visualización de la superficie.

### 1. Introducción

En este capítulo se obtendrá la región de visualización de una superficie. Es aquí en donde se logra unir lo que se expuso en los capítulos III y IV. Con este ejemplo se logra ver que en realidad obtener la región de visualización de un objeto mediante los algoritmos propuestos es bastante simple y no requieren de demasiados recursos.

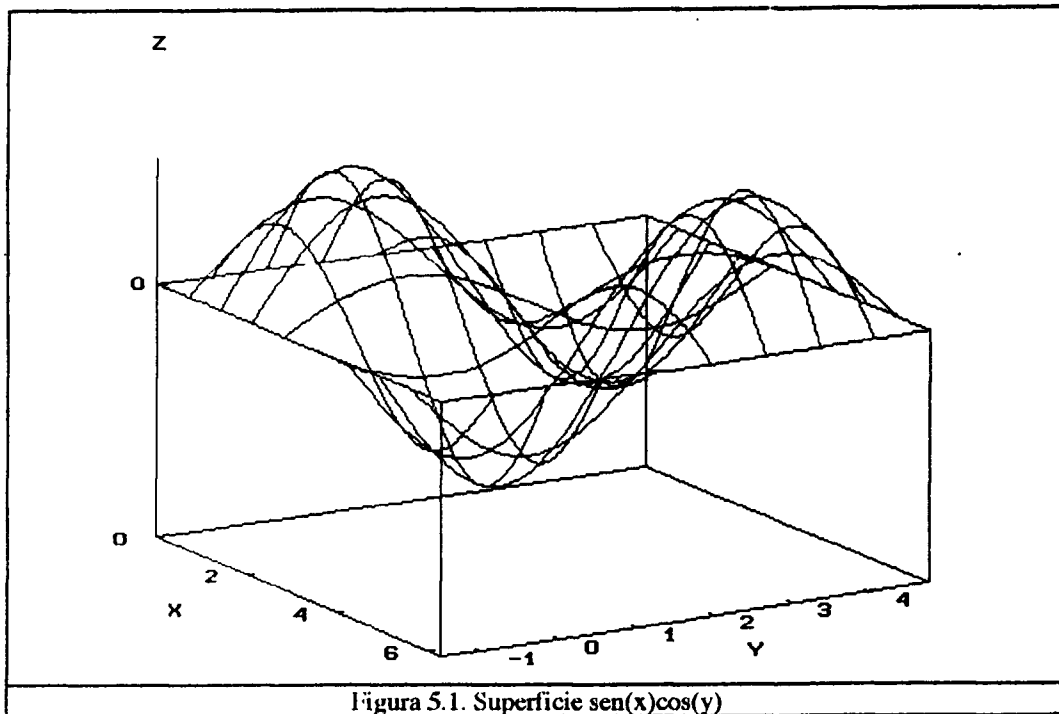
Las gráficas que aquí se observan son el resultado de una simulación utilizando el programa GNUPlot. Con dicho programa se lograron graficar la función y su región de visualización gracias a que puede manejar decisiones. En el Apéndice D se muestra el listado utilizado para poder realizar las gráficas.

En la sección 2 se describe la ecuación y algunas características que ya se conocían de la superficie, en la 2.1 se muestra como se aplicó el segundo criterio de división de superficies, en la 2.2 se muestra como es que finalmente quedó dividida la superficie para poder aplicar los algoritmos de visualización, en la sección 2.3 se muestra como es que se obtuvieron las regiones de visualización de cada segmento y en la sección 2.4 se muestra la superficie de visualización de toda la superficie.

### 2. Región de visualización de una superficie

En este capítulo obtendremos la región de visualización de una superficie modela con la ecuación (5.1), esta se muestra en la figura 5.1. En el ejemplo uno del capítulo anterior fue dividida esta superficie en segmentos cóncavos hacia arriba y cóncavos hacia abajo. Dicha superficie está definida dentro de la región:  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $-\pi/2 \leq y \leq 3\pi/2$ , se aplicará el segundo criterio de división de superficie para asegurar que la superficie no tenga una apertura angular excesiva.

$z = \text{sen}(x) \cos(y)$
(5.1)



### 2.1. Segundo criterio de división de superficies

Para aplicar el segundo criterio se necesita definir una Base Vectorial de Visión. Se usará la definida en el capítulo IV la cual se muestra en (5.2). Se debe aplicar el método a cada una de los segmentos obtenido con el cambio de la concavidad, es decir, aplicar el criterio cuatro veces. Se intentará dividir el primer segmento, el cual está definido en la región  $0 \leq x \leq \pi/2, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ .

$B_1 = [0, 0, 1]$ $B_2 = [0, -0.9428, -0.3333]$ $B_3 = [0.8165, 0.4714, -0.3333]$ $B_4 = [-0.8165, 0.4714, -0.3333]$	$\nabla f(x, y, z) =$ $\cos(x)\text{sen}(y)\mathbf{i} - \text{sen}(x)\text{sen}(y)\mathbf{j} - \mathbf{k}$	$-0.3333(K_2) = -1$ $-0.9428(K_2) = -\text{sen}(x)\text{sen}(y)$ $0(K_2) = \cos(x)\text{sen}(y)$
(5.2)	(5.3)	(5.4)

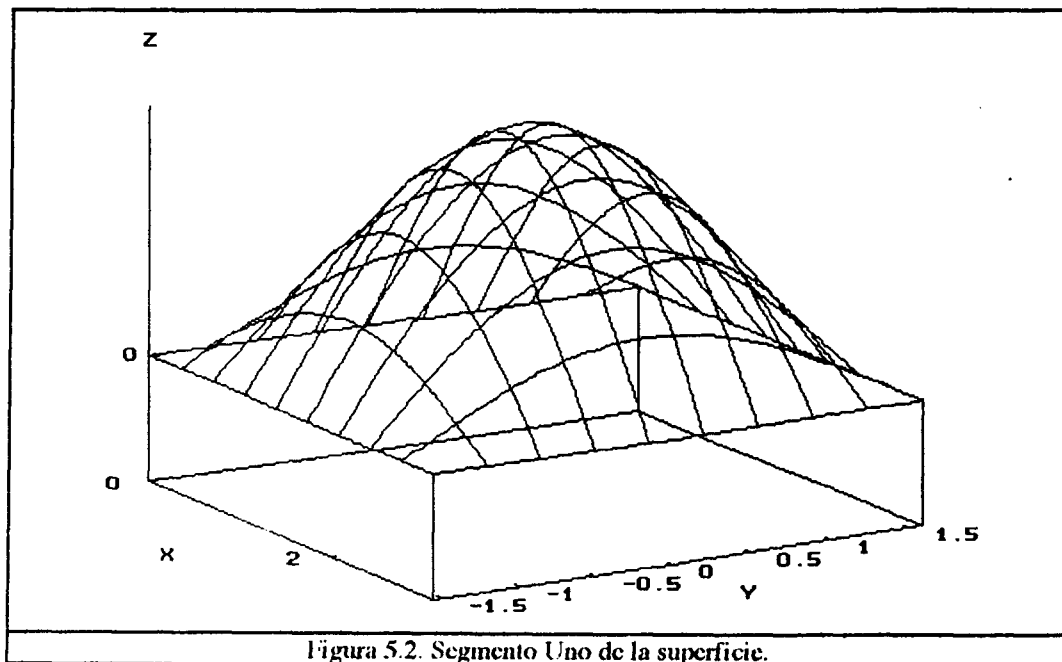
Se debe orientar un vector de la BVV en el sentido opuesto al vector normal del extremo absoluto del segmento. Este segmento tiene un máximo en  $(\pi/2, 0)$  y su vector normal es  $N = (0, 0, -1)$  y como se observa  $B_1$  de la BVV ya se encuentra en sentido opuesto. Ahora se deben encontrar los puntos cuyos vectores normales estén en sentido de algún vector de la BVV. Comenzando con  $B_2$ , se debe cumplir lo siguiente:  $K_2 B_2 = \nabla f(x, y, z)$ . El gradiente de la función está dado según la ecuación (5.3), con esto se plantea el sistema de ecuaciones mostrado en (5.4). De dicho sistema se obtiene que  $K_2 = 3$ , por lo que  $-\text{sen}(x)\text{sen}(y) = -2.8284$ . Este valor no se puede lograr debido a que la función seno siempre es menor que 1 y mayor que -1, por lo que

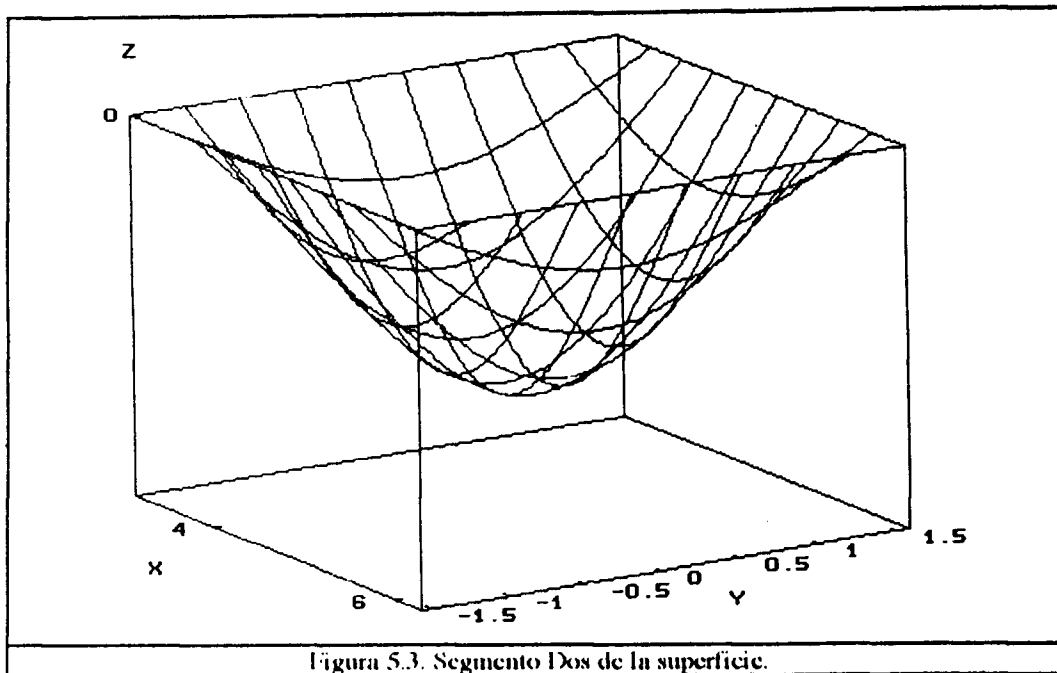
el producto  $\text{sen}(x)\text{sen}(y)$  lo máximo que puede lograr es  $-1$ . Con esto se concluye que la superficie no tiene punto alguno con la dirección de  $B_2$ .

