

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY**

CAMPUS MONTERREY

**DIVISION DE GRADUADOS E INVESTIGACION
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERIA**



**OPTIMIZACION DE LA BARRENACION EN LA EXPLORACION DE CUERPOS
MINERALES MEDIANTE EL METODO GEOESTADISTICO**

T E S I S

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE**

**MAESTRO EN CIENCIAS
ESPECIALIDAD EN INGENIERIA EN SISTEMAS**

CARLOS SALVADOR MANZANERA QUINTANA

MAYO DE 1994

INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

**DIVISION DE GRADUADOS E INVESTIGACION
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERIA**



**OPTIMIZACION DE LA BARRENACION EN LA EXPLORACION DE CUERPOS
MINERALES MEDIANTE EL METODO GEOESTADISTICO**

T E S I S

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE**

**MAESTRO EN CIENCIAS
ESPECIALIDAD EN INGENIERIA EN SISTEMAS**

CARLOS SALVADOR MANZANERA QUINTANA

MAYO DE 1994

A mis padres:

Consuelo y Alfonso.

A mi esposa:

Raquel

por su comprensión y ayuda.

A mis hermanos:

Por su apoyo.

Agradecimiento

Deseo expresar mi agradecimiento al Lic. Rodrigo González R. por su asesoría y su paciencia durante el desarrollo del presente trabajo.

También al Lic. Salvador Garza B. y al C.P. Víctor Ortiz por su apoyo durante la maestría.

Al Dr. Alejandro Montes y a los Ingenieros Gerardo Silveyra y Javier Manzanera por su ayuda y sugerencias

Al Ing. Jesus Hinojos y a Margarita Flores, por su ayuda.

I N D I C E

INTRODUCCION	1
GEOESTADISTICA (ENFOQUE GENERAL)	10
GEOESTADISTICA (CONCEPTOS Y METODOS)	17
KRIGING	28
APLICACION AL AREA DE ESTUDIO	40
KRIGING EN AREA DE ESTUDIO	50
CONCLUSIONES	61
BIBLIOGRAFIA	64

RESUMEN

El costo principal en la exploración de cuerpos minerales es la barrenación.

El objetivo principal de este trabajo es obtener la mayor información confiable acerca del cuerpo mineral con el mínimo número de barrenos.

El método usado para lograrlo es el método geoestadístico. En realidad es un método estadístico desarrollado por geólogos.

El método se aplica a un depósito real de uranio ubicado en el Estado de Chihuahua, muy cerca de su capital.

INTRODUCCION

INTRODUCCIÓN:

El presente trabajo tiene como objetivo aplicar el método geoestadístico para minimizar el número de barrenos utilizados para ubicar un cuerpo mineral. Este método se aplica a un depósito real de uranio en el estado de Chihuahua.

Uno de los mayores costos de la exploración geológica para minería es la barrenación. Esta consiste en perforaciones de diámetro variado (de una a dos y media pulgadas) y de diferentes profundidades que, dependiendo del depósito, pueden ser de 100 m a 1.5 Km o más.

La barrenación se realiza para conocer el depósito, y esto se logra analizando las muestras que se obtienen al ir perforando. A partir de los análisis químicos y petrográficos puede inferirse el tamaño y la forma aproximados de un cuerpo mineral, para calcular las "reservas" y decidir si el mineral es económicamente rentable.

Para llevar a cabo un programa de barrenación se necesita mover equipo pesado, abrir brechas y meter máquinas de barrenación hasta el lugar del depósito.

Resulta evidente que los barrenos deben planearse de modo que se obtenga la mayor información con el máximo de confiabilidad y con la mínima inversión (mínimo número de barrenos).

No se tuvo una herramienta con fundamentos matemáticos y con alta confiabilidad para determinar los barrenos necesarios hasta que se desarrolló el método geoestadístico.

Antes se usaban métodos basados en la experiencia, combinados con los tradicionales que debe llevar cualquier estudio de exploración.

Los métodos tradicionales para calcular reservas (cubicar cuerpos minerales) son muy variados y van desde la prospección geológica en general, pasando por la prospección subterránea, la prospección geofísica y la geostatística.

PROSPECCIÓN GEOLÓGICA GENERAL

La prospección geológica general consiste en el examen de afloramientos en zonas donde hay condiciones geológicas favorables a la mineralización como son las masas intrusivas y mejor si se emplazan en calizas. Se examinan también las zonas de oxidación para buscar posible abundancia de sulfuros que son, en general, los depósitos de mejor rendimiento económico.

PROSPECCIÓN GEOLÓGICA SUBTERRÁNEA

La prospección geológica subterránea se basa en perforaciones (barrenos) hechas para explorar el subsuelo. Dado que se va a seguir tratando con barrenos, es mejor explicar aquí cómo se realizan y cuántos tipos hay. Existen 3 métodos de perforación:

a) Perforación al cable. Llamada también método de percusión.

El equipo se compone esencialmente de una cadena en cuyo extremo se suspende una barrena (taladro pesado de acero). Todo ello pende de un cable que se sube y se baja por medio de un balancín colocado en la boca del pozo. Para perforar, el balancín sube y deja caer la barrena repetidamente y la roca se parte a causa de los golpes. Debe haber siempre agua en el pozo. La muestra se obtiene con una "cuchara" que limpia el fondo del pozo a intervalos frecuentes.

b) Perforación rotativa. Se efectúa mediante el giro de una barrena que se atornilla sólidamente al extremo inferior de una cadena de tubos que se conoce como "columna de perforación" (drill stem).

El giro de la columna se logra por medio de una plataforma de rotación instalada en la boca del pozo. Al estar perforando se hace que fluya un barro por dentro de la tubería hacia abajo y que vuelva por la parte de afuera del tubo, entre él y la pared de perforación. La muestra se recoge en el barro que fluye, y debe hacerlo un geólogo con mucha experiencia.

c) Perforación al diamante. También es rotativa, sólo que la barrena es un cilindro hueco de hierro dulce en cuyo extremo se engastan diamantes negros que sobresalen un poco hacia el exterior y el interior del cilindro. La muestra se va recogiendo en el interior del tubo y va avanzando hacia la superficie. Esta muestra proporciona un excelente registro de las rocas atravesadas. Con este método se obtienen las mejores muestras.

Los barrenos se distribuyen de manera que, con el menor número de ellos, se obtengan los datos buscados. A veces no se puede tomar muestra de los pozos o la que se tomó no es confiable. Entonces se realiza una prospección geofísica en el pozo.

PROSPECCIÓN GEOFÍSICA

Utiliza instrumentos y procedimientos basados en matemáticas y física. Hay 6 principales procedimientos:

a) Procedimiento magnético: Si los depósitos minerales son magnéticos (níquel, cobalto, pirrotina, etc.), desvían la aguja de la brújula. También hay rocas que son permeables al campo magnético y otras que son "opacas" a él. Por medio de un magnetómetro se miden los componentes vertical y horizontal del campo magnético y se pueden identificar diferentes tipos de rocas. Como ejemplo: las rocas ígneas tienen una susceptibilidad magnética de 10 a 100 veces más intensa que el granito o las rocas sedimentarias.

b) **Procedimiento eléctrico:** Se basa en la conductividad eléctrica y en la poca resistencia específica de los minerales metálicos. Para aplicarlo se miden las diferencias de potencial al pasar una corriente por el suelo o también por las corrientes naturales generadas por los minerales metálicos.

Método de corriente natural: La parte superior del depósito es químicamente más activa que la inferior, por lo que hay diferencias de potencial y las corrientes fluyen hacia abajo a través del mineral y regresan a través de la roca, fuera del mineral.

Método de equipotencial: 2 cables de cobre desnudos de 1 Km se entierran en el suelo separados de 500 a 1000 m. Los extremos se conectan con cable aislado a un generador. La corriente pasa entre los dos electrodos fijos en el suelo. Si el terreno tiene conductividad uniforme las líneas de potencial eléctrico son paralelas; si existe una masa de mineral mejor conductora que la roca, se modifican las líneas.

Método de resistividad: Rocas y minerales diferentes tienen resistividades diferentes. Al determinarse, se logra una información subsuperficial.

c) **Procedimiento electromagnético:** Se basa en el principio de que una corriente que pasa a lo largo de un conductor produce una corriente inducida alrededor del mismo. Si un conductor (masa mineral) está dentro del campo inducido, produce una corriente inducida alrededor de él y puede medirse.

d) **Procedimiento gravimétrico:** Fue de los primeros métodos y está casi en desuso. Se basa en el principio de atracción gravitatoria y se usa una balanza de torsión o un gravímetro.

e) Procedimientos sísmicos: Se usan sismógrafos que registran explosiones a gran distancia. Las rocas más densas transmiten las ondas con mayor rapidez que las menos densas. Si se mide el tiempo relativo se puede deducir el carácter de los materiales que atraviesan estas ondas.

f) Procedimientos radiactivos: Puede detectarse la radiactividad de los depósitos con scintillators (radiación gamma) o con contadores Geiger-Muller o con cámaras de ionización (radiación alfa-beta).

Como el estudio que nos ocupa se realizó en un depósito de uranio se detallará más este método.

Los aparatos usados en la prospección del uranio son principalmente los scintillators (centelleadores). Están basados en el fenómeno de fluorescencia, esto es: un átomo o una molécula absorben energía de alta frecuencia (longitud de onda corta) y por reacomodo en sus niveles internos emiten una energía de frecuencia más baja que la recibida.

El elemento principal del scintillator es un cristal de yoduro de sodio con impurezas de yoduro de talio. Este cristal, al recibir radiación gamma (alta frecuencia) emite centelleos visibles (baja frecuencia con respecto a la radiación gamma, que es invisible). El número de centelleos es proporcional a la concentración o "ley" de la muestra radiactiva, y se reporta en cuentas por segundo (cps).

