

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY
CAMPUS MONTERREY
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA**



**"DESARROLLO DE UNA METODOLOGÍA Y
ALGORITMO DE ANÁLISIS DE SISTEMAS HÍBRIDOS
BASADO EN EL MODELO DEL AUTOMATA HÍBRIDO"**

T E S I S

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
ESPECIALIDAD EN AUTOMATIZACIÓN**

BRAULIO JOSÉ CRUZ JIMÉNEZ

SEPTIEMBRE 2001

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY
CAMPUS MONTERREY**

PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA



**“DESARROLLO DE UNA METODOLOGÍA Y ALGORITMO DE ANÁLISIS DE
SISTEMAS HÍBRIDOS BASADO EN EL MODELO DEL AUTÓMATA HÍBRIDO”**

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE**

**MAESTRO EN CIENCIAS
ESPECIALIDAD EN AUTOMATIZACIÓN**

BRAULIO JOSÉ CRUZ JIMÉNEZ

SEPTIEMBRE DEL 2001

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE
MONTERREY**

CAMPUS MONTERREY

DIVISIÓN DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la presente tesis del
Ing. Braulio José Cruz Jiménez sea aceptada como requisito parcial para obtener el grado
académico de Maestro en Ciencias especialidad en :

AUTOMATIZACIÓN


Comité de tesis:



Dr. Antonio R. Payola Contreras, Ph. D.
ASESOR

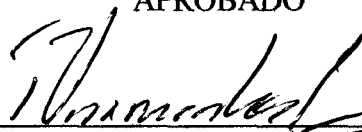


Ing. Francisco Palomera Palacios, M.C.
SINODAL



Dr. José de Jesús Rodríguez Ortiz, Ph. D.
SINODAL

APROBADO



Dr. Federico Viramontes Brown, Ph. D.
Director del Programa de Graduados en Ingeniería
Septiembre del 2001

DEDICATORIAS

A mi madre, Dra. Maria del Carmen Jiménez Pérez, por confiar siempre en mi, apoyarme durante toda mi vida y darme ánimos para realizar todos mis proyectos.

A mi abuelita María por darme su cariño.

A mi hermana Camelú por llenar mi vida de alegría.

A mi hermano Dr. Rene Cruz por darme el ejemplo.

A mi novia Jannette por sus consejos y por su amistad.

A toda mi familia por estar siempre conmigo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Antonio Favela Contreras por los conocimientos transmitidos y sus observaciones a lo largo de la realización de este trabajo de tesis. Por su amistad, su paciencia y apoyo en el transcurso del postgrado.

A mis Sinodales por sus valiosas sugerencias y tiempo dedicado en la revisión de esta tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM) por las facilidades otorgadas para el estudio de esta maestría.

A mi amigo Edgar por brindarme siempre su ayuda.

Por último gracias por el apoyo de todos mis compañeros y amigos de la maestría.

ÍNDICE

RESUMEN	iii
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	
1.1 Antecedentes.	1
1.2 Diferentes enfoques en el modelado de sistemas híbridos.	3
1.3 Justificación.	9
1.4 Objetivo de la investigación.	9
1.5 Alcance de la tesis.	9
1.6 Organización de la tesis.	10
CAPÍTULO 2. TEORÍA DE AUTOMATAS	
2.1 Introducción al modelo del autómata finito.	11
2.1.1 Conceptos básicos.	12
2.1.2 Sistemas de estados finitos.	13
2.1.3 Modelo del autómata finito.	16
2.1.4 Autómata finito determinístico.	17
2.1.5 Autómata finito no determinístico.	18
2.2 Autómata temporizado.	19
2.3 Autómata híbrido.	22
2.3.1 Modelo del autómata híbrido.	22
2.3.2 Diferentes representaciones del autómata híbrido.	27
2.3.3 Autómata híbrido lineal invariante en el tiempo.	29
CAPÍTULO 3. MODELACIÓN Y ANÁLISIS DE SISTEMAS HÍBRIDOS	
3.1 Problema de la modelación.	31
3.2 Modelación de la dinámica continua y discreta en los sistemas híbridos.	32
3.3 Características continuas.	32
3.3.1 Procesos con integrador.	33
3.3.2 Relación entre los comportamientos de la dinámica continua.	34
3.4 Características discretas.	37
3.4.1 Diferentes modos de comportamientos físicos.	38
3.4.2 Entradas discretas.	39