Si observamos la primer ecuación de (5.4) podemos decir que todos los valores  $K_i$  de los sistemas de ecuaciones restantes serán  $K_i=3$ , debido a que todos los terceros componentes de los vectores de la BVV tienen el valor de  $-0.3333$ , por lo que no se logrará encontrar ninguna solución a los sistemas de ecuaciones. Con esto concluimos que el primer segmento tiene necesidad de ser dividido y como los demás segmentos de la superficies son semejantes dicho segmento, ningún segmento de la superficie necesita ser dividido.

## 2.2. División en segmentos

Aplicados los criterios de división de superficies a la superficie llegamos a obtener cuatro segmentos los cuales se muestran en la figuras 5.2 y 5.3. Como se mencionó anteriormente se puede observar en la figuras que los segmentos son semejantes y como ya se había dicho anteriormente dos de ellos son cóncavos hacia abajo (segmentos uno y cuatro) y los otros dos son cóncavos hacia arriba (segmentos dos y tres). Por lo que solo se observan las gráficas de los segmentos uno y dos, pues las gráficas de los otros dos segmentos son iguales a estas, solo que definidas en otras regiones del plano XY.





### 2.3. Subregiones de visualización

En esta sección se explicara como se obtuvieron cada una de las regiones de visualización de los segmento.

#### 2.4.1. Segmentos cóncavos hacia abajo

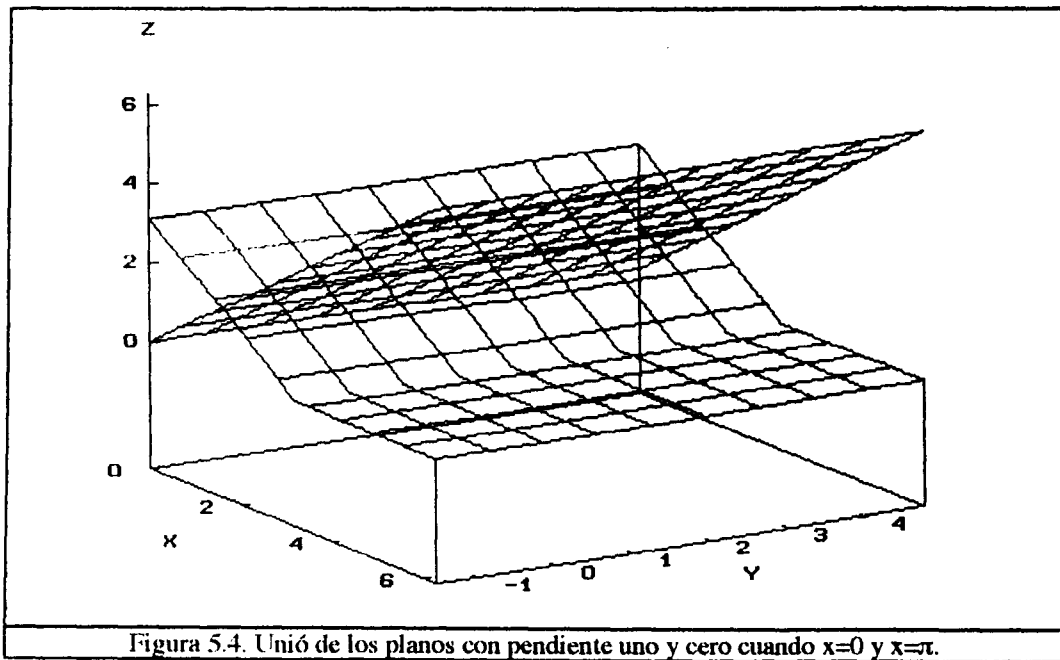
Como se había explicado en el capítulo III, se debe realizar un arrastre orientado de un cubo de tamaño infinito a través de los limites del segmento de tal forma que una de sus caras siempre sea tangente a la superficie y el cubo sea menor a la superficie. Obtengamos la ecuación del planos tangentes a una cara del segmento Uno.

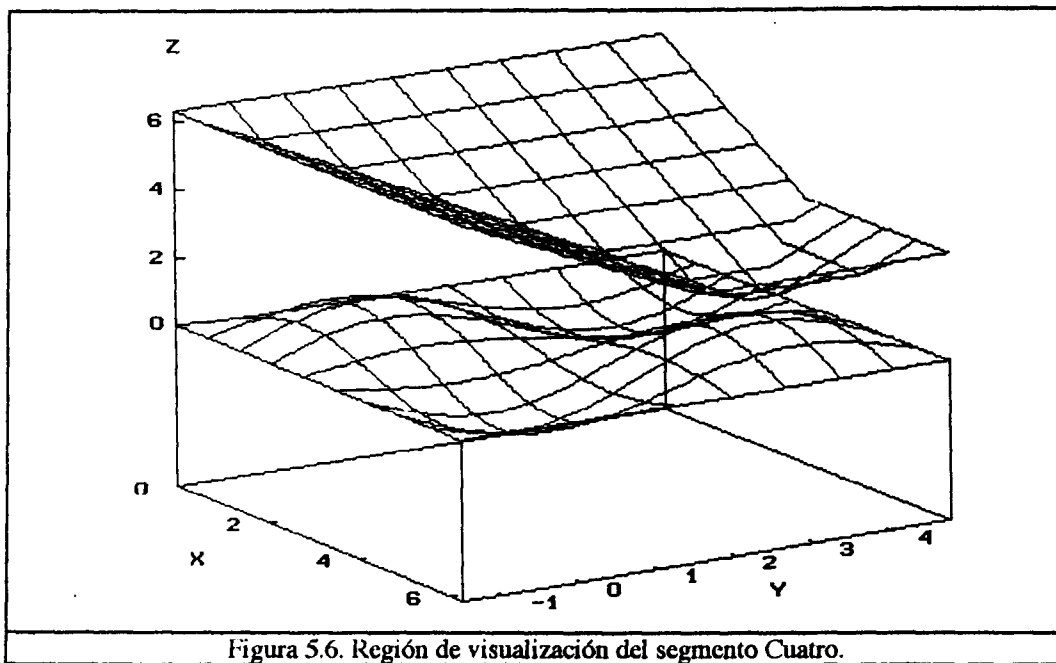
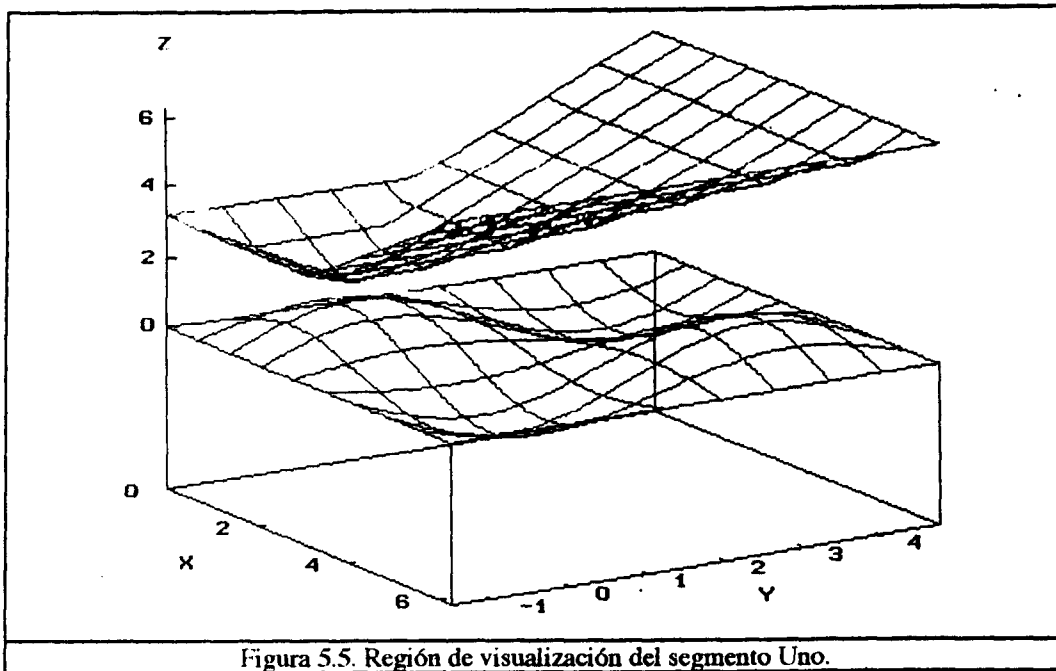
En la ecuación (5.5) se muestra la ecuación del plano que se encuentra cuando  $x=\pi$  y  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ . Como se observa la pendiente del plano varia con respecto a  $\cos(y)$  y por lo limites que se tiene, en los extremos la pendiente es cero, es decir es un plano paralelo al plano XY. La pendiente tiene un máximo en  $y=0$  y esta tiene un valor de uno (1). Como la operación arrastre orientado realiza la unión de todos los puntos que se encuentran por debajo de los planos, entonces se puede decir que el resultado del arrastre orientado es la unión de los puntos que se encuentran por debajo de los planos que se acaban de describir (pendiente cero y pendiente uno). El plano con pendiente cero contribuye con los punto cuando  $x > \pi$  y el plano con pendiente uno con los puntos cuando  $x < \pi$ . Algo semejante ocurre con los otros tres contornos limite del segmento.



Si se unen las regiones creadas con el contorno cuando  $x=\pi$ ,  $x=0$  y  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$  entonces los puntos con los que contribuyen los planos con pendiente cero estarán incluidos en los puntos con los que contribuyen los planos con pendiente uno del otro contorno. En la figura 5.4 se muestran lo que se acaba de explicar. No hay que olvidar que los puntos a los que nos referimos son los que se encuentran por debajo de los planos que se muestran en la figura. Es por eso que al fin de cuentas los planos que contribuyen con la región de obstrucción son los planos con la mayor pendiente, por eso para obtener la región de obstrucción de todo el segmento solo se necesita unir las regiones que se encuentran por debajo de los cuatro plano con pendiente uno del segmento. Con eso se obtiene la región de visualización de los segmentos Uno y Cuatro, las cuales se muestran en las figuras 5.5 y 5.6.