El uranio se desintegra emitiendo, originalmente, partículas alfa. Estas son difíciles de detectar a distancia y un scintillator no puede "verlas". Lo que en realidad mide el scintillator es la radiación gamma emitida por dos de las "hijas" del uranio en su serie de desintegración. Para mejor ilustrar esto, se presenta la serie de desintegración del uranio. (Figura 1).

El scintillador mide principalmente la radiación gamma emitida por el plomo 214 y el bismuto 214. Al encontrar una zona radiactiva, debe tenerse en cuenta de dónde provienen las lecturas, porque el plomo 214 y el bismuto 214 son "hijas" del radón 222, que es un gas.

Este hecho puede producir 3 situaciones:

a) Que el depósito esté en equilibrio y entonces la radiación detectada indica la existencia del depósito.

b) Que el radón 222 haya migrado fuera del depósito y entonces la radiación detectada no corresponde al lugar donde el depósito está en realidad.

c) Que no se detecte radiación (radiación gamma) aun midiendo encima del depósito.

SERIE DE DESINTEGRACIÓN DEL U₂₃₈

(Simplificada)

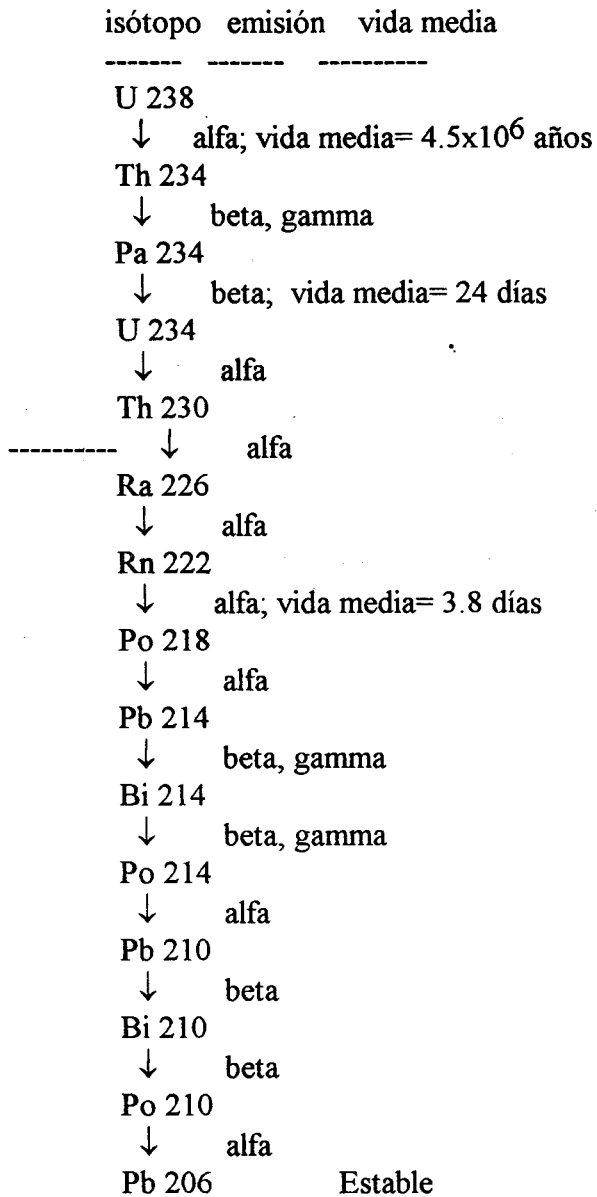


FIGURA 1

De cualquier manera, la radiación es indicio del depósito radiactivo en algún lugar relativamente cercano.

La prospección del uranio se realiza primero con scintillators aéreos para delimitar áreas radiactivas. Luego se "caminan" las áreas llevando un scintillator de mano y se marcan las zonas anómalas.

Una vez que se tiene detectada una zona promisoría, se planea una barrenación y se diseña una cuadrícula en el terreno para ubicar los barrenos.

De cada barreno se obtiene una muestra que se envía al laboratorio de análisis químico y al de geología.

En base a los resultados ("leyes"=concentración del mineral) reportados por el laboratorio químico y las formaciones detectadas por geología, se establece una morfología del cuerpo mineralizado y se procede a calcular las reservas.

Es muy importante el método que se use para inferir, a partir de los datos, los tamaños de los blocks de mineralización. Los principales enfoques que se han hecho para sistematizar un método, se basan en una nueva rama de la geología: la geoestadística.

Debe hacerse notar que hay muchos métodos para analizar los datos obtenidos. El método que aquí se propone es el mejor de los que pueden usarse y es relativamente nuevo. Empezó a desarrollarse a fines de los 70's.

GEOESTADISTICA
(ENFOQUE GENERAL)

GEOESTADISTICA (enfoque general)

En esta sección se revisan las ideas básicas de geoestadística, se ve la necesidad de calcular determinadas variables y el modo de analizarlas. En general: se analiza la terminología y las ventajas sobre otros métodos.

Los métodos tradicionales para calcular reservas como ponderación poligonal y triangulación de zonas de influencia rectangulares, métodos de distancia inversa, etc., intentaron combinar los datos de la posición de la muestra con una noción intuitiva del "área de influencia" para producir resultados útiles, pero no tienen un modo objetivo de medir la confiabilidad de estas técnicas.

El enfoque clásico incluye la noción de la variación espacial pero ignora las medidas cuantitativas de confiabilidad.

Los métodos estadísticos formales producen límites de confianza, pero ignoran las relaciones espaciales dentro del depósito.

Para resolver este problema, Matheron y Krige propusieron las "variables regionalizadas". ("Principles of Geostatistics", Economic Geology, No. 58, 1963)

Una variable regionalizada es una variable al azar que toma sus diferentes valores de acuerdo a su posición en alguna región.

En el caso del cálculo de reservas, la "región" es el cuerpo mineral y las "variables regionalizadas" son la "ley", el grosor del cuerpo, la densidad y cualquier otra medida deseada.

La continuidad y/o la naturaleza errática de la mineralización, la variación de "leyes" dentro del depósito, y las posiciones de las muestras disponibles se combinan para crear una técnica única de cálculo para cada depósito.

Con esta técnica de "variable regionalizada" se obtienen los mejores estimadores de las reservas de mineral tanto localmente como en todo el depósito y también se obtiene una medida directa de la confiabilidad.

Cálculo de las variables regionalizadas.

Se calculan: media, variancia y variación espacial. Esta última es la diferencia entre valores de muestras a diferentes intervalos de muestreo.

Como ejemplo muy simple y tomando como variable la "ley" de cada muestra, se tiene la siguiente serie de muestras:

31 33 35 37 39 38 36 34 32

La variación espacial de un intervalo de 1 se calcula:

$$[(31 - 33)^2 + (33 - 35)^2 + \dots + (36 - 34)^2 + (34 - 32)^2] / 8$$

La variación espacial de un intervalo de 2 :

$$[(31 - 35)^2 + (33 - 37)^2 + \dots + (38 - 34)^2 + (36 - 32)^2] / 7$$

Al separarse las muestras (aumento de intervalos) las diferencias cuadradas tienden a incrementarse. También, para un conjunto errático aleatorio de muestras, la diferencia cuadrada para cualquier intervalo de comparación es mayor que para un conjunto más uniforme.

Con estas diferencias cuadradas puede construirse un semivariograma que grafique la variabilidad espacial para distancias crecientes entre puntos de muestras. La gráfica típica se muestra en la figura 2.

El semivariograma pone en evidencia el rango de influencia de la variable, así como también separa la variancia total en dos partes:

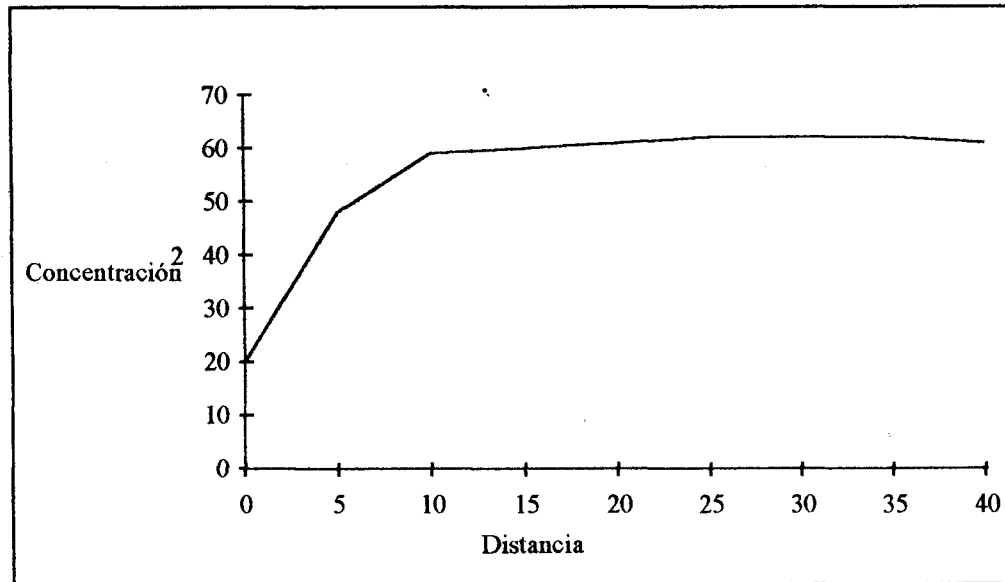


FIGURA 2

Una representa las diferencias "espaciales" de la muestra tomadas en puntos separados por distancias cada vez más grandes. La otra representa las variancias locales o de rango pequeño llamadas también "variancia nugget". Esto quiere decir que todos los valores medibles (o variables regionalizadas) tienen una variación en parte al azar y en parte espacial.