3.4.3 Salidas discretas.	39
3.5 Síntesis de la ley de control.	40
3.5.1 Especificaciones para la parte continua.	40
3.5.2 Especificaciones para la parte discreta.	41
3.6 Análisis de sistemas híbridos.	41
3.6.1 Análisis de un autómata híbrido desacoplado.	41
3.6.2 Validación de las transiciones discretas.	45
3.6.3 Análisis de un autómata híbrido acoplado.	49

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA PROPUESTA PARA LA MODELACIÓN Y DESARROLLO DEL ALGORITMO DE ANÁLISIS PARA LOS SISTEMAS HÍBRIDOS

4.1 Metodología propuesta para el modelado de sistemas híbridos.	52
4.2 Justificación del algoritmo de análisis.	53
4.2.1 Desarrollo del algoritmo de análisis.	53
4.3 Aplicación de la metodología de modelado propuesta a un sistema de llenado de botellas	54
4.4 Aplicación del algoritmo de análisis al sistema de llenado de botellas.	70
4.5 Aplicación de la metodología de modelado propuesta al mezclado de dos sustancias químicas.	84
4.6 Aplicación del algoritmo de análisis al mezclado de dos sustancias químicas.	91

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

5.1 Conclusiones.	95
5.2 Perspectivas.	95

APÉNDICE A. Guía para el usuario del programa computacional basado en el algoritmo formulado para el análisis de sistemas híbridos	A-1
---	------------

APÉNDICE B. Manual del usuario del programa Model Vision Studium	B-1
---	------------

BIBLIOGRAFÍA	BIB-1
---------------------	--------------

RESUMEN

Los sistemas dinámicos híbridos han atraído considerable atención en los años recientes. En general, los sistemas dinámicos híbridos son aquellos que combinan dinámicas continuas y discretas, por lo que dicha dinámica se representa por variables de estado continuas y discretas. Desde el punto de vista de la ingeniería, un sistema híbrido es una red de dispositivos digitales y análogos o bien un dispositivo digital que interactúa en un ambiente continuo. En cualquier momento en que un dispositivo digital interactúe con el mundo continuo, el comportamiento involucra fenómenos híbridos que necesitan ser analizados y entendidos. Toda vez que un programa de computadora dependa de los valores que tomen ciertas variables continuas, será necesaria la utilización de metodologías para el análisis de los sistemas híbridos que garanticen la exactitud del programa, de hecho la verificación de tales programas de computadora ha sido una de las metas principales de muchas investigaciones de sistemas híbridos en la literatura. En nuestro caso nos enfocaremos al área de control y no a la de computación. Así en la ingeniería de control motivados por los avances rápidos en la tecnología moderna de los controladores digitales, los sistemas dinámicos híbridos son objeto de creciente relevancia e importancia. Sin embargo, actualmente no hay una teoría cualitativa sistemática para los sistemas dinámicos híbridos.

En este trabajo de investigación se propone una metodología para efectuar el modelado de sistemas híbridos, basada en el modelo del autómata híbrido. Posteriormente, se presenta un algoritmo de análisis que describe las propiedades que se deben cumplir para el buen funcionamiento del sistema. Por último, el algoritmo propuesto es implementado en un programa computacional, a fin de simular el comportamiento de sistemas híbridos desacoplados.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta una breve introducción acerca de los sistemas híbridos, así como las diferentes líneas de investigación sobre dichos sistemas. Posteriormente se expone la justificación, objetivo, alcance y organización de esta tesis.

CAPITULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes

El término “híbrido” significa, en general, heterogéneo en su naturaleza o composición. El término “sistema híbrido” es usado para definir una clase de sistemas con comportamientos definidos por entidades o procesos de distintas características. Los sistemas híbridos que son de interés en este trabajo de tesis son una clase de sistemas dinámicos donde el comportamiento a analizar es definido por la interacción de dinámicas continuas y discretas. Estos sistemas contienen típicamente variables o señales que toman valores de manera continua (ej. un conjunto de números reales) y variables discretas que toman valores dentro de un conjunto finito de posibilidades (ej. el conjunto de símbolos {a, b, c}) [22].