$$z = -(x - \pi) \cos(y) \quad (5.5)$$

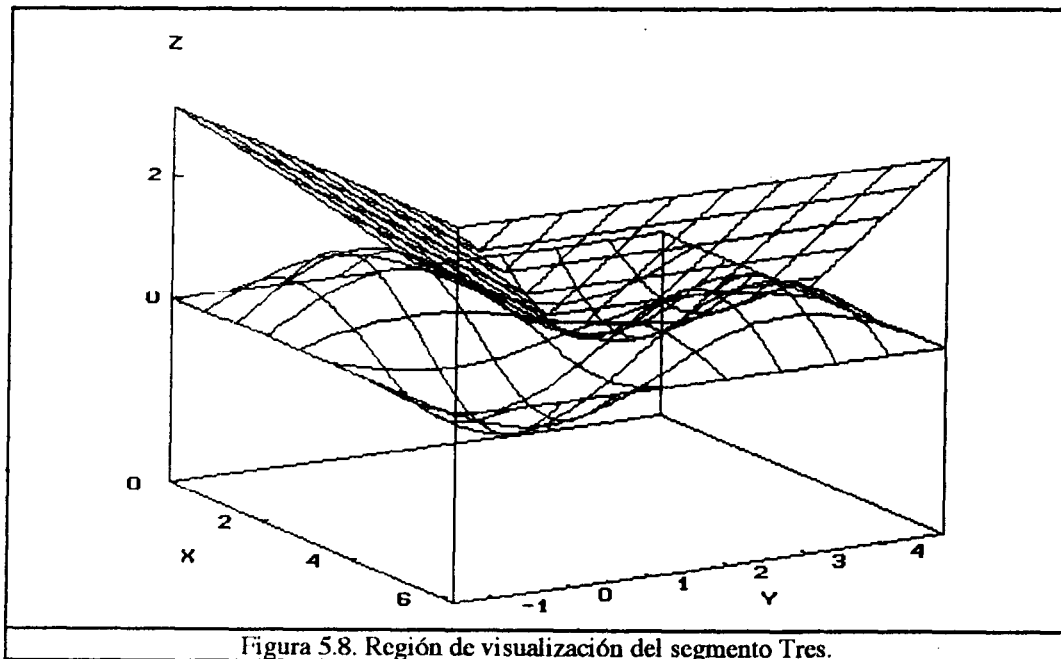
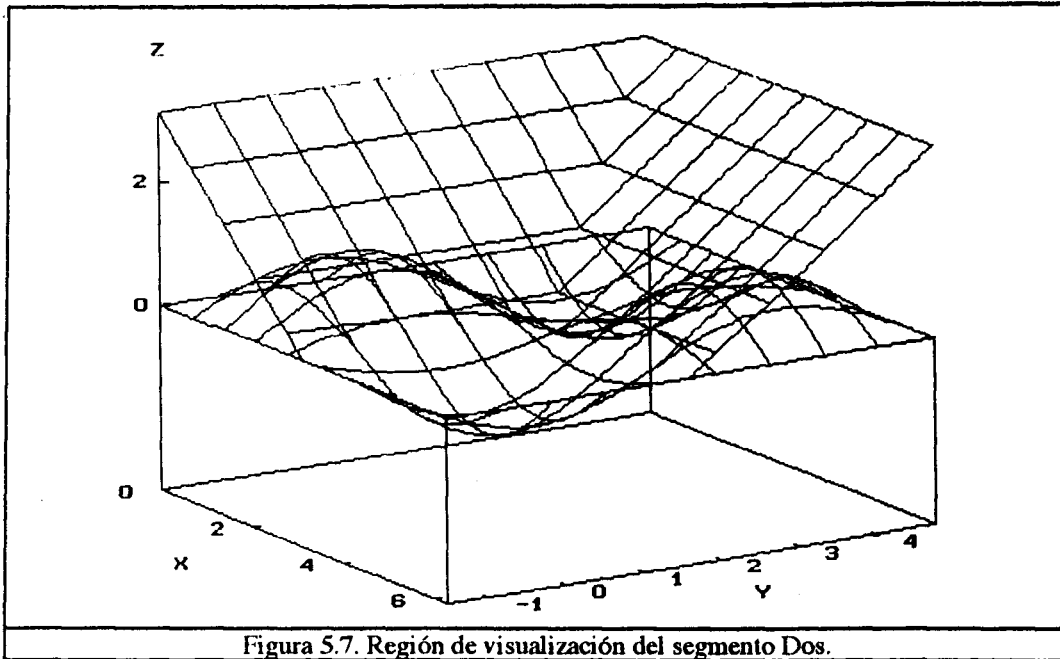




### 2.3.2. Segmentos cóncavos hacia arriba

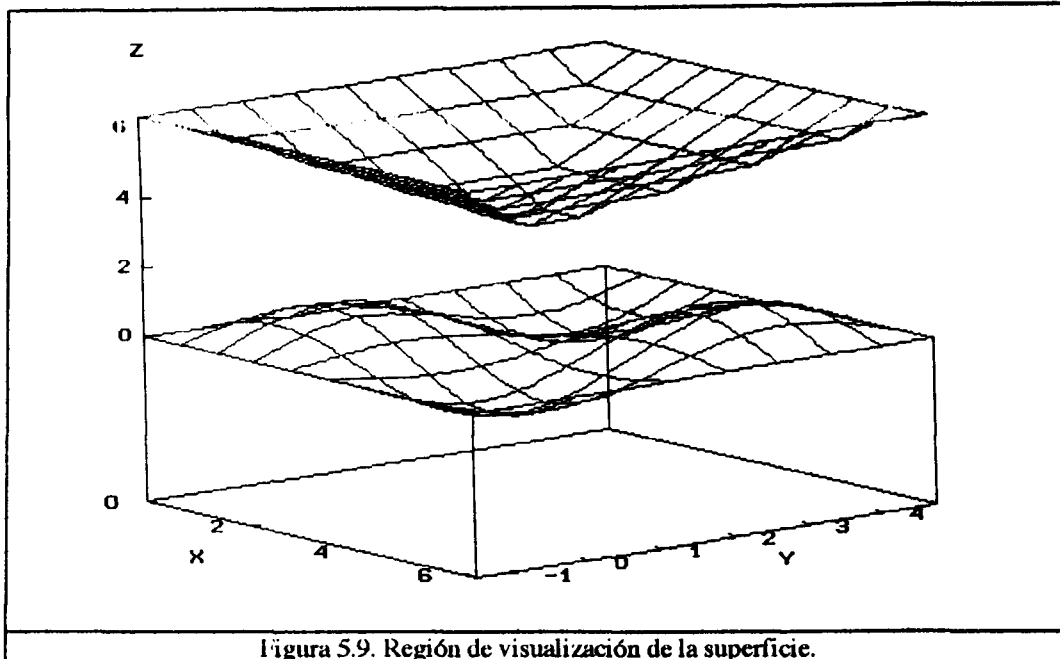
Para este tipo de segmento sucede algo parecido, los planos con pendiente uno son los únicos que contribuyen para obtener la región de obstrucción del segmento por eso son lo que se utilizan para generar la región. Para este tipo de superficies se tiene que obtener la sección cónica, la cual se obtiene de la misma forma como se explicó en el inciso anterior. Se debe obtener la RS (región superior), esta es fácil de obtener debido a que los contornos límite de los segmentos siempre estacan cuando  $z=0$ , por lo tanto la RS está definida por la relación  $z \geq 0$ . El CC (conjunto convexo) de la superficie es algo mas que se debe obtener.

Para realizar esto necesitamos saber si la superficie siempre es cóncava hacia arriba, es decir que si no existen otros contornos límite dentro del dominio del segmento. Los segmentos Dos y Tres son siempre cóncavos hacia arriba por lo que el conjunto convexo de la superficie está limitado por la superficie y el plano  $z=0$ . Realizando la unión de CC con RS y después la intersección con la RC (Región cónica) se obtienen las regiones que se muestran en las figuras 5.7 y 5.8.



## 2.4. Región de visualización de la figura

Para obtener la región de visualización de toda la superficie se necesita intersectar todas las regiones de visualización de los cuatro segmentos. Al realizar esta operación se obtiene la región mostrada en la figura 5.9.



## 3. Conclusiones

Como se pudo observar en este ejemplo en realidad no se necesitó realizar el arrastre orientado, puesto que se contaba con una representación fácil de analizar. Se pudo observar que los planos que más contribuyen como límite para obtener la región de visualización de una superficie son los que tengan una mayor pendiente. Es por eso que 12 planos se pudo obtener la región de visualización de la superficie.

Con lo visto anteriormente se puede decir que si se puede encontrar el plano en todo el contorno límite con la mayor pendiente, este será suficiente para generar un plano limitador de visualización sobre ese contorno límite de la superficie. Esta es una contribución muy importante debido a que con esto se disminuye el número de operaciones necesarias para poder generar la región de visualización de una superficie.



## Capítulo VI: Conclusiones

"Deseo llevar a cabo una tarea grande y noble, pero mi primer compromiso es hacer lo pequeño como si fuera extraordinario" Hellen Keller.

---

### Resumen

En este trabajo se desarrollaron algoritmos para visualizar superficies, partiendo de los segmentos de la superficie y sus regiones de visualización. A la superficie en estudio se le aplicaron criterios para dividirla en segmentos. De aquí surgieron algoritmos que aseguran la visualización de toda la superficie de un objeto.

### 1. Introducción

Durante el transcurso de este trabajo se realizaron métodos para generar la región de visualización de una superficie, para lo cual se tuvieron que catalogar las superficies en tres tipos: cóncavas hacia arriba, cóncavas hacia abajo y sin concavidad definida. Se expusieron los criterios a seguir para poder detectar a que categoría pertenece una superficie dada.

Se desarrollaron algoritmos que se basan en la operación arrastre de un cubo (en sus dos modalidades; arrastre y arrastre orientado) para poder generar las regiones de visualización. Por medio de dicha herramienta, el cubo y operaciones lógicas (unión, intersección y complemento) se logró obtener un algoritmo simple para obtener lo anterior mencionado.

Se definieron criterios para dividir superficies con fines de visión. Aplicando estos criterios a una superficie se logra generar segmentos de superficie a los cuales se les aplican los algoritmos de visualización. Estos criterios son una forma sistematizada y simple de dividir las superficies.

Los criterios de división de superficies son una herramienta necesaria, ya que se requieren de superficies simples que mantengan su concavidad para poder realizar los algoritmos de visualización y obtener un resultado satisfactorio.

Se definió un algoritmo para generar la región de visualización de un objeto, utilizando las regiones de visualización de sus segmentos. Este algoritmo agrupa los segmentos que comparten alguna frontera y sistemáticamente genera las regiones de visualización. Si se llegase a eliminar la región se regresa un paso para continuar buscando opciones, de tal forma que asegure el menor número de imágenes abarcando el mayor número de segmentos.

En la sección 5.2 se describen que son cada una de las partes de este trabajo, en la sección 5.3 se describen cuales son los resultados de este trabajo y en la sección 5.5 se describen las contribuciones de este trabajo de tesis.

## **2. Resultados**

Con este trabajo se obtuvieron una serie de algoritmos que automatizan la generación de la (s) región (es) de visualización de una superficie. El primer trabajo es aplicar los tres criterios de división de superficie, los cuales son: criterio de cambio de concavidad, criterio de concavidad menor a algún ángulo y criterio de continuidad de la superficie. Al aplicar estos tres criterios a las superficie se logran segmentos con características simples que permiten a los algoritmos de visualización generar un región de visualización acertada.

Estos criterios de división de superficie robustecen al algoritmo ya que al asegurar generara segmentos simples, se asegura que las regiones de visualización serán adecuadas, a parte que se tienen unos criterios definidos que pueden ser automatizados.