Para entender el rango de influencia suponer que en una mina se muestrea un block separado por 2 niveles, superior e inferior, a 30 m uno del otro. Suponer también que el rango de influencia de la muestra es 9 m. (figura 3).

Obviamente las muestras no darán información acerca de la parte central del block (12 m) y aumentar el número de muestras no sirve de nada. En los depósitos de metales base, el rango de influencia es de decenas de metros.

Si el depósito del ejemplo fuera de metal base, las muestras serían adecuadas.

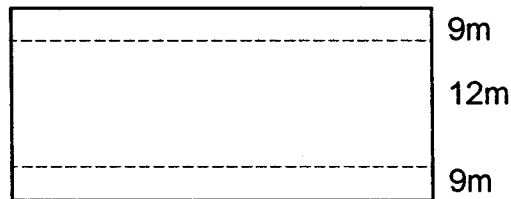


FIGURA 3

Método de los polígonos.

Es el método más usado para calcular reservas. Consiste en dividir el depósito en polígonos centrados en muestras individuales y sus lados se forman con los bisectores perpendiculares de las líneas entre los puntos de muestras. Cada polígono se supone que tiene un valor medio igual a la muestra que contiene. Con esta suposición lo más fácil es que se subvalore o se sobrevalore un block.

La desviación de un estimador puede ser expresada en términos de la pendiente media de la curva de regresión. La desviación es también una función del componente aleatorio de la variancia y se expresa como

$$E = \frac{\text{componente aleatorio de la variancia}}{\text{componente espacial de la variancia}}$$

Al graficar la pendiente de la línea de regresión contra el efecto "nugget" queda en evidencia que el método de los polígonos no sirve para depósitos con fuerte variabilidad natural.

En cambio, cuando se usan las variables regionalizadas los valores de las muestras se ponderan para minimizar errores de estimación y producen un estimador insesgado. A este método se le llama "kriging".

Programas de muestreo

Cuando se lleva a cabo un programa de muestreo lo que se desea es tener la información adecuada del depósito con el menor número de muestras. Esto es: cuántas muestras debo tener para un determinado intervalo de confianza.

Esto se calculaba usando los métodos tradicionales como el error standard de la media en combinación con t de Student. La mayoría de las veces el número de muestras requerido por este método era inaceptablemente alto.

La razón es que el método no toma en cuenta la componente espacial de la variancia. Si se usa la desviación standard del estimador calculado con las variables regionalizadas se reduce un alto porcentaje el número de muestras, dependiendo del semivariograma.

El rango de influencia es muy importante: si es grande, pueden espaciarse más las muestras. Para estimados globales, se pueden espaciar el 90 % del rango de influencia. Por ejemplo, si de norte a sur el rango de influencia es 150 m y de este a oeste es de 75 m, entonces las muestras de norte a sur se toman cada 120 m y de este a oeste, cada 60 m.

Este mismo enfoque puede usarse también para minado: si se tiene el estimador no desviado, se puede levantar un inventario de blocks estimados y su localización en el cuerpo mineral. De este modo se puede decidir cuáles blocks deben minarse para alimentar la planta concentradora con carga de ley adecuada y constante.

Se puede resumir hasta aquí las ventajas de las variables regionalizadas:

- Los cálculos tienen una base teórica probada (Royle, Clark et al. "Geostatistics", McGraw Hill 1980).

- El reconocimiento de que la variancia total es en parte aleatoria y en parte espacial, nos lleva a calcular estimadores sin sesgo y con más bajo error de estimación.

- Pueden diseñarse planes de muestreo económico y optimizar sus patrones.

- Ayuda a tener las operaciones de minado bajo control estadístico al conocer los estimadores de block.

- Pueden calcularse sin mucha dificultad. Sólo se necesitan conocimientos básicos de estadística.

GEOESTADISTICA
(CONCEPTOS Y METODOS)

GEOESTADISTICA (conceptos y métodos).

En esta sección se va a tratar de los conceptos geoestadísticos, los modelos matemáticos en que se basan y se ven algunos casos especiales.

La suposición principal del método geoestadístico es que la distribución de la diferencia en la "ley" (u otra variable) entre dos puntos es la misma sobre todo el depósito y depende sólo de la distancia entre esos dos puntos y su orientación.

La mayoría de las distribuciones estadísticas se describen por su media y variancia. Si se considera la distribución de la diferencia en "ley" entre dos puntos separados por una distancia h , entonces la media de la distribución denota el cambio en la "ley" esperada entre los dos puntos y refleja la tendencia de los valores sobre todo el depósito.

La media se denomina $m(h)$ puesto que es función de la distancia.

h describe tanto la distancia como la orientación. Si $m(h)$ es cero, entonces no hay tendencia significativa en el depósito.

Para propósitos de estimación la variancia es más útil que la media. La variancia también depende de h y mide la interdependencia de "leyes" en 2 puntos separados por una distancia h : si los puntos están muy relacionados, la variancia de la distribución de las diferencias es baja, y viceversa. Entonces la variancia es una medida de la influencia de las muestras sobre las áreas vecinas dentro del depósito.

A la gráfica de la variancia contra la distancia h se le llama "variograma" y matemáticamente se denota como $2\gamma(h)$. en la práctica se usa el semivariograma, que es $\gamma(h)$.

Construcción del semivariograma.

El semivariograma teórico $\gamma(h)$ se define como: "la mitad de la variancia de las diferencias en los 'grados' de muestras entre puntos separados por una distancia h". Se supone que las muestras cubren todo el depósito.

Como en la práctica hay un número limitado de muestras, se construye un semivariograma experimental y se denota $\gamma^*(h)$.

Como la media es la diferencia promedio en grado, ésta puede ser despreciable ($=0$). Si se considera cero entonces la variancia se reduce al promedio de las diferencias de grado al cuadrado.

Para simplificar, suponer muestras puntuales separadas regularmente cierta distancia unitaria. Suponer también que los valores ("leyes", grosores, recuperación, etc.) son: g_1, g_2, \dots etc.

Se toman primero pares de muestras separados por una unidad de longitud. Se calculan sus diferencias de valor y se elevan al cuadrado para cada par. Se suman los resultados y se dividen entre el número de pares usados. Este resultado se divide entre 2.

Como ejemplo, si se tienen 20 muestras separadas un metro:

Para distancia 1 m:

$$\gamma^*(h) = (1/2)(1/19)[(g_1-g_2)^2 + (g_2-g_3)^2 + \dots + (g_{19}-g_{20})^2]$$

Para distancia 2 m:

$$\gamma^*(h) = (1/2)(1/18)[(g_1-g_3)^2 + (g_2-g_4)^2 + \dots + (g_{18}-g_{20})^2]$$

Generalizando:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2(N-h)} \sum_{i=1}^{N-h} (g_i - g_{i+h})^2$$

Cada uno de estos valores calculados es un punto en la gráfica de $\gamma^*(h)$ contra h .

La restricción teórica en las distancias entre puntos usadas en γ^* es la cuarta parte del total de información de la muestra, pero en la práctica se usa la mitad.

Como al aumentar la distancia entre los puntos entran menos de ellos al cálculo, es lógico que los puntos mas cercanos al origen, los de menor distancia entre ellos, sean los más confiables:

Como ejemplo se da un semivariograma de una veta casi vertical de cassiterita. Se tomaron 85 muestras en intervalos de 1.5 m y la "ley" se expresa en libras de estaño por toneladas de mineral. (figura 4).

La gráfica indica que muestras muy juntas (1.5 m o menos) pueden tener muy diferente "ley". Si se prolonga la línea que une los dos primeros puntos calculados toca al eje en 95 (lb/ton)² en vez de irse a cero. Este hecho refleja la naturaleza aleatoria de la mineralización. Por definición, ignorando el error en el análisis químico, la diferencia en ley entre una muestra y ella misma debe ser cero. Estas muestras están muy juntas y su diferencia es grande. Este es el llamado "efecto nugget" y no lo puede predecir ningún método.

Si la variación al azar (efecto nugget) se da en gran proporción de la variación del depósito, no se puede usar la geoestadística. Se utilizaría por ejemplo, análisis de tendencia de superficie o algún otro método.

La razón de no poder usar geoestadística es que el semivariograma definiría sólo el umbral (igual al efecto nugget) y no se puede calcular el rango de influencia.

En las primera y segunda gráficas hay valores bajos en las distancias de 40 y 80 m. se deben a "picos " que tiene la veta.

La segunda y la tercera gráficas muestran el efecto de abrir más el intervalo de muestra. La segunda gráfica muestra sólo puntos intercalados y la variación al azar (efecto nugget) sube a 115 (lb/ton)^2 . O sea, la incertidumbre aumenta un 20%. La tercera gráfica no muestra ninguna estructura y hay variación al azar de una muestra a otra.