Un sistema es una colección de componentes interconectados en los cuales hay un conjunto especificado de variables dinámicas e independientes llamadas entradas y un conjunto de variables dependientes llamadas salidas. El concepto de sistema no está limitado a los sistemas físicos, sino que puede ser extendido a fenómenos dinámicos abstractos, tales como aquellos encontrados en economía, transportación, población, crecimiento y biología.

Un sistema es llamado dinámico si éste presenta salidas que dependen de entradas y salidas anteriores. Si la salida actual depende sólo de la entrada actual, entonces el sistema es considerado estático. La salida de un sistema estático permanece constante si la entrada no cambia.

Existen muchas razones para usar modelos híbridos para representar el comportamiento dinámico de tales sistemas. Una razón importante es la reducción de complejidad del modelo en orden, por ejemplo, en lugar de tener que representar las

relaciones dinámicas a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior, se puede representar el mismo sistema por un conjunto de ecuaciones simples (por ejemplo ecuaciones lineales), obteniendo así modelos simples mediante una logística de conmutación entre dichos modelos, usualmente la teoría de grafos; esta es la teoría más común en el modelado físico de fenómenos. En control, la conmutación entre sistemas dinámicos simples ha sido usada en la práctica por muchas décadas. Los esfuerzos recientes en la investigación de sistemas híbridos típicamente se centran en el análisis del comportamiento dinámico de los mismos y tienen como meta el diseño de controladores con una estabilidad y funcionamiento garantizados [22].

La mayoría de los procesos industriales se pueden considerar sistemas dinámicos ya que sus salidas dependen de entradas y salidas anteriores. En la mayoría de las industrias existen procesos que pueden ser del tipo continuo, tipo discreto y los que combinan ambos aspectos. Éstos últimos dan lugar a lo que se conoce como sistemas dinámicos híbridos. Durante su operación, siempre será importante el poder realizar un análisis y evaluación del desempeño de los procesos actuales para verificar si éstos cumplen las especificaciones de acuerdo a lo planeado. También, es importante el contar con una herramienta para realizar la modelación de dichos sistemas. Esta herramienta debe auxiliar en la realización de una simulación del modelo del proceso obtenido, con el fin de conocer y entender su comportamiento ante diferentes condiciones o variaciones en la operación [33].

Sin embargo, en la actualidad, la mayoría de los métodos y herramientas utilizadas para el análisis, modelación y simulación de procesos se encuentran orientados ya sea a procesos continuos, o bien, a procesos basados en eventos discretos. La limitación de estas metodologías y herramientas aparece cuando se aplican a un proceso con características continuas y discretas, por ejemplo: los procesos batch donde en general no se puede realizar una simulación en la cual se observe explícitamente la evolución dinámica tanto de la entidad discreta como de la entidad continua así como la interacción que existe entre ambas entidades.

Aunque se piense en el estudio de sistemas híbridos como un área individual de control relativamente nueva, muchos de los tipos de sistemas que caen dentro de esta categoría ya han sido estudiados con anterioridad, algunos campos de estudio importantes que son antecedentes a los sistemas híbridos son control bang-bang, control en modo deslizante, control digital y control de estructura variable [22].

1.2 Diferentes enfoques en el modelado de sistemas híbridos

Al observar la literatura, salta a la vista que existen muchos enfoques para el modelado, análisis y síntesis de los sistemas híbridos. Éstos pueden caracterizarse y describirse con referencia a varias dimensiones. En términos generales, los enfoques difieren en lo relativo al énfasis en las dinámicas continuas y discretas o en la complejidad de las mismas, y en cuanto a si enfatizan los resultados de análisis y síntesis, sólo el análisis o únicamente la simulación. En un extremo del espectro se encuentran los enfoques en los que se abordan los sistemas híbridos que representan extensiones de ideas teóricas de sistemas para los sistemas que se describen por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias para incluir tiempo y variables discretas que presentan saltos, o extender los resultados a sistemas conmutados. Típicamente, estos enfoques son capaces de manejar dinámicas continuas complejas y enfatizan los resultados de estabilidad. En el otro extremo del espectro, hallamos enfoques a los sistemas híbridos que están incorporados a los modelos y métodos de la ciencia computacional, que representan extensiones de las metodologías de verificación de los sistemas discretos a los sistemas híbridos. Típicamente, estos enfoques son capaces de manejar dinámicas discretas complejas descritas por autómatas finitos y enfatizan los resultados de análisis (verificación) y las metodologías de simulación. Existen metodologías adicionales que comprenden el resto del espectro, las cuales combinan conceptos de los sistemas de control continuo descritos por ecuaciones diferenciales o de diferencia lineales y no lineales y el control supervisorio de los sistemas de eventos discretos que son descritos por autómatas finitos y redes de Petri [2].