Se obtienen con este trabajo algoritmos para generar regiones de visualización de superficies, los cuales aseguran visualizar todos los puntos de una superficie, también se asegura obtener el menor número de imágenes del objeto. Esto se logra mediante un algoritmo que toma segmentos de la superficie que son vecinos y los agrupa de tal forma que, si alguno de los segmentos genera una región nula de visualización (con los demás segmentos) este no se incluye en el grupo y se deja para futuro intento de agrupación. Con esto se logra tener un algoritmo que asegure obtener el menor número de imágenes.

## **3. Conclusiones**

Estos algoritmos forman parte de un método geométrico que simplifica el número de operaciones para generar la región de visualización de una superficie. Se dice que es geométrico, ya que se utiliza únicamente un cubo y una serie de operaciones lógicas para generar la región de visualización.

La región de visualización de una superficie puede ser generada con la descripción geométrica de la misma, por lo que la representación del objeto toma una gran importancia para este método. Dicha representación debe ser lo mas aproximada posible, ya que un error en la aproximación puede generar una región de visualización que omita puntos o no genera el menor número de imágenes.

La región de visualización es el conjunto de puntos desde donde un sensor de visión puede ser puesto para que todos los puntos de la superficie sean vistos directamente. Por lo que este método genera un conjunto de opciones para colocar un sensor de visión, es por esto que se requieren satisfacer otras restricciones para poder tomar una decisión sobre la posición que debe

tener el sensor. Las demás restricciones para posicionar sensores deben ser desarrolladas en tres dimensiones.

#### **4. Contribuciones**

La primer contribución de esta tesis es el método mas robusto, debido a que se puede encontrar con certeza el cambio de concavidad, así como se puede encontrar cuando la concavidad excede una cota. Anteriormente según lo expuesto por Sedas [1], se buscaba solo puntos de inflexión y se indicaba un exceso de concavidad de la curva simplemente definiéndola. En este método se logra limitar la superficies en segmentos con una concavidad u otra, o sin concavidad definida, además de que se desarrolló un criterio para dividir superficie de la misma concavidad, que excede cierta apertura angular.

Se pudieron detectar tres tipo de superficies, para los cuales se desarrollaron algoritmos diferentes, que aseguren ver en su totalidad las misma. Estos algoritmos simplifican el número de operaciones requeridas para generar la región de visualización de dichas superficies.

##### **4.1. Superficies cóncavas hacia abajo**

En esta parte se logró definir cuando una superficie es cóncava hacia abajo y se describió el algoritmo que se debe seguir para generar la región de visualización de este tipo de superficies. Se explicó como es que funciona la operación de arrastre orientado con el fin de generar la región de visualización.

Es importante señalar que las regiones que se generan con este algoritmo son conos (no necesariamente circulares) que están orientados por lo general con respecto al vector normal al máximo de la superficie.

##### **4.2. Superficies cóncavas hacia arriba**

El algoritmo generado en esta parte de la tesis, se basa en el algoritmo de la parte anterior. Generar la región de visualización de una superficie de este tipo es algo mas complicado, debido a que los puntos que se encuentran dentro de la concavidad de la superficie puede ver a todos los demás puntos. En esta parte de la tesis se describe un concepto importante el área de visión activa; el conjunto convexo (convex hull). Con la ayuda del conjunto convexo que define la concavidad de la superficie y otras herramientas mas, es posible generar la región de visualización de esta.

Con respecto a la región de visualización de superficies cóncavas hacia arriba o cóncavas hacia abajo, se encontró que si un contorno límite de algún segmento es una recta, entonces la

región de visualización con respecto a ese contorno estará representado por un solo plano, este plano será el que tenga la mayor inclinación.

### **4.3. Superficies sin concavidad definida**

A este tipo de superficies se les genera su región de visualización mediante arrastre de caras, debido a que esta superficies no es ni cóncava hacia abajo, ni cóncava hacia arriba, no es posible intentar realizar algo como lo que se hace para las superficies anteriores. Para generar la región de visualización de esta superficie, se aprovecha el que sean cóncavas hacia abajo en uno de sus ejes. Lo que se hace (conceptualmente) es barrer un plano a través de uno de sus ejes y a cada punto del barrido obtener la región de visualización en dos dimensiones, para la curva que se genera con la intersección del plano y la superficie. Estableciendo una restricción fue posible simplificar esta operación a una sola operación de arrastre de caras. Con esto se logró simplificar de gran forma el algoritmo.

### **4.4. Criterio de cambio de concavidad**

Este es el criterio para dividir superficies el cual definir las curvas de cambio de concavidad. Estas curvas son trazos en el espacio que describen los límites de la superficie.

### **4.5. Criterio de concavidad máxima**

Este criterio de división de superficies, es necesario aplicarlo no intentar analizar una superficie con sobre concavidad y así generar una región de visualización errónea. Este criterio se basa en el encontrar los vectores normales que cumplan con algún requisito y con ellos generar planos, los cuales se intersecan con la superficie para así lograr partirla y evitar sobre concavidad.

### **4.6. Criterio de continuidad**

Este criterio de división de superficies es el menos explicado, debido a que solo queda definirlo, pues dependiendo de la superficie, se podría llegar a detectar las discontinuidades de la función y sus primera y segunda derivadas. A estos lugares se les llama regiones naturales de división.

## **5. Trabajos futuros**

Los algoritmos expuestos son muy dependientes del tipo de representación del objeto por lo que se necesita disminuir la dependencia o mejorar la representación de los objetos. Es necesario que de alguna forma la representación que se tiene del objeto sea lo más acertada posible para evitar pérdida de información.

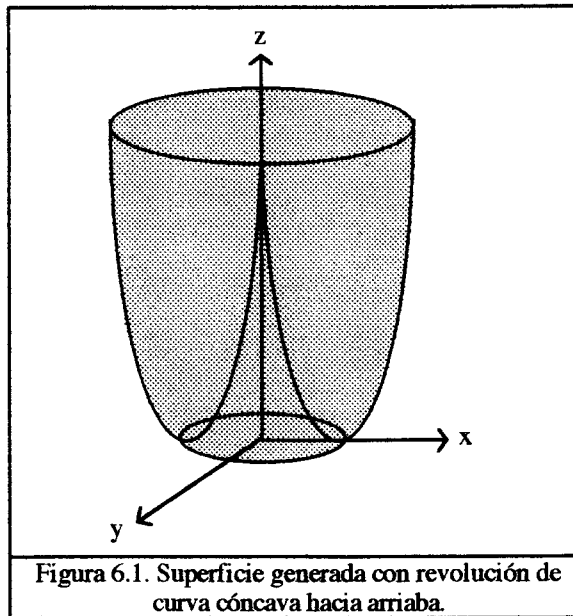


Es importante aclarar que lo expuesto en esta tesis solo es una de los cinco criterios para generar regiones de posicionamiento de sensores, es necesario desarrollar las demás restricciones para poder contar con un algoritmo completo, que obtenga la mejor posición de un sensor de visión.

El algoritmo que se desarrollo para generar la región de visualización de toda la superficie, es de naturaleza secuencial, por lo que se dejan algunas opciones pendientes por probar. Es necesarios que el algoritmo sea extendido de alguna forma iterativa para que obtenga la mejor opción de agrupación de segmentos, probando diferentes opciones para así obtener una región de visualización óptima. Así como se encuentra se obtiene el menor número de imágenes, aunque no son las óptimas.

Se pone como restricción en el algoritmo para generar la región de visualización de superficies sin concavidad definida, que la derivada parcial de la función (que describe la superficie) con respecto a un eje no dependa de la variable del otro eje. Esto se hizo para poder simplificar el algoritmo con una solo operación de arrastre. Se deja como trabajo futuro el obtener le región de visualización de este tipo de superficies, que no cumplan con la restricción antes mencionada.

Los sólidos de revolución no han sido tomados en cuenta en esta tesis, por lo que es necesario obtener el algoritmo que genera su región de visualización. Se observa con especial atención la superficie generada con la revolución sobre el eje z de una curva cóncava hacia arriba. Esta superficie puede llegar a generar una curva que siempre sea cóncava hacia arriba pero que en el interior de la concavidad se tenga un pico, que parezca ser cóncavo hacia abajo pero en realidad es cóncavo hacia arriba. En la figura 6.1 se muestra un ejemplo de la superficie que se menciona.



Esta superficie es de especial atención ya que cumple con los criterios de cambio de concavidad pues siempre es cóncava hacia abajo, por su forma el criterio de máxima apertura angular no descartará el pico interior generando varios puntos con la dirección de los vectores de la BVV y el criterio de continuidad de la primera derivada solo obtendrá un punto de discontinuidad, por lo que no es clara la forma en que será dividida esta superficie.

También se deja como trabajo futuro el estudiar mas a fondo el tercer criterio de división de superficies (criterio de continuidad) para poderlo definir de una forma menos conceptual, es decir, que no se quede en definición y se pueden crear criterios a seguir para poder detectar las regiones naturales de división.



## Apéndice A: Splines

Los splines son curvas polinomiales cúbicas paramétricas entre dos puntos. Se requiere conocer la tangente en los puntos para poder graficar la curva. Estas curvas fueron desarrolladas como herramientas matemáticas para la industria de diseño de automóviles, aviones o barcos. Con el desarrollo de las técnicas computacionales se desarrolla el spline desde su contraparte, el spline físico el cual es una regla flexible que ayuda al dibujante a trazar curvas con la suavidad deseada. Considerando una regla flexible, la forma del spline esta dada por la flexión de una línea ( $y$ ). Obtendremos una expresión para el spline mediante la ecuación de Euler de momento de flexión a lo largo de una cuerda, este está dado por la ecuación (A.1).

$$\boxed{M(x) = \frac{EI}{R(x)}} \quad (A.1)$$

Donde  $E$ : Modulo de Young, (determinado por el material de la cuerda).  
 $I$ : Momento de inercia (determinado por el grosor de la cuerda).  
 $R(X)$ : Radio de curvatura de la cuerda.

Para una pequeña flexión ( $y' \ll 1$ ) el radio de curvatura para una curva paramétrica está aproximado por (A.2). Esta ecuación representa diferenciación con respecto a  $x$  (la distancia a través de la cuerda) y representa la flexión de la cuerda. En (A.3) volvemos a escribir la ecuación de Euler despejando  $y''$ . Asumiendo que los puntos que soportan la curva no influyen en la curvatura, el momento de flexión varia linealmente entre los puntos de soporte. Por lo que la ecuación (A.3) se definiría como (A.4). Integrando dos veces la deflexión de la cuerda, queda como una ecuación cúbica. Por lo que se asume un modelo de polinomios cúbicos para las ecuaciones que definen un spline.