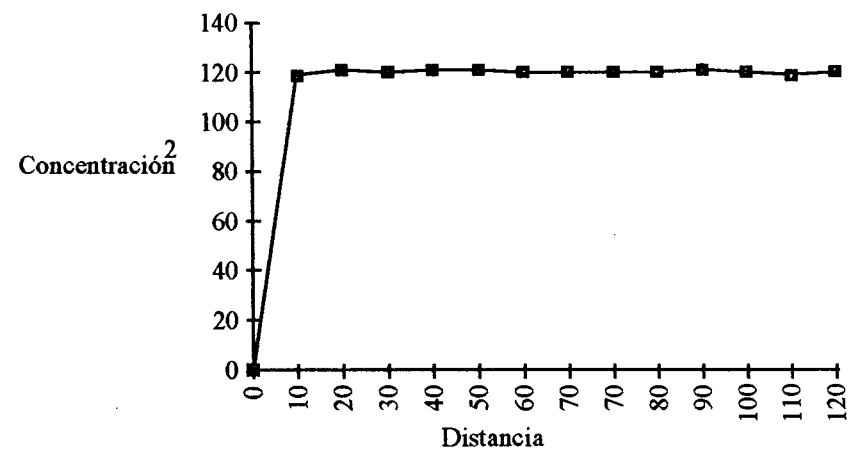
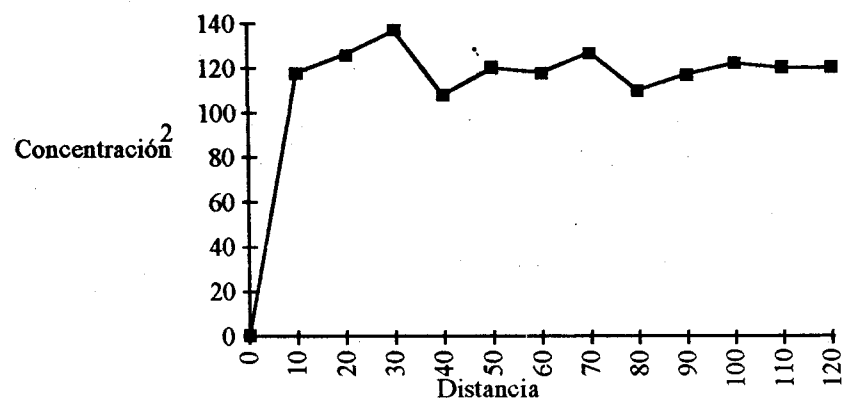
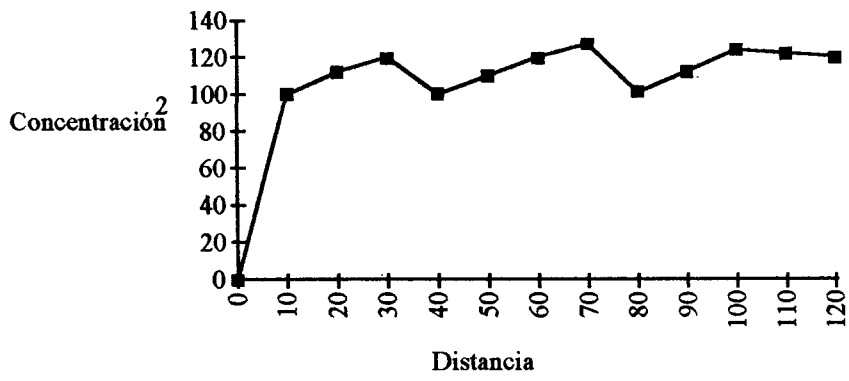


FIGURA 4

En la práctica, si se trata de depósitos con veta o sedimentarios con espesor constante, lo mejor es tomar muestras en un patrón de cuadros o rectángulos y construir varios semivariogramas en todas las direcciones. Se revisan luego los semivariogramas para ver si representan al depósito o si son sólo variancias al azar. En este último caso, falta muestrear en intervalos más cerrados.

Los semivariogramas deben combinarse con reconocimientos geológicos ya que diferentes depósitos tienen diferentes respuestas, como los depósitos aluviales o los lenticulares, que son de naturaleza anisotrópica.

Lo que se usa es tomar muestras a profundidades semejantes y a distancias relativamente lejanas. Se tienen entonces muy buenos semivariogramas verticales pero muy poca información horizontal.

El semivariograma es sólo una técnica de resumen de datos que describe el comportamiento de los valores de las muestras. Para más información hay que hacer un proceso de inferencia para construir el modelo. Esto es similar a buscar la distribución estadística a la que pertenece un histograma que acabamos de hacer. Igual que en el caso de las estadística, hay pocos modelos teóricos, y para resolver los problemas hay que aproximar el modelo particular a uno teórico ya existente.

Hay dos grupos de modelos teóricos:

a) Aquéllos en los que el semivariograma aumenta al aumentar la distancia h .

b) Aquéllos en los que el semivariograma primero aumenta y luego tiende a quedar en un valor constante. Este valor se dice que es un "umbral" y su valor se representa con la letra C .

De los modelos que no tienen umbral, el más usado es el modelo lineal. Este modelo es una recta que pasa por el origen y se define por su pendiente p . Ya generalizado, el semivariograma depende de la distancia h elevada a una potencia α , donde α está entre 0 y 2, pero nunca es 2.

Entre los modelos que tienen umbral están:

- El modelo esférico, llamado también modelo de Matheron. ("Principles of Geostatistics", Economic Geology, No. 58, 1963).

Crece rápidamente hasta llegar a su umbral y ahí permanece. La distancia en h desde el origen hasta el umbral se denomina "a" y se define como la distancia dentro de la cual las muestras tienen alguna relación. Este es el "rango de influencia" de un punto dentro del depósito.

- El modelo exponencial, que se define también por los parámetros de umbral y rango de influencia, pero crece más lentamente y nunca toca realmente el umbral. Estos dos modelos se comportan casi lineales para valores bajos de h .

- El otro modelo, llamado Gaussiano, no se comporta lineal cerca del origen sino parabólico. También crece rápidamente pero alcanza su umbral en una curva suave no tan definida como el esférico. Es característico de datos con alto grado de continuidad, como el grosor de algunos depósitos sedimentarios.

El valor de C (umbral) debe ser igual a la variancia ordinaria de los valores de las muestras dentro del depósito. Esto es: si se pudiera medir la "ley" u otra variable en cada punto dentro del depósito y luego calcular la variancia dentro del conjunto, el resultado sería exactamente C .

- Existe un último modelo: El que representa el comportamiento puramente al azar. En este modelo todas las muestras son independientes entre sí, por lo que el semivariograma consiste sólo del umbral. Es el efecto nugget ya mencionado. El valor del umbral es C_0 y el semivariograma es C_0 en todos lados, menos en $h = 0$

Resumiendo:

Sin Umbral:

Lineal : $\gamma(h) = ph$

Lineal generalizado : $\gamma(h) = ph^\alpha$ ($0 < \alpha < 2$)

Modelo de Wijsian : $\gamma(h) = 3 \cdot \alpha \log h$

Con Umbral:

Exponencial : $\gamma(h) = C [1 - \exp(-h/a)]$

$\gamma(h) = C[(3h/2a) - (h^3/2a^3)]$ para $h < a$

Esférico :

$\gamma(h) = C$ para $h > a$

$\gamma(h) = 0$; $h=0$

Efecto nugget :

$\gamma(h) = C_0$; $h > 0$

(Royle, Clark et al. "Geostatistics", McGraw Hill 1980)

Debe establecerse siempre una relación entre al variograma práctico, calculado y el modelo teórico. Se puede tener un semivariograma bueno, con umbral reconocible y no tener ningún modelo teórico que se le parezca. Puede suceder que el depósito sea realmente anisotrópico, la curva no pase por el origen sin doblarse drásticamente, o que sea errónea la suposición de que no hay tendencia o que haya dos o más modelos combinados.

Por ejemplo se tiene el siguiente semivariograma:

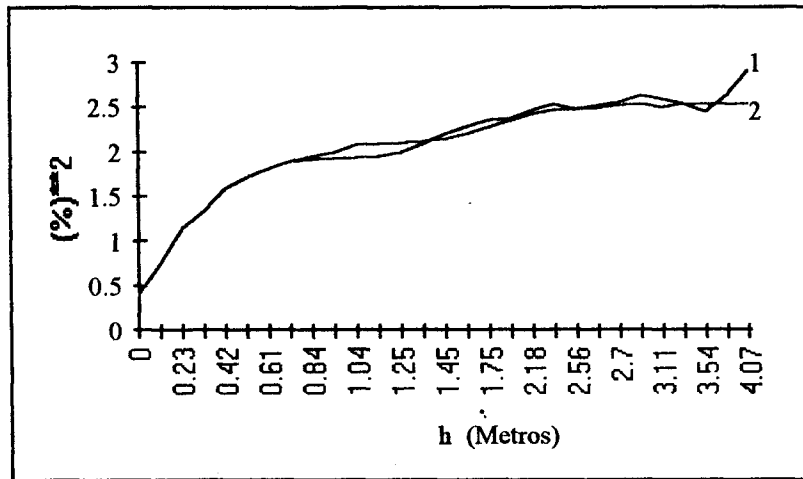


FIGURA 5

Se escogería el modelo esférico, por la forma. Pero hay un gran efecto nugget.

La línea 2 es el modelo que se seleccionó por prueba y error. Es una combinación de 2 modelos esféricos y el efecto nugget. En realidad hay 3 umbrales.

Si el depósito es anisotrópico es muy difícil acoplarlo a un modelo teórico y para hacer kriging deben hacerse correcciones.

El tipo más común de anisotropía y el más fácil de manejar es el que ocurre con semivariogramas en direcciones diferentes con diferentes rangos de influencia. Por ejemplo, los depósitos aluviales tienen mayor rango de influencia en la dirección de la corriente que a través de ella o verticalmente; los sulfuros de metales base muestran rangos evidentemente más bajos en la dirección vertical que en los dos horizontales.

El problema se resuelve cambiando las unidades de medida de modo que todos los rangos tengan el mismo valor numérico. Para ilustrar esto: si los rangos de influencia en la dirección horizontal son 120 m mientras que en la dirección vertical son 30 m, entonces las unidades en la dirección vertical se cambian a 1/4 para que en total den 120 divisiones con lo que se hace isotrópico el depósito. Una vez hecho esto, se realiza el kriging tomando en cuenta que la unidad en la dirección vertical es 25 cm, no un metro.

La otra clase de anisotropía se da cuando hay umbrales diferentes para semivariogramas calculados en direcciones diferentes. Puede ser que en realidad se trate sólo de la variancia del depósito, pero hay muestras que siguen una distribución log-normal y la aparente anisotropía se elimina si se construye el semivariograma usando el logaritmo de los valores de las muestras. Este es el llamado "efecto proporcional" porque en la distribución log-normal la desviación standard es directamente proporcional a la media. Una vez que se sabe que es isotrópico, se usan los valores originales para construir el semivariograma y se procede al kriging isotrópico.