$\frac{1}{R(x)} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \cong y''$	$y'' = \frac{M(x)}{EI}$	$y'' = \frac{Ax+B}{EI}$
(A.2)	(A.3)	(A.4)

### 1. Splines Normalizados

Expresaremos el spline como un juego de ecuaciones paramétricas, por lo que definiremos a este como (A.5), en donde  $P(t)$  es un vector y  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(y)$  son polinomios que representan la trayectoria a través de las coordenadas  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ ; si estas funciones tiene forma cúbicas deben

definirse como en (A.6). Donde  $B_i$  es un vector de coeficientes para cada ecuación, estos coeficientes pueden ser obtenidos aplicando algunas restricciones. Definamos  $P_0$  y  $P_1$  como los vectores de posición en los extremos del spline y  $P_0'$  y  $P_1'$  como las tangentes de la curva en los extremos. Sabemos que las tangentes están dadas por la primera derivada de la ecuación, es decir que el sistema se vuelve a escribir como (A.7)

$P(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$	$P(t) = \sum_{i=0}^3 B_i t^i \quad B_i = \begin{bmatrix} b_{ix} \\ b_{iy} \\ b_{iz} \end{bmatrix}$	$P(t) = B_3 t^3 + B_2 t^2 + B_1 t + B_0$ $P'(t) = 3B_3 t^2 + 2B_2 t + B_1$
(A.5)	(A.6)	(A.7)

Los extremos de la curva estarán dados por los valores extremos del parámetro  $t$ . Si hacemos variar a  $t$  de 0 a 1, se pueden definir condiciones como en (A.8). Quedando entonces las igualdades (A.9). Pudiendo así despejar los coeficientes de (A.9) quedando las expresiones para estos en (A.10).

$P(0) = P_0$	$P_0 = B_0$	$B_0 = P_0$
$P(1) = P_1$	$P_1 = B_0 + B_1 + B_2 + B_3$	$B_1 = P_1 - P_0$
$P'(0) = P_0'$	$P_0' = B_1$	$B_2 = 3(P_1 - P_0) - 2P_0' - P_1'$
$P'(1) = P_1'$	$P_1' = B_1 + 2B_2 + 3B_3$	$B_3 = 2(P_0 - P_1) + P_0' + P_1'$
(A.8)	(A.9)	(A.10)

$P''(t) = 6B_3 t + 2B_2$	$6B_3 + 2B_2 = 2B_2$	$P_0' + 4P_1' + P_2' = 3(P_2 - P_0)$	$P_{k+1}' + 4P_k' + P_{k-1}' = 3(P_{k+1} - P_{k-1})$ Donde: $1 \leq k \leq n-1$ .
(A.11)	(A.12)	(A.13)	(A.14)

Ahora si se tienen tres puntos ( $P_0$ ,  $P_1$  y  $P_2$ ), los cuales se desea unir con splines, se requieren dos segmentos entre los puntos. Pero se necesita que estos dos segmentos tengan continuidad en la curvatura. La curvatura esta dada por la segunda derivada de la ecuación, si se iguala la curvatura al final del primer segmento y al inicio del segundo segmento, se debe asegurar la curvatura en toda la función. Esta igualdad debe ser suficiente para obtener la tangente en el punto central. Si la segunda derivada esta dada por (A.11). Evaluamos al final del primer segmento y al inicio del segundo, si se igualan estas dos se obtiene (A.12). Ahora sustituimos los valores de los coeficientes de (A.10) y separamos de un lado los vectores de tangente y del otro los de posición, se obtiene la relación (A.13). Como se ve en la ecuación, la pendiente en el punto depende de los vectores de posición y de los vectores de tangente en los

puntos circundantes a él. Ahora si se tiene un número mayor de puntos ( $n$ ), se requiere conocer  $n-2$  tangentes en los  $n-2$  puntos intermedios. Para esto se puede generalizar la ecuación (A.13) como en (A.14).

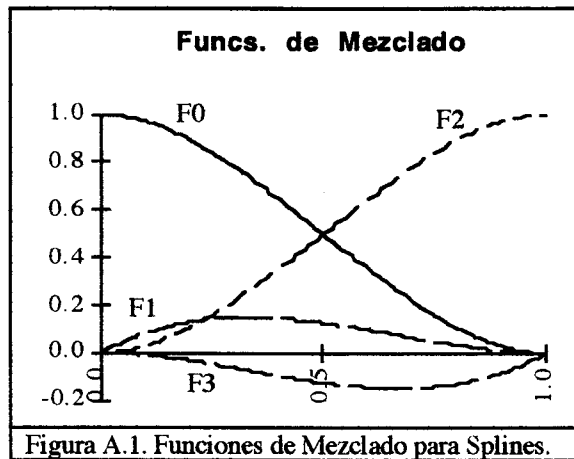
Dada esta relación y suponiendo que se tienen 5 puntos ( $n=5$ ) se obtendría un juego de tres ecuaciones con cinco incógnitas, cuya representación matricial es (A.15); como se observa este sistema no se puede resolver. Para resolver el sistema supondremos que conocemos las tangentes en los extremos y las incluiremos, quedando el sistema como en (A.16). Este sistema es resuelto obteniendo la inversa de la matriz constante y premultiplicando toda la expresión por dicha inversa. Resuelto el sistema se cuenta con las tangentes en cada punto, así podemos obtener los coeficientes  $B_i$  de cada segmento, generalizando (A.10) se obtiene (A.17) (aquí se debe hacer una aclaración: Ya que los  $P_k$  y  $P_k'$  son vectores, los  $B_{jk}$  serán vectores también. Es decir, si  $P_k$  tiene coordenadas  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ ,  $B_{jk}$  los tendrá). Si la ecuación (A.17) se expresa en forma matricial se obtendrá un sistema como en (A.18).

Volviendo a expresar (A.6) en forma matricial este queda como se muestra en (A.19). Al realizar la multiplicación de (A.18) con (A.19) se obtienen un sistema matricial de la forma mostrada en (A.20), en este sistema se muestran cuatro funciones a las cuales llamaremos funciones de mezclado. Dichas funciones son polinomios de grado tres que se mezclan mediante la ponderación de los puntos extremos de un segmento y los vectores tangentes en los puntos, formando así un polinomios que une a los puntos extremos con las características requeridas. Las funciones de mezclado tiene la forma mostrada en la ecuación (A.21) y se muestran en la figura A.1. Debe observarse que  $F_{0k}$  y  $F_{2k}$  son las que están ponderadas por  $P_k$  y  $P_{k+1}$ , es por eso que en  $t=0$ ,  $F_{0k}=1$  y  $F_{1k}=F_{2k}=F_{3k}=0$  y en  $t=1$ ,  $F_{2k}=1$  y  $F_{0k}=F_{1k}=F_{3k}=0$ . Esto significa que en  $t=0$ , los polinomios paramétricos empiezan de  $P_k$  y en  $t=1$  terminan en  $P_{k+1}$ .

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} P_2 - P_0 \\ P_3 - P_1 \\ P_4 - P_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \frac{P_0'}{3} \\ P_2 - P_0 \\ P_3 - P_1 \\ P_4 - P_2 \\ \frac{P_4'}{3} \end{bmatrix}$
(A.15)	(A.16)

$B_{0k} = P_k$ $B_{1k} = P'_k$ $B_{2k} = 3(P_{k+1} - P_k) - 2P'_k - P'_{k+1}$ $B_{3k} = 2(P_k - P_{k+1}) + P'_k + P'_{k+1}$ $0 \leq k \leq n-1$	$\begin{bmatrix} B_{0k} \\ B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P'_k \\ P_{k+1} \\ P'_{k+1} \end{bmatrix}$	$P_k(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0k} \\ B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \end{bmatrix}$
(A.17)	(A.18)	(A.19)

$P_k(t) = \begin{bmatrix} F_0(t) & F_1(t) & F_2(t) & F_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P'_k \\ P_{k+1} \\ P'_{k+1} \end{bmatrix}$	$F_{0k}(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3$ $F_{1k}(t) = t - 2t^2 + t^3$ $F_{2k}(t) = 3t^2 - 2t^3$ $F_{3k}(t) = -t^2 + t^3$
(A.20)	(A.21)



## 2. Splines Normalizados Simplificados

Como se ve para poder obtener las curvas de mezclado se tiene que resolver un sistema de  $n \times n$  ecuaciones para  $n$  puntos y si "n" crece esta operación requiere de demasiados cálculos. Para evitar este cálculo, se hace uso de la suposición que se discutía al inicio de este apartado ( $y' \ll 1$ ), con esto hacemos la siguiente aproximación  $P_k = P_{k+1} = P_{k-1}$ , así se reduce la ecuación (A.14) en la expresión (A.22), con esto el cálculo de las tangentes en los puntos intermedios se simplifica.

$6P'_k = 3(P_{k+1} - P_{k-1})$
(A.22)

### 3. Condiciones extremos para splines

Hasta ahora se a asumido que se conocen las tangentes en los extremos  $P_0$  y  $P_n$ , si estas no son conocidas se pueden usar tres criterios para definir las. El primero de ellos es llamado "Condición de extremo relajados" y existen otras dos llamadas "Condición de extremos cíclicos" y "Condición de extremos anticíclicos".

#### 3.1. Condición de extremos relajados

Consta de definir curvatura cero en los extremos, esto significa  $P_1''(0)=0$  y que  $P_n''(1)=0$ . Es decir que la primera condición queda expresada con la forma (A.23) y la segunda de la forma (A.24).

$2P_0' + P_1' = 3(P_1 - P_0)$	$P_{n-1}' + 2P_n' = 3(P_n - P_{n-1})$
(A.23)	(A.24)

#### 3.2. Condición de extremos cíclicos

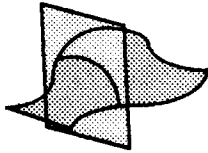
Esta condición define que tanto la curvatura como la tangente en los extremos opuestos sean iguales. Es decir que  $P_1'(0)=P_n'(1)$  y que  $P_1''(0)=P_n''(1)$ . Aplicando la primera restricción llegamos a la relación (A.25) y aplicando la segunda restricción llegamos a la relación (A.26). Restando (A.26) de (A.25) se obtiene la relación (A.27). Pero al observar la primer condición vemos que  $P_0'=P_n'$  por lo que (A.27) se reduce a (A.28).

$P_1' + P_{n-1}' - 2P_n' = 0$	$2P_0' + P_1' + P_{n-1}' + 2P_n' = -3(P_0 - P_1 + P_{n-1} - P_n)$
(A.25)	(A.26)
$-2P_0' - 4P_n' = 3(P_0 - P_1 + P_{n-1} - P_n)$	$6P_0' = 6P_n' = 3(P_1 - P_0 + P_n - P_{n-1})$
(A.27)	(A.28)

#### 3.3. Condición de extremos anticíclicos

Esta condición define condiciones similares a las anteriores, solo que en esta ocasión están definidas de la siguiente forma:  $P_1'(0)=-P_n'(1)$  y que  $P_1''(0)=-P_n''(1)$ . Aplicando la primera restricción llegamos a la relación (A.29) y aplicando la segunda restricción llegamos a la relación (A.30). Restando (A.30) de (A.29) se obtiene la relación (A.31). Pero al observar la primer condición vemos que  $P_0'=-P_n'$  por lo que (A.31) se reduce a (A.32).

$P_1' - P_{n-1}' + 2P_n' = 0$	$2P_0' + P_1' - P_{n-1}' - 2P_n' = -3(P_0 - P_1 - P_{n-1} + P_n)$
(A.29)	(A.30)
$-2P_0' + 4P_n' = 3(P_0 - P_1 - P_{n-1} + P_n)$	$6P_0' = -6P_n' = 3(P_1 - P_0 + P_{n-1} - P_n)$
(A.31)	(A.32)



## Apéndice B: Sistemas de ecuaciones no lineales

Con frecuencia en trabajos de ingeniería se topa con la necesidad de resolver algún sistema de ecuaciones, que para la mayoría de los casos estas no son lineales. En este apartado se plantea el método iterativo de Newton-Raphson [12] para solución de sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales.

Todo el planteamiento esta basado en la serie de Taylor. Supongamos una función de varias variables, su expresión en serie de Taylor se muestra en la ecuación (B.1), donde  $x=(x_1,x_2,\dots)$  y  $x_0=(X_1,X_2,\dots)$ ; la representación de  $F(x_1,x_2,\dots)$  es al rededor del punto  $(X_1,X_2,\dots)$ . Si asumimos que los puntos  $(X_1,X_2,\dots)$  son una aproximación de las variables  $(x_1,x_2,\dots)$ , y recortamos la serie infinita a un solo termino (aproximación lineal), se obtiene la expresión en la ecuación (B.2). En dicha aproximación aparece el término  $\Delta x_j$ , este representa la diferencia entre el valor real de la variable y la aproximación.

$F(x)=F(x_0)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d^i F(x_0)}{dx^i}\frac{(x-x_0)^i}{i!}$	$F(x_1,x_2,\dots)=F(X_1,X_2,\dots)+\Delta x_j\sum_{j=1}^n\frac{\delta F(X_1,X_2,\dots)}{\delta x_j}$
(B.1)	(B.2)

Si se tienen un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, se puede llegar a linealizar el sistema de ecuaciones mediante la aproximación lineal de la Serie de Taylor. Es decir supongamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas como el mostrado en (B.3). La representación por aproximación lineal de Serie de Taylor del sistema se muestra en (B.4). Debido a (B.3) el sistema (B.4) se vuelve a expresar como se muestra en (B.5). El sistema (B.5) puede ser expresado en forma matricial y dicha representación se encuentra en (B.6).

$F_1(x_1,x_2)=0$	$F_1(x_1,x_2)=F_1(X_1,X_2)+\Delta x_1\frac{\delta F_1(X_1,X_2)}{\delta x_1}+\Delta x_2\frac{\delta F_1(X_1,X_2)}{\delta x_2}$
$F_2(x_1,x_2)=0$	$F_2(x_1,x_2)=F_2(X_1,X_2)+\Delta x_1\frac{\delta F_2(X_1,X_2)}{\delta x_1}+\Delta x_2\frac{\delta F_2(X_1,X_2)}{\delta x_2}$
(B.3)	(B.4)
$-F_1(X_1,X_2)=\Delta x_1\frac{\delta F_1(X_1,X_2)}{\delta x_1}+\Delta x_2\frac{\delta F_1(X_1,X_2)}{\delta x_2}$	
$-F_2(X_1,X_2)=\Delta x_1\frac{\delta F_2(X_1,X_2)}{\delta x_1}+\Delta x_2\frac{\delta F_2(X_1,X_2)}{\delta x_2}$	
(B.5)	



$\begin{bmatrix} \frac{\delta F_1(X_1, X_2)}{\delta x_1} & \frac{\delta F_1(X_1, X_2)}{\delta x_2} \\ \frac{\delta F_2(X_1, X_2)}{\delta x_1} & \frac{\delta F_2(X_1, X_2)}{\delta x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1(X_1, X_2) \\ -F_2(X_1, X_2) \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} x_1 &= \Delta x_1 + X_1 \\ x_2 &= \Delta x_2 + X_2 \end{aligned}$
(B.6)	(B.7)

Esta es una ecuación matricial simple, se puede resolver obteniendo la inversa de la matriz de derivadas parciales y premultiplicar la expresión por esta. Así tendrían los valores de  $\Delta x_i$ . De (B.2) tenemos que  $\Delta x_i = x_i - X_i$ , por lo que los valores de  $x_i$  pueden ser obtenidos usando las expresiones en (B.7). Este es un proceso iterativo que se tiene que repetir hasta que las funciones lleguen a un error deseado. Es decir que  $-F_i(X_1, X_2) \approx 0$ , por lo que se debe establecer una condición de error.

Este método tiene dos condiciones para exista convergencia y estas son:

- a) Todas las  $F_i$  y sus derivadas parciales deben ser continuas en una vecindad de la solución.
- b) Las aproximaciones iniciales  $X_i$  deben estar dentro de una vecindad de la solución.



## Apéndice C: Regresiones

La regresión es encontrar la ecuación de una curva, la cual represente el comportamiento de la muestra. Esta representación no necesariamente debe de tocar todos los puntos, si no que cumple con un criterio de error. Un criterio de error define que tan distanciados están los puntos muestra de la curva que se desea ajustar.

Sobre este tema estudiaremos dos métodos, Mínimos Cuadrados y Gauss-Newton. Con Mínimos Cuadrados lo que se busca es ajustar un polinomio, minimizando el criterio de error. Gauss-Newton es un método iterativo, en el cual se establece una aproximación inicial y los parámetros de está se ajustan en cada iteración disminuyendo el error.

### 1. Criterios de error

Los criterios de error describen la forma en que interpretará la diferencia entre la muestra y la curva. Se puede tener cuatro criterios de error diferentes.

1.1. Error residual: es el que está definido por la diferencia entre la muestra y la curva, este se muestra en (C.1).

1.2. Valor absoluto del error residual, este se muestra en (C.2).

1.3. Máximo del error residual, en este criterio lo que se busca es que se cumpla que el máximo error entre la aproximación y cualquier punto esté en un límite; este se muestra en (C.3).

1.4. Cuadrado del error residual, este se muestra en (C.4).

$E_i = F(x_i) - y_i$	$E_i =  F(x_i) - y_i $	$E = \text{MAX}(F(x_i) - y_i)$	$E_i^2 = (F(x_i) - y_i)^2$
(C.1)	(C.2)	(C.3)	(C.4)

### 2. Mínimos cuadrados

Este método minimiza el criterio de error. Haciendo las siguientes definiciones, diremos que  $F(a_1, a_2, \dots, a_n, x)$  es la función que se pretende ajustar, y sus argumentos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  los parámetros de la ecuación y  $x$  la variable independiente. Ahora, deseamos una función que se aproxime, con el menor error,  $y_i = F(a_1, a_2, \dots, a_n, x_i)$  para todo valor de  $1 \leq i \leq m$ . Antes de continuar se dirá que  $m$  es el tamaño de la muestra y  $n$  es el número de parámetros de  $F$ .

Para efectos de esta demostración definamos S como la suma de los errores al cuadrado, su expresión es como en (C.5). Se desea minimizar la función de error S. Por lo que se deriva con respecto a cada uno de los parámetros de la ecuación (C.6).

$S = \sum_{i=1}^m E_i^2 = \sum_{i=1}^m (F(a_1, a_2, \dots, x_i) - y_i)^2$	$\frac{\delta S}{\delta a_i} = 2 \sum_{i=1}^m \frac{\delta F(a_1, a_2, \dots, x_i)}{\delta a_i} [F(a_1, a_2, \dots, x_i) - y_i]$
(C.5)	(C.6)

Se busca crear un sistema de n ecuaciones para los n parámetros de F. Para poder resolver el sistema debemos conocer la función F, por lo que será definida como una función cuadrática de la forma mostrada en (C.7). Se requiere obtener las derivadas de F con respecto a cada uno de sus parámetros. Así se obtiene las ecuaciones (C.8). Aplicando (C.8) y (C.7) en (C.6) se obtiene (C.9).

$F(a_0, a_1, \dots, x_i) = a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0$	$\frac{\delta F}{\delta a_2} = x_i^2$ $\frac{\delta F}{\delta a_1} = x_i$ $\frac{\delta F}{\delta a_0} = 1$	$\frac{\delta S}{\delta a_2} = \sum_{i=1}^m x_i^2 (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i)$ $\frac{\delta S}{\delta a_1} = \sum_{i=1}^m x_i (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i)$ $\frac{\delta S}{\delta a_0} = \sum_{i=1}^m (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i)$
(C.7)	(C.8)	(C.9)

Los cuales son polinomios. Si se desea encontrar el mínimo se igualan a cero las ecuaciones y se obtiene el sistema (C.10). Distribuyendo las sumas, se expresa el sistema como en (C.11), este a su vez, puede ser expresado con el sistema matricial (C.12).

$\sum_{i=1}^m a_2 x_i^4 + a_1 x_i^3 + a_0 x_i^2 - x_i^2 y_i = 0$ $\sum_{i=1}^m a_2 x_i^3 + a_1 x_i^2 + a_0 x_i - x_i y_i = 0$ $\sum_{i=1}^m a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i = 0$	$\sum_{i=1}^m a_2 x_i^4 + \sum_{i=1}^m a_1 x_i^3 + \sum_{i=1}^m a_0 x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 y_i$ $\sum_{i=1}^m a_2 x_i^3 + \sum_{i=1}^m a_1 x_i^2 + \sum_{i=1}^m a_0 x_i = \sum_{i=1}^m x_i y_i$ $\sum_{i=1}^m a_2 x_i^2 + \sum_{i=1}^m a_1 x_i + \sum_{i=1}^m a_0 = \sum_{i=1}^m y_i$
(C.10)	(C.11)

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^4 & \sum_{i=1}^m x_i^3 & \sum_{i=1}^m x_i^2 \\ \sum_{i=1}^m x_i^3 & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{bmatrix}$$

(C.12)

Teniendo ya este sistema de ecuaciones se obtiene la inversa de la matriz y se resuelve el sistema, obteniendo los parámetros para F. La matriz puede ser generalizada de la forma (C.13).

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^{2n} & \sum_{i=1}^m x_i^{2n-1} & \dots & \sum_{i=1}^m x_i^n \\ \sum_{i=1}^m x_i^{2n-1} & \sum_{i=1}^m x_i^{2n-2} & \dots & \sum_{i=1}^m x_i^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m x_i^n & \sum_{i=1}^m x_i^{n-1} & \dots & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \dots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^n y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i^{n-1} y_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{bmatrix}$$

(C.13)

### 3. Gauss-Newton

Este método está basado en la serie de Taylor. Dicha serie es una representación de cualquier función al rededor de un punto, en base a derivadas de la función. Tal definición está dada por (C.14). Si realizamos una aproximación de (C.14) hasta la primer derivada y suponemos que la función depende de múltiples parámetros, podemos volver a definir la función de la manera: mostrada en (C.15).