Si el depósito hubiera sido realmente anisotrópico, no se habría corregido la gráfica con los logaritmos.

Otra causa de que el modelo no se ajuste a un semivariograma teórico es la existencia de una tendencia real ya que el modelo supone que no existe. Si en realidad existe y el semivariograma se calcula como si no existiera, el efecto es como añadir una parábola. Es decir, se notan claramente el umbral, el rango de influencia y el efecto nugget, pero la curva se va hacia arriba repentinamente.

Esto es clara evidencia de que hay una fuerte tendencia en el depósito.

Cuando esto sucede no se usa kriging sino análisis de tendencia de superficie.

K R I G I N G

KRIGING

Uno de los principales problemas para el cálculo de blocks es el poder contar con un estimador confiable. Hay muchos métodos para obtener estimadores, pero lo que se requiere es un estimador que tenga una variancia mínima. Esto es lo que se pretende con el método kriging.

Kriging es un método geoestadístico que usa los semivariogramas para producir un estimador lineal óptimo, no desviado.

La técnica consiste en usar promedios ponderados de los valores de las muestras de un block. $Z(S_i) = \sum \lambda_j g_j$. λ_j es el factor de ponderación que minimiza la variancia del estimador y produce los valores definidos del block dentro del intervalo de confianza más pequeño posible. El procedimiento para hallar los factores de ponderación (λ_j) que den el mejor estimado lineal no sesgado se conoce como "kriging".

Variancia del estimador.

La estimación geoestadística requiere:

- a) Los valores de $Z(S_j)$
- b) El semivariograma que describe la variabilidad espacial de las muestras.
- c) Los blocks que se estiman deben estar en los alrededores de la zona para la que se calculó el semivariograma.

d) Debe haber suficientes muestras para que se tenga una imagen confiable de la variabilidad.

e) Mineralización homogénea y sin tendencia.

Se puede dividir un depósito en secciones que cumplan con las condiciones anteriores. Si existieran tendencias, se usa un caso particular del kriging llamado kriging universal. También, en caso de que el muestreo no fuera regular puede usarse otra variante llamada "random kriging". (Clark, I, "Practical Geostatistics" Academic Press, 1985.)

Existe una variancia en el error de la estimación de blocks de grado real y desconocido Z_v , asociado a su cálculo que se realiza con un promedio ponderado de n valores de muestras puntuales. Esto, en términos del semivariograma, se expresa

$$\sigma^2 = 2 \sum \lambda_i \gamma(S_i, v) - \gamma(v, v) - \sum \sum \lambda_i \lambda_j \gamma(S_i, S_j)$$

La expresión $\gamma(S_i, v)$ puede ser explicada como sigue: Suponer que hay 2 puntos: uno en cualquier lugar del block v y el otro en cualquier lugar de la muestra S_i . La distancia entre esos 2 puntos y su orientación relativa puede ser expresada como el vector h . Se evalúa el semivariograma entre esos 2 puntos.

Suponer ahora que esos dos puntos son uno de los posibles pares de todos los puntos de v con todos los puntos de S .

Cada par de esos posibles tiene un valor para el semivariograma. Si todos esos valores se suman y se promedian el resultado obtenido será (en un sentido) el "promedio" del semivariograma entre el volumen v y la muestra S .

Esto es: (S_i, v) representa el semivariograma promedio entre la muestra total S y el volumen completo v .

Se puede ver fácilmente que el semivariograma depende no sólo de la distancia entre los centros de los volúmenes sino también de su tamaño y forma geométrica.

En términos matemáticos esto se expresa como una integral múltiple del semivariograma. El cálculo de esto no se complica tanto ya que en cualquier situación dada se conoce el semivariograma y S_i y v tienen una geometría conocida.

El resultado es solo un número o una tabla de números.

Del mismo modo, $\gamma(S_i, S_j)$ es el semivariograma promedio de todos los pares de puntos en donde un punto está en la muestra S_i y el otro está en la muestra S_j .

El tercer término de la ecuación incluye todas las posibles combinaciones de $\gamma(S_i, S_j)$, incluyendo $\gamma(S_i, S_i)$. Este término no será cero a menos que la muestra sea puntual, puesto que es el promedio de todos los pares de puntos dentro de S_i .

De hecho, $\gamma(S_i, S_i)$ refleja las diferencias y, por lo tanto, la variabilidad de los grados de los puntos dentro de S_i .

Similarmente $\gamma(v, v)$ es simplemente el semivariograma promedio entre todos los pares de puntos dentro del volumen v .

La ecuación incorpora:

1) La estructura de variabilidad de la mineralización. (todos los términos son semivariogramas).

2) La relación geométrica relativa entre las muestras y el block.

$(\sum \lambda_i \gamma(S_i, v))$.

3) La geometría del block que va a estimarse. $(\gamma(v, v))$

4) La configuración de las muestras. $(\sum \sum \lambda_i \lambda_j \gamma(S_i, S_j))$.

Los términos $\gamma(S_i, S_j)$, $\gamma(v, v)$ y $\gamma(S_i, v)$ son simplemente números y, para datos y configuración conocidos, la estimación de la variancia es sólo función de las ponderaciones asociadas con cada una de las muestras S_i .

Cualquier método de estimación tiene una variancia asociada. Esta variancia debe poderse calcular y así se selecciona el método con menor variancia asociada.

La propiedad especial del método kriging es que selecciona el conjunto de coeficientes (ponderaciones) tal que minimiza la variancia de estimación produciendo así la mejor estimación lineal.

La solución puede obtenerse por el conocido método simplex.

Como ejemplo, podemos suponer un depósito tabular horizontal, con barrenos verticales en patrón regular.

Esto puede reducirse a un problema bidimensional donde las variables se consideran acumulativas (ley promedio por el grosor del depósito) y la variabilidad espacial de tales variables se estudia en el plano horizontal. En este ejemplo usaremos cuadros de lado d , con 5 muestras: C_1 es la muestra en el centro de un block y C_2, C_3, C_4 y C_5 son los centros de los blocks adyacentes a C_1 .

Se supone que el semivariograma es isotrópico y de tipo esférico con un rango $a=2d$, un efecto nugget $C_0=0$ y un valor de umbral $C_0+C_1=1$.

A causa de la simetría de las muestras Z_n y a causa de que el semivariograma tiene la misma variabilidad en todas direcciones, se asigna la misma ponderación a cada una de las muestras circundantes.

El estimador para el block será:

$$Z_v = \lambda_1 Z(S_1) + \lambda_2 Z(S_2)$$

donde $Z(S_1)=Z_1$; $Z(S_2)=0.25(Z_2+Z_3+Z_4+Z_5)$: El valor asociado con el conjunto agrupado. Como hay dos coeficientes de ponderación λ_1 y λ_2 , se sigue por suma de fracciones que

$$\lambda_1=1-\lambda_2.$$

El sistema kriging de ecuaciones puede escribirse:

$$\gamma(S_1, S_1) \lambda_1 + \gamma(S_1, S_2)(1 - \lambda_1) + \mu = \gamma(S_1, v)$$

$$\gamma(S_2, S_1) \lambda_1 + \gamma(S_2, S_2)(1 - \lambda_1) + \mu = \gamma(S_2, v)$$

Así, todo lo que falta es evaluar los semivariogramas: los coeficientes de las ecuaciones.

Los términos del lado izquierdo de las ecuaciones incluyen sólo los conjuntos de muestras S_1 y S_2 , y son:

$$\gamma_1(S_1, S_1) = 0$$

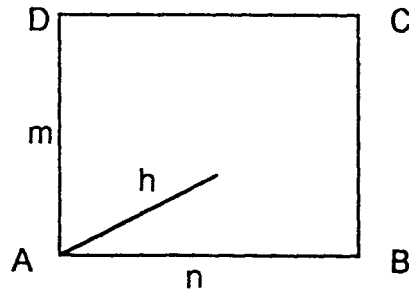
$$\gamma_1(S_1, S_2) = \gamma_1(S_2, S_1) = \gamma(d) = 0.688$$

$$\gamma_1(S_2, S_2) = 0.25[2\gamma(d\sqrt{2}) + \gamma(2d)] = 0.692$$

Esto se obtuvo de la fórmula de los semivariogramas esféricos. Los términos $\gamma(S_1, v)$ y $\gamma(S_2, v)$ pueden ser escritos en términos de la llamada función auxiliar que está definida por una geometría particular del block y la muestra de esta manera:

$H(m, n)$ es el valor promedio del semivariograma $\gamma(h)$ donde una punta del vector h se fija en A , una esquina del rectángulo $ABCD$ y la otra cubre el área mn del rectángulo.

Esta función puede ser tabulada para cualquier modelo esférico, pero lo usual es referirse a una tabla estandarizada que puede ser convertida al rango de influencia y al umbral requeridos.



$$H(m,n) = \gamma (A,ABCD)$$

FIGURA 5

En un modelo esférico todas las distancias se expresan como relativas al rango de influencia a . Esto significa que el valor de $H(m,n)$ para un modelo de rango a es el mismo que el valor de $H(m/a,n/a)$ para un modelo de rango 1.

De este modo una tabla con rango 1 cubre todos los modelos esféricos. Similarmente, en las tablas el umbral se fija en 1.

Para obtener los valores del umbral C , simplemente el valor de la tabla se multiplica por C .

En la tabla 1 se muestran los valores para un modelo esférico con $a=C=1$.