$F(x) = F(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^i F(x_0)}{dx^i} \frac{(x-x_0)^i}{i!}$	$F(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, x_i) = F(A_n, A_{n-1}, \dots, A_0, x_i) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, x_i)}{\partial a_j} (a_j - A_j)$
(C.14)	(C.15)

Si observamos que  $\Delta a_j = (a_j - A_j)$  es la diferencia entre el parámetro  $a_j$  y su aproximación, esta nos permite observar el error existente en el parámetro. Haciendo un proceso iterativo, en cada

paso se deberá disminuir este error. Por lo que aplicar el criterio (C.1) es válido, ya que ahora no se persigue optimar el error entre las muestras y la función, si no que el error para cada parámetro.

Definiendo F como en (C.7) y aplicando (C.1) llegamos a que el error queda definido como en (C.16). Este es un sistema de m ecuaciones, con el que deseamos obtener n incógnitas, y al igual que Mínimos Cuadrados se requiere que  $m \geq n$ . Si (C.16) la igualamos a cero, queremos que el error entre la función y la muestra sea cero. Haciendo esto obtendríamos m ecuaciones en un sistema que matricialmente puede ser escrito de la forma (C.17).

$E_i = A_2 x_i^2 + A_1 x_i + A_0 - y_i + x_i^2 \Delta a_2 + x_i \Delta a_1 + \Delta a_0$	$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_m^2 & x_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_2 \\ \Delta a_1 \\ \Delta a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - A_2 x_1^2 - A_1 x_1 - A_0 \\ y_2 - A_2 x_2^2 - A_1 x_2 - A_0 \\ \dots \\ y_m - A_2 x_m^2 - A_1 x_m - A_0 \end{bmatrix}$
(C.16)	(C.17)

En notación matricial la ecuación puede ser vuelta a escribir de la forma (C.18). Pero como se observa  $\mathbf{X}$  no es una matriz cuadrada y por lo tanto no se puede invertir. Se necesita obtener la inversa de  $\mathbf{X}$  para despejar  $\Delta \mathbf{a}$ . Los pasos mostrados en (C.19) describen la forma de obtener lo que se llama una pseudoinversa.

$\mathbf{X} \Delta \mathbf{a} = \mathbf{E}$	$\mathbf{X} \Delta \mathbf{a} = \mathbf{E}$ $\mathbf{X}^t \mathbf{X} \Delta \mathbf{a} = \mathbf{X}^t \mathbf{E}$ $\Delta \mathbf{a} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{E}$
(C.18)	(C.19)

$\mathbf{X}^t \mathbf{X}$  es una matriz cuadrada y por la columna de 1 de  $\mathbf{X}$ , se asegura que no es singular y si se puede invertir. Por lo tanto la pseudoinversa de  $\mathbf{X}$  existe y esta dada por (C.19).  $\Delta \mathbf{a}$  es el vector de errores para cada parámetro de la función. Si se hace que estos errores se sumen a la aproximación inicial se obtendría una nueva aproximación y se tendría que volverse a evaluar la ecuación (C.19).

Si se desea obtener una generalización de este método para polinomios grado  $n$ , se tiene que hacer la definición (C.20). Así se simplificaría la ecuación general y esta queda de la forma (C.21).

$E_i = y_i - \sum_{j=0}^n A_j x_i^j$	$\begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m^n & x_m^{n-1} & \dots & x_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_n \\ \Delta a_{n-1} \\ \dots \\ \Delta a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_m \end{bmatrix}$
(C.20)	(C.21)

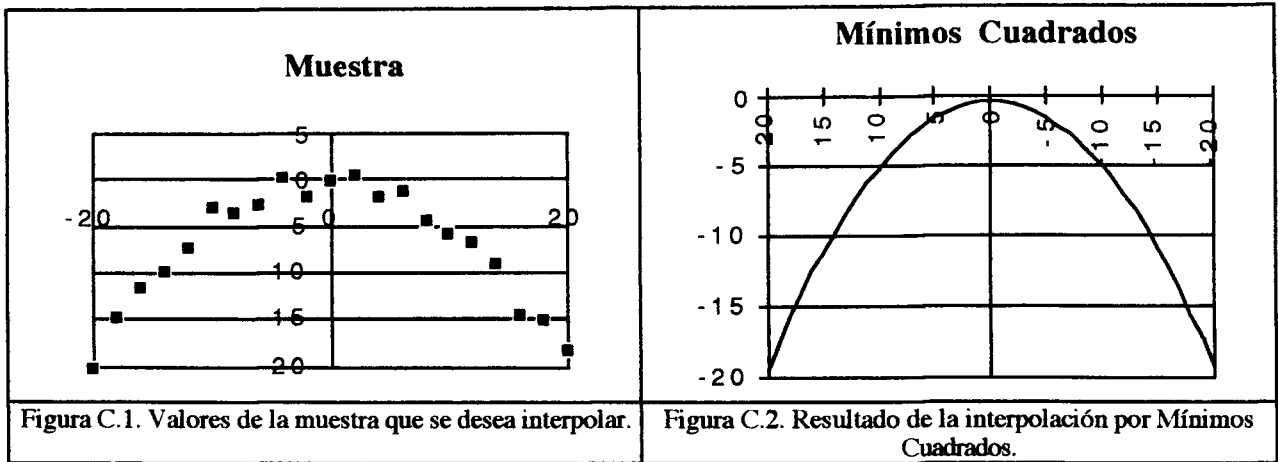
Antes de proseguir haremos algunas observaciones. Supongamos que la aproximación inicial está hecha con  $A_i=0$ . Esto implicaría que  $\Delta a_i=a_i$  y que  $E_i=y_i$ . Volviendo a escribir (C.20) se llega a que  $\mathbf{Xa}=\mathbf{Y}$ . Como se observa en el segundo paso de despeje de (C.3.6;  $\mathbf{X}^t\mathbf{Xa}=\mathbf{X}^t\mathbf{Y}$ ), con estas condiciones la ecuación se iguala a la ecuación (C.13), la cual es la generalización de Mínimos Cuadrados.

Con esto podemos decir, que Gauss-Newton, es una generalización de Mínimos Cuadrados, con la cual se logra ajustar cualquier tipo de ecuación a una muestra de puntos. Esto se logra gracias a que se pierde exactitud con el método, creando así la posibilidad de caer en mínimos locales.

#### 4. Ejemplo

Para demostrar la forma en que trabajan los métodos anteriores realizaremos dos ejemplos. Supongamos que tenemos la muestra de la figura C.1. La muestra sigue un comportamiento parabólico, por lo que se le ajustará un polinomio grado dos. Los valores de la muestra se presentan en la Tabla C.4.1. El sistema matricial para Mínimos Cuadrados evaluando la muestra con en el sistema (C.12) queda de la forma mostrada en (C.22). Así la función que modela la muestra queda como en (C.23). En la figura C.4.2 se muestra la gráfica de dicha función.

$\begin{bmatrix} 810656 & 0 & 3080 \\ 0 & 3080 & 0 \\ 3080 & 0 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39545.0312 \\ -20.4975 \\ -153.9596 \end{bmatrix}$	$F(x) = -0.047264x^2 - 0.006655x - 0.399294$
(C.22)	(C.23)



X	Y
20	-18.308454
18	-15.246644
16	-14.730055
14	-9.287155
12	-6.806318
10	-5.905427
8	-4.474473
6	-1.453454
4	-1.995235
2	0.467201
0	-0.067794
-2	-1.93566
-4	0.006349
-6	-2.714801
-8	-3.714013
-10	-3.103739
-12	-7.45323
-14	-9.974531
-16	-11.821212
-18	-14.910446
-20	-20.530575

Tabla C.4.1. Datos de la muestra que se desea interpolar.

Ahora si se desea resolver el problema por Gauss-Newton, se obtiene dos iteraciones. Para definir un criterio de error. Se definió que la suma de los errores al cuadrado sea menor a  $1E-6$ . Quedando la expresión de la forma (C.24). Sería demasiado largo poner todas las matrices durante el desarrollo por lo que solo se expresarán los vectores de error y el vector de los parámetros, estos se encuentran en la definición C.1. Dicha definición está seguida de las iteraciones que se hicieron para llegar a la solución. De aquí se obtiene que la función esta mostrada en (C.25). Y como se puede observar es la misma que la creada por Mínimos cuadrados. Por lo tanto la gráfica es igual a la mostrada en la figura C.2.

$E = \Delta a_0^2 + \Delta a_1^2 + \Delta a_2^2$	$F(x) = -0.047264x^2 - 0.006655x - 0.399294$
(C.24)	(C.25)

$P = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$	$\Delta a = \begin{bmatrix} \Delta a_2 \\ \Delta a_1 \\ \Delta a_0 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\Delta a = \begin{bmatrix} -0.047264 \\ -0.006655 \\ -0.399294 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} -0.047264 \\ -0.006655 \\ -0.399294 \end{bmatrix}$	$\Delta a = \begin{bmatrix} -1.051114 \times 10^{-18} \\ -6.945670 \times 10^{-20} \\ -2.397719 \times 10^{-15} \end{bmatrix}$
Definición C.1.		Iteración 1		Iteración 2	





## Apéndice D: Listados

---

### 1. Listados de la simulación para la superficie del capítulo V

Estos listados son para el programa graficador GNUPlot v3, los listados SinCos y SinCos2 son los que se usaron para generar las gráficas del capítulo V y el listado silla es el programa que genera la región de visualización de la "silla de caballo"

<Archivo SinCos>

```
load "sincos2"
splot s(x,y)
set xrange [0:pi]
set yrange [-pi/2:pi/2]
splot s(x,y) title "Segmento Uno"
set yrange [pi/2:3*pi/2]
splot s(x,y) title "Segmento Tres"
set xrange [pi:2*pi]
splot s(x,y) title "Segmento Cuatro"
set yrange [-pi/2:pi/2]
splot s(x,y) title "Segmento Dos"
set xrange [0:2*pi]
set yrange [-pi/2:3*pi/2]
splot s(x,y), r1(x,y)
set view 90, 90, 1, 1
set xrange [0:pi]
splot s(x,y), r1(x,y)
set xrange [0:2*pi]
set view 70, 60, 1, 1
splot s(x,y), r2(x,y)
set view 90, 90, 1, 1
set xrange [pi:2*pi]
splot s(x,y), r2(x,y)
set xrange [0:2*pi]
set view 70, 60, 1, 1
splot r3(x,y) with lines 2, s(x,y) with lines 1
set view 90, 90, 1, 1
set xrange [0:pi]
splot s(x,y), r3(x,y)
set xrange [0:2*pi]
set view 70, 60, 1, 1
splot s(x,y), r4(x,y)
set view 90, 90, 1, 1
set xrange [pi:2*pi]
splot s(x,y), r4(x,y)
set xrange [0:2*pi]
set view 75, 55, 1, 1
splot s(x,y), Rv(x,y)
set view 90, 90, 1, 1
splot s(x,y), Rv(x,y)
set view 70, 60, 1, 1
```

<Archivo SinCos2>

```
set terminal vgalib
set output
set noclip points
set clip one
set noclip two
set border
set dummy x,y
```

```

set format x "%g"
set format y "%g"
set format z "%g"
set nogrid
set key
set nolabel
set noarrow
set nologscale
set offsets 0, 0, 0, 0
set nopolar
set angles radians
set noparametric

set samples 100

set isosamples 10
set surface
set nocontour
set cntrparam order 4
set cntrparam linear
set cntrparam points 5
set size 1,1
set data style points
set function style lines
set tics in
set ticslevel 0.5
set xtics 0,2
set ytics
set ztics 0,2
set title "" 0,0
set notime
set rrange [0 : 10]
set trange [-5 : 5]
set xlabel "X" 0,0
set xrange [0 : 6.28319]
set ylabel "Y" 0,0
set yrange [-1.5708 : 4.71239]
set xlabel "Z" 0,0
set zrange [-0.984684 : 6.28319]
set noautoscale r
set noautoscale t
set noautoscale
set autoscale z
set zero 1e-08
mx(x,y)=(x>y)?x:y
s(x,y)=(abs(x-pi)<pi)?((abs(y-pi/2)<pi)?sin(x)*cos(y):0):0
r1(x,y)=(mx(-x+pi,x)>mx(-y+pi/2,y+pi/2))?mx(-x+pi,x):mx(-y+pi/2,y+pi/2)
RR2(x,y)=(mx(-x+pi,x-2*pi)>mx(-y-pi/2,y-pi/2))?mx(-x+pi,x-2*pi):mx(-y-pi/2,y-pi/2)
r2(x,y)=(abs(x-3*pi/2)<pi/2)?((abs(y)<pi/2)?s(x,y):RR2(x,y)):RR2(x,y)
RR3(x,y)=(mx(-x,x-pi)>mx(-y+pi/2,y-3*pi/2))?mx(-x,x-pi):mx(-y+pi/2,y-3*pi/2)
r3(x,y)=(abs(x-pi/2)<pi/2)?((abs(y-pi)<pi/2)?s(x,y):RR3(x,y)):RR3(x,y)
r4(x,y)=(mx(x-pi,-x+2*pi)>mx(y-pi/2,-y+3*pi/2))?mx(x-pi,-x+2*pi):mx(y-pi/2,-y+3*pi/2)
Rv(x,y)=(mx(r1(x,y),r2(x,y))>mx(r3(x,y),r4(x,y)))?mx(r1(x,y),r2(x,y)):mx(r3(x,y),r4(x,y))
r23(x,y)=mx(r2(x,y),r3(x,y))
r14(x,y)=mx(r1(x,y),r4(x,y))
set view 70, 60, 1, 1

```

<Archivo Silla>

```

set terminal vgalib
set output
set noclip points
set clip one
set noclip two
set border
set dummy x,y
set format x "%g"
set format y "%g"
set format z "%g"

```

```

set grid
set key
set nolabel
set noarrow
set nologscale
set offsets 0, 0, 0, 0
set nopolar
set angles radians
set noparametric
set view 70, 30, 1, 1
set samples 100
set isosamples 10
set surface
set nocontour
set cntrparam order 4
set cntrparam linear
set cntrparam points 5
set size 1,1
set data style points
set function style lines
set tics in
set ticslevel 0.5
set xtics
set ytics
set ztics 0,0.5
set title "" 0,0
set notime
set xrange [-0 : 10]
set yrange [-5 : 5]
set xlabel "x" 0,0
set xrange [-1 : 1]
set ylabel "y" 0,0
set yrange [-1 : 1]
set xlabel "z" 0,0
set zrange [-0.999898 : 4]
set autoscale r
set autoscale t
set noautoscale
set autoscale z
set zero 1e-08
mx(x,y)=(x>y)?x:y
xx(x,y)=x**2+2*y+1
yy(x,y)=x**2-2*y+1
plot x**2-y**2, mx(xx(x,y),yy(x,y))

```

## 2. Listado para generar splines

Estos listados son para el paquete matemático matlab. La primer rutina que se muestra implementa el algoritmo de splines normalizados simplificados con extremos cíclicos. El segundo listado es la rutina que implementa el algoritmo de splines normalizados con extremos cíclicos.

```

<Archivo SpliSim.m>
function XXSHSXX=splisim(param,pts);
%***** Ejemplo de spline *****
if pts>0,
    [m,n]=size(param);
    if n>0,
        n=m;
        m=n-1;
%***** Obtencion de las tangentes en los puntos *****

```

```

Pp=0.75*(param(3:n,:)-param(1:(n-2),:));
[i,j]=size(param(1,:));
Pp=[0.75*(param(2,:)+param(n,:)-param(1,:)-param(m,:)); Pp;...
    0.75*(param(2,:)+param(n,:)-param(1,:)-param(m,:))];
tao=[0:(1/pts):1]';
%***** Definir las funciones de peso y mesclado *****
f1tao=2.*xan(tao,3)-3.*sqr(tao)+1;
f2tao=-1.*f1tao+1;          %-2.*xan(tao,3)+3.*xan(tao,2);
f3tao=xan(tao,3)-2.*sqr(tao)+tao;
f4tao=xan(tao,3)-sqr(tao);
Mat=[f1tao f2tao f3tao f4tao]; %Funciones de blending
%***** Inicio de algoritmos de interpolacion *****
XXSHSXX=[];          %Inicializar los ptos.
for i=1:m,
    Vec=[param(i,:); param(i+1,:); Pp(i,:); Pp(i+1,:)]; %Vec. ptos y tangentes
    XXSHSXX=[XXSHSXX; Mat*Vec];          %Agregar a los seg. ant. el nuevo seg.
    Tam=prod(size(XXSHSXX(:,1)));          %Obtener le tamaño de los puntos acumulados
    Last=XXSHSXX(Tam,:);          %Guardar el ultimo punto del segmento
    XXSHSXX=XXSHSXX(1:(Tam-1),:); %Eliminar el ultimo pto del seg. Es el lro. del sig
end;
XXSHSXX=[XXSHSXX; Last];          %Agregar el ultimo pto del ultimo seg.
end;
end;

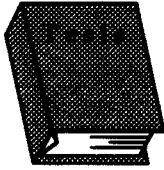
```

### <SpliNor.m>

```

function XXSHXX=splinor(param, pts)
if pts>0,
    [m,n]=size(param);
    if n>1,
        n=m;
        m=n-1;
%***** Obtencion de las tangentes en los puntos *****
Vec=ones(m,1);
Mat=diag(Vec,1)+diag(Vec,-1)+4*diag(ones(n,1));
Mat(1,1)=1;          %Armar la matriz Uno's en los extremos
Mat(n,n)=1;
Vec=3.*(param(3:n,:)-param(1:(n-2),:));
[i,j]=size(param(1,:));
Vec=[ones(i,j); Vec; ones(i,j)];
Pp=Mat\Vec;          %Obtencion de las tangentes
tao=[0:(1/pts):1]';
%***** Definir las funciones de peso y mesclado *****
f1tao=2.*xan(tao,3)-3.*sqr(tao)+1;
f2tao=-1.*f1tao+1;          %-2.*xan(tao,3)+3.*xan(tao,2);
f3tao=xan(tao,3)-2.*sqr(tao)+tao;
f4tao=xan(tao,3)-sqr(tao);
Mat=[f1tao f2tao f3tao f4tao]; %Funciones de blending
%***** Inicio de algoritmos de interpolacion *****
XXSHXX=[];          %Inicializar los ptos.
for i=1:m,
    Vec=[param(i,:); param(i+1,:); Pp(i,:); Pp(i+1,:)]; %Vec. ptos y tangentes
    XXSHXX=[XXSHXX; Mat*Vec];          %Agregar a los seg. ant. el nuevo seg.
    Tam=prod(size(XXSHXX(:,1)));          %Obtener le tamaño de los puntos acumulados
    Last=XXSHXX(Tam,:);          %Guardar el ultimo punto del segmento
    XXSHXX=XXSHXX(1:(Tam-1),:); %Eliminar el ultimo pto del seg. Es el lro. del sig.
end;
XXSHXX=[XXSHXX; Last];          %Agregar el ultimo pto del ultimo seg.
end;
end;

```



## Bibliografía

---

- [1] Sedas-Gersey, S. W., "Algorithms for automatic sensor placement to acquire complete and accurate information", mayo 1993.
- [2] Cowan, C. K. y P.D. Kovesi, "Automatic sensor placement for vision task requirements", IEEE trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 10, no. 3, mayo 1988.
- [3] Cowan, C. K., "Model-based synthesis of sensor location", International Conference on Robotics and Automation, abril 24-29, 1988.
- [4] Cowan, C. K., "Automatic camera and light-source placement using CAD models", IEEE Workshop on Directions in Automated CAD-Based Vision, junio 2-3, 1991.
- [5] Tarabanis, K., R. Y. Tsai, P.K. Allen, "Satisfying the resolution constraint in the MVP machine vision planning system", Proceedings of the DARPA Image Understanding Workshop, septiembre 11-13, 1990.
- [6] Tarabanis, K., R. Y. Tsai, P. K. Allen, "Automated sensor planning for robotics vision tasks", Proceeding of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1991, 76-82.
- [7] Tarabanis, K., R. Y. Tsai, "Occlusion-free sensor placement planning", Machine Vision for Three-Dimensional Scenes, Ed. Freeman, H., Academic Press, 1990.
- [8] Leithold, L., "El Cálculo con Geometría Analítica", Harper & Row Latinoamericana, Segunda Ed., 1982.
- [9] Hillier, F., Lieberman, G., J., "Introducción a la investigación de operaciones", Mc Graw Hill, Quinta Ed., 1991.
- [10] Taha, H., A., "Operations Research, an Introduction", MacMillan Publishing Co., Inc., Segunda Ed., 1968.
- [11] Phillips, D., T., Ravindran, A., Solberg, J., J., "Operations Research: Principles and Practice", John Wiley & Sons, Inc., Primer Ed., 1976.
- [12] Rogers, D., F., Adams, J., A., "Mathematical elements for computer graphics", McGraw-Hill, Segunda Ed., 1990.
- [13] Guerra, L., Treviño A., "Métodos numéricos elementales aplicados a ingeniería química", Ed. Desconocida., ITESM, 1971.
- [14] Boas, M., L., "Mathematical Methods in the physical sciences", John Wiley & Sons, Segunda Ed., 1983.

ITESM-Centro de Información



30002005192075