Para volver al ejemplo anterior puede mostrarse que el término $(S1,v)$ es igual a $H(0.5d,0.5d)$, donde $d=a/2$. Entonces el término requerido es $H(0.25a,0.25a)$ para rango a , o $H(0.25,0.25)$ para rango 1

Tabla H(m,n) para modelo esférico

$$a = C = 1$$

n	m			
	0.05	0.15	0.25	0.50
0.05	0.057	0.123	0.193	0.364
0.15	0.123	0.171	0.231	0.389
0.25	0.193	0.231	0.282	0.425
0.50	0.364	0.389	0.425	0.535
0.75	0.513	0.531	0.558	0.644
1.00	0.628	0.642	0.662	0.728
1.50	0.752	0.761	0.775	0.819

TABLA 1

De la tabla: $m=0.25$ y $n=0.25$, da un valor de $H=0.282$ por lo tanto $H(0.50d,0.50d)$ es $0.282C$. Como C en este ejemplo es 1, el valor que se sustituye en las ecuaciones de kriging es 0.282 . De igual manera, (S_2,v) es:

$$\begin{aligned} (S_2,v) &= 1.5H(1.5d,0.5d) - 0.5H(0.5d,0.5d) \\ &= 1.5H(0.75a-0.25a) - 0.5H(0.25a,0.25a) \\ &= (1.5)(0.558) - (0.5)(0.282) \\ &= 0.696 \end{aligned}$$

De la misma manera hay tablas disponibles para $F(m,n)$ el valor promedio de el semivariograma $\gamma(h)$ cuando ambas puntas del vector h cubren ABCD, o sea: $F(m,n) = \gamma(ABCD,ABCD)$. (Clark, I, "Practical Geostatistics" Academic Press, 1985.)

Estas se necesitan para calcular el término $\gamma(v,v)$ que ocurre en la variancia de kriging. En este caso $F(d,d) = 0.376$.

Ahora que se calcularon todas las constantes del sistema de ecuaciones, se obtiene la solución por sustitución para obtener los factores de ponderación.

La solución completa de la ecuación es $\lambda_1=0.600$, $\lambda_2=0.400$, $\sigma^2=0.079$

Así, para la estimación óptima la muestra central debe recibir alrededor de seis veces la ponderación de cada muestra externa.

Si se calcula el mismo block con diferentes técnicas, se ve que kriging tiene la menor variancia. El modelo de cálculo propuesto puede complicarse para diferentes rangos de influencia ("a" diferente de 1) o diferentes efectos nugget.

Los resultados también son mejores en comparación con las demás técnicas.

La razón de ésto es que kriging pondera el cambio con el semivariograma del depósito, mientras que las ponderaciones de los otros métodos se establecen al principio y se usan para toda la geometría relativa de las muestras y del block.

Para un rango dado, la ponderación que se asigna a una muestra interna bien colocada siempre es mayor si el efecto nugget es menor.

En una mineralización continua la muestra mejor colocada obtiene la mejor ponderación.

Al crecer el efecto nugget la mineralización se vuelve mas errática y la colocación de las muestras se vuelve menos importante hasta que, en el límite del puro efecto nugget cada muestra recibe la misma ponderación.

Al crecer el rango de influencia, las muestras externas aparecen mejor colocadas en relación al block y, por lo tanto, reciben mayor ponderación a expensas de la muestra central.

De cualquier manera, una variación de estimación grande calculada con kriging indica que son necesarios más barrenos para definir mejor el depósito. En este punto deben evaluarse las consecuencias económicas de esa acción.

Se presentan enseguida los pasos claves para hacer kriging:

- 1) Hacer un estudio estructural para determinar el semivariograma.
- 2) Seleccionar las muestras que van a usarse para evaluar el block.
- 3) Calcular de γ del sistema de ecuaciones de kriging.
- 4) Resolver del sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes óptimos de ponderación.
- 5) Usar de los resultados para calcular el estimado del block y la variancia asociada a la estimación.

El método debe aplicarse sólo a vecindades homogéneas cuasi-estacionarias para las que esté bien definido el semivariograma.

Para los datos disponibles, kriging garantiza los mejores resultados (Estimador insesgado y variancia mínima).

APLICACION
AL AREA DE ESTUDIO

El depósito mineral en el que se hizo la aplicación del método se encuentra en el estado de Chihuahua y fue muestreado por un equipo de exploración de Comisión Federal de Electricidad.

El depósito nunca se analizó por el método geoestadístico porque aún no se conocía.

En realidad muchas zonas del terreno que se exploró no pueden analizarse por este método porque tienen una marcada tendencia, pero sí la mayoría.

Lo que se hizo fue escoger una en la que se pudiera aplicar con relativa facilidad y que se ajustara a un modelo standard.

El terreno se exploró primero con scintillators. Estos aparatos detectan radiación gamma que es la que puede llegar a más distancia y funcionan basados por el efecto de fluorescencia, esto es: reciben radiación de alta frecuencia (γ) y emiten una radiación de baja frecuencia relativa a la que reciben (visible).

Esto se manifiesta en "chispazos" o centelleos que pueden detectarse a simple vista. Hay una relación directa entre la concentración (cantidad de mineral radiactivo presente) y el número de centelleos en una unidad de tiempo. Esto es lo que se denomina cuentas por minuto o cuentas por segundo (cpm, cps).

Por este método se fueron determinando zonas anómalas en radiación y se fueron delimitando las que eran candidatas a ser barrenadas para buscar los cuerpos minerales.

En la introducción de este trabajo se habló del desequilibrio que puede existir entre los depósitos de minerales radiactivos, así que se tomaron muestras superficiales (1m, 1.5m de profundidad) para enviarlas a laboratorio y determinar su contenido de uranio. (Recuérdese que los scintillators sólo detectan radiación gamma, que no necesariamente es emitida por el uranio o uno de los miembros de su serie.)

Las muestras enviadas al laboratorio se analizaron por el método de fluorescencia y se utilizó un fluorímetro Scintrex equipado con láser de nitrógeno como fuente excitadora.

Las muestras se disuelven y después se colocan en un contenedor que se interpone en la trayectoria del láser (emisión ultravioleta) y se mide la fluorescencia emitida por la solución.

Estas fluorescencias se comparan contra standards de uranio que surte el U.S. Bureau of Standards y, a partir de esas mediciones pueden calcularse las concentraciones de las muestras.

Este estudio se realizó sobre esas muestras superficiales y se intenta ahora determinar si el muestreo era suficiente como para proceder al la barrenación o se necesitaba cerrar más la retícula de muestreo (como en realidad se hizo).

Para el análisis completo del depósito falta sacar los resultados de los barrenos y poder modelar en tercera dimensión el cuerpo mineral.

Sin embargo, ésto depende sólo de la profundidad de los barrenos y ya no del número de ellos que deben darse.

Tuvimos mucha dificultad para conseguir los planos de ubicación de las muestras (la ubicación es muy importante para el método) y C.F.E. prefiere que no se publique la localización exacta del depósito. (Datos confidenciales)

A continuación se dan los datos de todas las muestras. Como ya se había indicado, están separadas 10 metros entre sí.

Cada conjunto de datos está completo a lo ancho y deben "pegarse" a lo largo para completar todo el terreno.

Los valores que se indican son los resultados de los análisis químicos y están reportados en partes por millón de U₃O₈.

1784	1313	848	683	554	254
1801	1306	865	641	560	264
1754	1321	841	670	549	247
1776	1317	854	687	543	260
1771	1306	835	672	543	247
1792	1321	856	676	560	247
216	131	42	26	27	51
228	120	53	21	21	61
233	135	38	36	21	47
211	142	44	36	21	42
209	120	38	34	40	51
222	123	38	36	32	42
46	51	46	74	71	72
53	44	70	63	78	89
42	53	76	76	85	80
53	42	49	68	76	74
42	55	63	78	63	76
53	51	42	78	74	68
82	140	296	1636	1492	1042
123	290	926	1631	1501	1025
127	300	913	1628	1480	1036
85	120	292	903	1644	1500
137	279	905	1644	1473	1473
80	120	302	909	1640	1392
645	511	283	118	112	101
655	507	290	125	106	105
640	503	275	114	106	103
1029	655	509	274	123	101
636	524	273	106	120	120
1027	649	501	283	127	127

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Las muestras se tomaron en una retícula con 10 metros de separación entre cada muestra. El terreno muestreado mide 50 metros a lo ancho (6 muestras) y 300 metros a lo largo (31 muestras). Se analizaron 180 muestras de un total de 186.

El semivariograma se calculó para cada una de las 6 líneas de 30 muestras y para diferentes separaciones entre muestras. La distancia más apropiada para este caso fue 10 metros.

El semivariograma se calculó de la siguiente manera:

- Se tomaron los valores de la primera y segunda muestras (primer par), se restaron y el resultado se elevó al cuadrado.

-Luego los valores de la segunda y tercera muestra (segundo par) se restaron y el resultado se elevó al cuadrado.

-Cuando ya se calculan todos los pares, se suman y el resultado se divide entre el doble del número de pares que se calcularon.

-Esto nos da el primer punto del semivariograma: punto para $h=10$

-En números:

$$((1784-1313)^2 + (1313-848)^2 + \dots + (127-127)^2) / (2)(186) = 38015.34$$

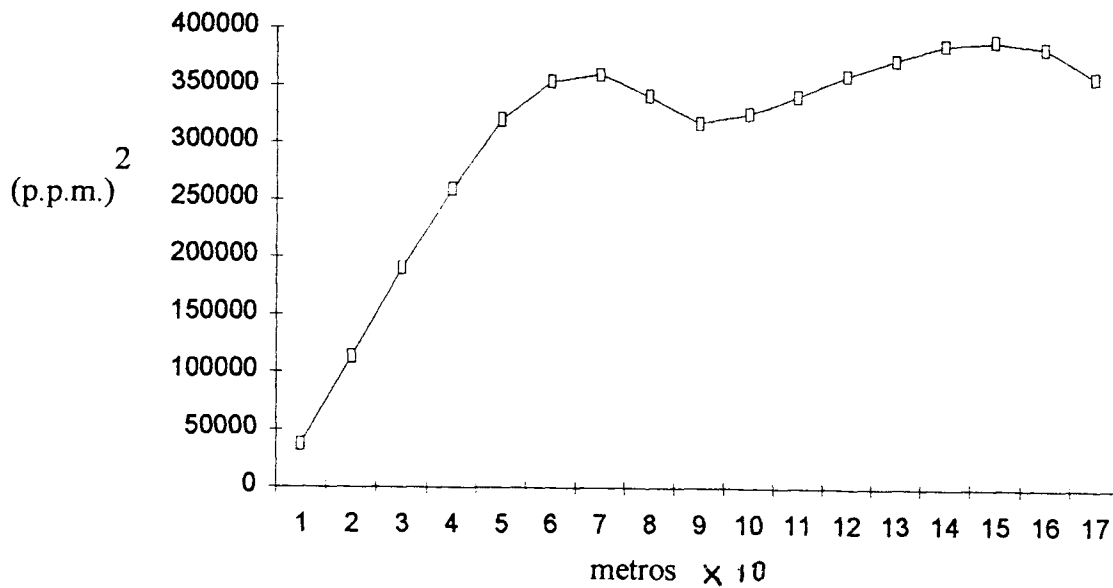
-Para el segundo punto ($h=20$), se abre la distancia entre muestras y se hace lo mismo que en el punto anterior.

-En números:

$$((1784-848)^2 + (1313-683)^2 + \dots + (283-127)^2) / (2)(180) = 113263.9$$

Y así se calcula hasta el punto $h=200$ que es hasta donde nos interesa el semivariograma.

En la gráfica, el eje X son metros y el eje Y son $(\text{ppm})^2$.



-En la gráfica se aprecia una pequeña "tendencia" que puede deberse a estructura estratificada.

En todo caso, trabajamos confiablemente si sólo tomamos los datos hasta $h=200$.

El siguiente paso es establecer el tipo de semivariograma que se tiene. Ya hay modelos matemáticos calculados y la idea es buscar a cuál se parece más para poder seguir adelante con los cálculos.

Este procedimiento es análogo al que se sigue para buscar, por ejemplo, una distribución estadística que sigan unos datos obtenidos para un estudio de teoría de colas: Una vez que se tienen los datos reales se comparan con datos teóricos calculados a partir de la función de densidad de la distribución.

Esto se aplica al caso que nos ocupa. La gráfica obtenida a partir de los datos reales, hasta una distancia entre muestras de alrededor de 200 metros, se parece al modelo llamado "esférico".

Este modelo tiene la siguiente ecuación:

$$\gamma g(h) = C [(3h/2a) - ((h/a)^3)/2] \text{ para } 0 \leq h \leq a$$

$$\gamma g(h) = C \quad \text{para } h > a$$

Donde:

C es el umbral del semivariograma: Es el punto donde la curva empieza a perder pendiente para volverse horizontal.

a es el rango de influencia: hasta qué distancia influye la concentración de la muestra en los cálculos. Más allá de este punto su influencia es al azar (o nula).

h es la distancia entre muestras.

Para este modelo (esférico), el umbral corta la curva en $2a/3$.

Partiendo de este dato se pueden tener los parámetros con los que se puede iniciar el método de prueba y error para calcular el modelo matemático que se ajuste a las muestras reales. Tomando las medidas de la gráfica, se obtiene un umbral tentativo de $C= 370000$ $(\text{ppm})^2$ y un rango de influencia $a=107$ (metros).

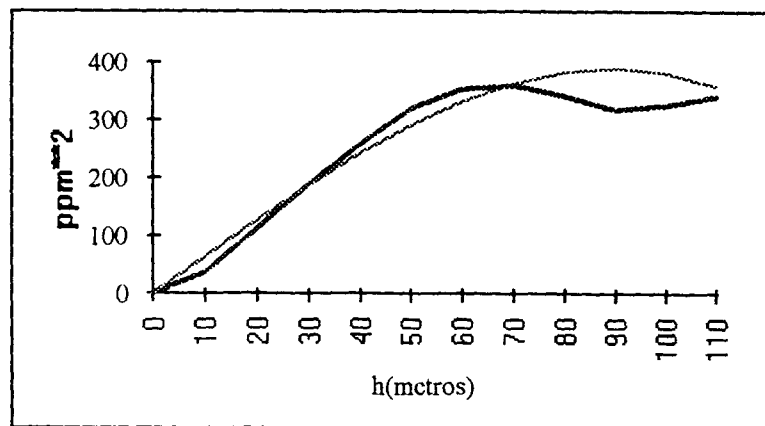


FIGURA 6

La línea delgada es el modelo matemático. La línea gruesa son los datos reales.

La curva que aquí se presenta fué calculada por prueba y error, moviendo el umbral y el rango de influencia dentro de un intervalo adecuado para lograr el mejor ajuste al modelo matemático.

El rango de influencia óptimo para este ajuste (mínima diferencia del estadístico χ^2), fue de 90 metros y el umbral 390,000 (partes por millón)².

KRIGING
EN AREA DE ESTUDIO

KRIGING

El método para calcular un estimador con variancia mínima fue llamado Kriging en honor a Danie Krige que hizo los estudios sobre los cálculos de las ponderaciones en 1951, pero el método no se empezó a desarrollar sino hasta fines de los 70's.

A este estimador se le denomina BLUE:(Best Linear Unskewed Estimator). Ya se habló de él anteriormente.

Con los datos obtenidos en la sección anterior se procede a determinar el estimador por el método de Kriging ya explicado en la sección de conceptos y métodos de geoestadística

Para calcular el estimador primero debe escogerse el tamaño de área de superficie que quiere estimarse.

En nuestro caso se escogió, a sugerencia del equipo de geólogos, un área de superficie de 20 X 20 metros.

Pueden escogerse áreas de cualquier tamaño: ya se sabe que al aumentar el área puede bajar la "ley" del estimador, pero también se baja la variancia.

En otras palabras, Quizá tenemos menos uranio, pero estamos más seguros de lo que tenemos.

De cualquier modo, los cálculos serían idénticos para un área más grande, aunque quizá más tardados.

La confiabilidad de un estimador puede medirse revisando la dispersión de sus errores. Si para muchas muestras el error esperado es cero, entonces el estimador es no sesgado.

El método kriging propone un estimador que usa el promedio ponderado de los valores de las muestras.

Puede tenerse un número infinito de estos estimadores, ya que hay muchos modos de calcular las ponderaciones.

Se pretende buscar el mejor estimador no sesgado y con la menor variancia en la estimación.

Ahora, la variancia en la estimación depende de 3 cosas:

- a) La geometría básica. Tanto de las muestras como del área que se pretende estimar.
- b) La forma del semivariograma. Esto es: el rango de influencia y el umbral de cada muestra.
- c) La ponderación que se da a cada muestra.

Se concluye de lo anterior que para un conjunto de muestras dadas (nuestro caso), sólo cambiando las ponderaciones podemos cambiar la variancia.

Por lo tanto, se puede minimizar la variancia con respecto a las ponderaciones.

Esto es:

$$\delta\sigma / \delta w_i = 0 \quad i= 1,2,3,\dots,n$$

El estimador que se propone es:

$$T = w_1 g_1 + w_2 g_2 + \dots + w_n g_n$$

La media aritmética sería el caso particular en el que todas las ponderaciones son iguales.

La variancia para este tipo de estimador es:

$$\sigma^2 = 2 \sum w_i \gamma(S_i, A), - \sum \sum w_i w_j \gamma(S_i, S_j) - \gamma(A, A)$$

Para la fórmula anterior:

El primer término es un promedio ponderado del semivariograma promedio entre cada muestra y el área que va a estimarse. Hay tablas estandarizadas para calcular el semivariograma de este tipo. (Royle, Clark et al., Geostatistics, Mc GrawHill, 1980) Al aplicar el método a nuestro caso, se explica cómo se usan.

El segundo término es el "término entre muestras": cada muestra se calcula contra cada muestra, incluso contra ella misma, y la combinación se multiplica por las dos ponderaciones.

Todos los términos pueden calcularse directamente del semivariograma, por lo que quedan sólo en función de las ponderaciones.

El tercer término es el semivariograma que relaciona al área consigo misma. También hay tablas estandarizadas para calcular este tipo de semivariogramas.

Al minimizar la variancia con respecto a las ponderaciones nos resultan n ecuaciones con n incógnitas (las ponderaciones), y se puede calcular fácilmente el estimador, pero se necesita también satisfacer la ecuación $\sum w_i = 1$. Esto nos produce n+1 ecuaciones.

Se introduce entonces una nueva incógnita en forma de multiplicador de Lagrange y en vez de minimizar la variancia de la estimación se minimiza :

$$\sigma^2 - \lambda (\sum w_i - 1) \quad \text{con respecto a las ponderaciones y } \lambda.$$

Esto último produce la ecuación $\sum w_i - 1 = 0$.

Después de derivar, resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$w_1 \gamma(S_1, S_1) + w_2 \gamma(S_1, S_2) + w_3 \gamma(S_1, S_3) + \dots + w_n \gamma(S_1, S_n) + \lambda = \gamma(S_1, A)$$

$$w_1 \gamma(S_2, S_1) + w_2 \gamma(S_2, S_2) + w_3 \gamma(S_2, S_3) + \dots + w_n \gamma(S_2, S_n) + \lambda = \gamma(S_2, A)$$

$$w_1 \gamma(S_3, S_1) + w_2 \gamma(S_3, S_2) + \dots + w_n \gamma(S_3, S_n) + \lambda = \gamma(S_3, A)$$

.....

$$w_1 \gamma(S_n, S_1) + w_2 \gamma(S_n, S_2) + \dots + w_n \gamma(S_n, S_n) + \lambda = \gamma(S_n, A)$$

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n + \lambda = 1$$

Pueden sustituirse las ponderaciones, una vez calculadas, en la ecuación general de la variancia, o en esta reducción:

$$\sigma^2 = \sum w_i \gamma(S_i, A) + \lambda - \gamma(A, A).$$

Las ecuaciones aplicadas al presente estudio quedaron: como sigue (se muestran sólo los coeficientes de w1, w2,..etc. en la matriz que se formó):

0	64.73	127.9	64.73	92.8	142.3	127.86	142.3	177.7	1	98.42
64.73	0	64.73	92.8	64.73	92.8	142.3	127.9	142.3	1	76.81
127.9	64.73	0	142.3	92.8	64.73	177.7	92.8	127.86	1	98.42
64.73	92.8	142.3	0	64.73	127.9	64.73	92.8	142.3	1	76.81
92.8	64.73	92.8	64.73	0	64.73	92.8	64.73	92.8	1	49.85
142.3	92.8	64.73	127.9	64.7	0	142.3	92.8	64.73	1	76.81
127.9	142.3	177.7	64.73	92.8	142.3	0	64.73	127.86	1	98.42
142.3	127.86	142.3	92.8	64.73	92.8	64.73	0	64.73	1	76.81
177.7	142.3	127.9	142.3	92.8	64.73	127.86	64.73	0	1	98.42
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1

(todos los términos están divididos entre 1000 para simplificar cálculos, excepto los coeficientes de λ y el renglón inferior).

Cálculo de términos:

a) Los coeficientes del lado izquierdo de las diez ecuaciones se calcularon a partir de las distancias entre cada muestra con todas las demás muestras, buscando su valor en el semivariograma teórico.

b) El lado derecho de cada ecuación corresponde a la tabla H(l,b) que está estandarizada para un rango de influencia = 1 y un umbral = 1.

La función auxiliar $H(l,b)$ es el valor del semivariograma promedio entre un área y un punto en una esquina de esa área.

Como las tablas auxiliares están calculadas con esta limitación, deben hacerse algunas consideraciones para poder calcular todos los puntos. Se comentan como ejemplo 2 puntos: el punto (1,1) para que se vea una aplicación directa, y el punto (2,2) para ver una generalización.

-El punto (1,1) es una esquina. Entonces es muy fácil calcularlo porque se toma directamente de la tabla: como se tiene un rango de influencia de 90 metros, un umbral de 390000 ppm² y un área de 20 X 20 metros, entonces se calcula $H(29/90, 20/90)$ o sea $H(0.2222, 0.2222)$.

El valor de la tabla (interpolado) es 0.25235. Esto es para un umbral = 1. Como nuestro umbral tiene un valor de 390000, entonces debe multiplicarse el valor de tabla por este número para obtener el valor de tabla deseado: 98416.

-El punto (2,2) es el punto central de nuestra área y, como la función es para una esquina, se forman 4 áreas diferentes que miden cada una 10X10 metros. El resultado final debe ser la sumatoria de diferencias cuadradas dividida por el área total. Cada semivariograma es esto mismo.

Entonces si multiplicamos cada semivariograma (dado por la tabla) por su área, se obtiene la sumatoria de las diferencias cuadradas. Podemos luego sumarlas y dividir entre el área total para obtener el semivariograma promedio entre un área y un punto cualquiera en ella, aunque no sea esquina.

En números:

$[H(10,10)(10)(10)+H(10,10)(10)(10)+H(10,10)(10)(10)+H(10,10)(10)(10)]$ dividida entre el área total, que es 20X20 metros. Esto puede reducirse a:

$$4(10)(10)[H(10,10)] / (20)(20) = H(10,10)$$

Para calcular la tabla sería $H(10/90, 10/90)$. El valor en la tabla, ya interpolado, es 0.1278. Tomando en cuenta el umbral el lado derecho de la ecuación queda: $(390000)(0.1278) = 49842$.

Los restantes términos del lado derecho se calculan de manera similar.

Los resultados son los siguientes:

Ponderaciones y λ :

$$w_1 = 0.054$$

$$w_2 = 0.172$$

$$w_3 = 0$$

$$w_4 = 0.126$$

$$w_5 = 0.246$$

$$w_6 = 0.171$$

$$w_7 = 0.051$$

$$w_8 = 0.126$$

$$w_9 = 0.054$$

$$\lambda = -1.314$$

Variación:

$$(0.54)(98420)+(0.172)(76810)+(0)(98420)+(0.126)(76810)+$$
$$(0.246)(49850)+(0.171)(76810)+(0.051)(98420)+$$
$$(0.126)(76810)+(0.054)(6448)+(-1.314)- 70000 =$$

$$\text{Variación} = 3641.342 \text{ ppm}^2$$

$$\text{Desviación standard} = 60.34 \text{ ppm.}$$

Hay una dificultad con la exactitud: las tablas tienen pocas cifras después del punto y la interpolación agrava el problema.

A continuación se calculan los estimadores para cada área superficial.

Las áreas se definieron desde la esquina superior izquierda. El área 1 consta de las primeras 3 columnas por los primeros tres renglones.

La siguiente área hacia la derecha es el área 2 y así sucesivamente hasta llegar al área 10.

El área 11 queda en el extremo inferior izquierdo (bajo el área 1) y, como en las anteriores, a su derecha queda el área 12. Se completan así 20 áreas de 20 por 20 metros.

Se detalla el cálculo del estimador de la primera área:

$$T1 = (0.54)(1784) + (0.172)(1313) + (0.0)(848) + (0.126)(1801) + (0.245)(1306) + (0.171)(865) + (0.051)(1754) + (0.126)(1321) + (0.054)(841) = 1319.65 \text{ ppm}$$

Estimadores para el total de áreas:

Area1: 1319.65 área2: 512.44 área3: 132.48
área4: 31.33 área5: 53.66 área6: 77.46
área7: 505.08 área8: 1420.3 área9: 490.4
área10: 110.15 área11: 1313.74 área12: 509.29
área13: 127.05 área14: 36.55 área15: 51.08
área16: 72.05 área17: 301.57 área18: 1480.84
área 19: 585.22 área20: 136.48

Todos estos estimadores tienen la misma variancia. Su valor ya se calculó anteriormente

Ya se dijo antes que es necesario modelar el depósito en tercera dimensión. Hasta el momento sólo tenemos muestras superficiales pero ya pueden escogerse áreas por arriba o por abajo de un "punto de corte" (definir áreas de interés económico).

Con este criterio puede bajarse aún más el número de barrenos que deben darse y con mucha confiabilidad ya que la variancia es muy baja.

Se puede concluir que se podrían haber tomado menos muestras superficiales al principio del estudio, pero al empezar no se tiene idea de la forma del semivariograma.

Lo que sí es seguro es que no se necesitan más muestras superficiales, que el número de barrenos va a ser muy bajo y que depende este último del "punto de corte" económico que decidan los jefes del proyecto.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES:

a) El número de barrenos puede bajarse mucho en comparación con los otros métodos y bajo un enfoque estadístico confiable. (Este era el objetivo de la tesis.)

En este caso el rango de influencia de cada muestra es de 90 metros. Esto quiere decir que, aunque las muestras superficiales fueron tomadas cada 10 metros, los barrenos pueden espaciarse cada 80 metros (el 90% del rango de influencia).

Se tiene información confiable y con muy poca variancia.

b) La variancia del método (Kriging) es la más baja posible. Recuérdese que la variancia se minimizó con respecto a las ponderaciones.

c) Una vez que se da la geometría de la muestra y la geometría del área muestreada, pueden calcularse fácilmente las ponderaciones y la variancia y puede obtenerse un estimador confiable de cada área. Además, para un muestreo regular, no se necesita recalcular el sistema de Kriging.

d) El estudio que se presentó se basa sólo en un muestreo inicial y las muestras son de superficie, Es decir, la inversión es mínima.

Con ésto ya se puede determinar un número mínimo de barrenos pero no se puede saber la profundidad requerida ni la inclinación de éstos.

La inclinación depende del depósito y la profundidad puede determinarse con semivariogramas verticales una vez que se den algunos barrenos.

d) Podía haberse dado el caso de que se necesitaran más barrenos. Si así fuera, el semivariograma no habría tenido ni rango de influencia ni umbral definidos. Es decir, sólo se habría notado la parte de la "variancia al azar". Cuando ésto sucede, debe hacerse un análisis económico para ver si conviene aumentar el número de barrenos. La pregunta es: ¿Es rentable conocer a más detalle el depósito mineral?

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

LIBROS:

- Royle, Clark et alt. "Geostatistics", McGraw Hill, 1980
- Clark, I, "Practical Geostatistics" Academic Press, 1985.
- Guarascio, M., David, M. "Advanced Geostatistics in the Mining Industry" Ridel, Holland, 1976.
- Randu, J.M., "An introduction to Geostatistical Method of Mineral Evaluation", South African Institute of Mining & Metallurgy, 1978.
- Kreiter, V.M., "Geological Prospecting and Exploration", MIR, 1980.
- Bateman, A., "Yacimientos Minerales de Rendimiento Económico", Omega, 1970.

ARTICULOS:

- Royle, A.G., "Global Estimates of Ore Reserves", Institute of Mining & Metallurgy Transactions, No 86, 1976, pp A9-A17.
- Matheron, G. "Principles of Geostatistics", Economic Geology, No 58, 1963, pp 1246-1266.
- Sandefurt, R.L., "Geostatistics Applied to Roll Front Uranium- A Case Study in Wyoming.", Engineering and Mining Journal, Feb 1980.
- Clark, I., "Regularisation of a Semi-Variogram", Computers and Geosciences, 1977, No.2, pp 341-6.