Existen analogías entre ciertos enfoques actuales para las metodologías de sistemas de control híbrido y de control digital. Específicamente, en el control digital, podría

llevarse el diseño de control al dominio del tiempo continuo, entonces aproximar o emular el controlador mediante un controlador discreto e implementarlo usando una interfaz consistente en un muestreador y un dispositivo de retención (A/D y D/A, respectivamente). Como alternativa, podríamos obtener primero un modelo discreto de la planta tomada junto con la interfaz y entonces llevar el diseño del controlador al dominio discreto. En los sistemas híbridos, de manera análoga al último caso, podríamos obtener un modelo de evento discreto de la planta junto con la interfaz usando autómatas o redes de Petri; entonces se diseña el controlador usando metodologías de supervisión de sistemas de eventos discretos [2].

Se han empleado diferentes paradigmas matemáticos para modelar sistemas híbridos que revelan la diversidad de las investigaciones. En [38] Tavernini usó autómatas diferenciales, en [26] Nerode *et al.* adoptaron un enfoque teórico de autómatas para los sistemas compuestos de ecuaciones diferenciales ordinarias en interacción y autómatas finitos, en [3] Antsaklis *et al.* adoptaron un enfoque de sistemas dinámicos de eventos discretos; en [9] Brockett combinó las ecuaciones diferenciales ordinarias y los fenómenos discretos para describir sistemas de movimiento, en [10] Back *et al.* proporcionan un marco de referencia adecuado para la simulación numérica. En [4] Alur *et al.* usaron autómatas híbridos, una extensión de los autómatas temporizados [5], y en [11] Benveniste propuso un marco de referencia de comportamiento de modelado de sistemas híbridos con énfasis en la naturaleza de composición y el uso de tiempo multiforme.

En el trabajo realizado por Ye *et al.* en [39], se presenta un modelo que es adecuado para el análisis cualitativo de sistemas dinámicos híbridos. Se define la noción de un conjunto no variante y varios tipos de conceptos de estabilidad (similares a los de Lyapunov) para el conjunto no variante. Se establecen condiciones suficientes para la estabilidad uniforme, la estabilidad asintótica, la estabilidad exponencial y la inestabilidad. Se establecen también condiciones necesarias (teoremas conversos) para algunos de los tipos anteriores de estabilidad. Además, se dan condiciones suficientes para la condición de frontera uniforme de los movimientos de los sistemas híbridos (estabilidad de

Lagrange). Los ejemplos incluyen sistemas de control con retroalimentaciones de datos muestreados, sistemas con efectos de impulso y sistemas conmutados.

En [8] Branicky presenta algunas herramientas de análisis para los sistemas conmutados e híbridos. En particular, se usan funciones múltiples de Lyapunov para el análisis de estabilidad de los sistemas conmutados y se usan sistemas de funciones iterativas para la estabilidad de Lagrange.

En [20] Johansson *et al.* presentan un enfoque computacional para el análisis de estabilidad de los sistemas no lineales e híbridos. La búsqueda de una función de Lyapunov cuasi cuadrática se formula como un problema de optimización convexa en términos de desigualdades de matriz lineal.

En [28] Pettersson *et al.* presentan las cuestiones de estabilidad y robustez de los sistemas híbridos, con base en la teoría de Lyapunov.

En [34] Stiver *et al.* introducen un modelo que describe una planta continua y un controlador de eventos discretos junto con una interfaz. Se emplea una descripción de autómeta de sistemas de eventos discretos para describir a la planta junto con la interfaz y se usa para analizar el sistema de control híbrido. Se introduce la noción de determinismo y se define la controlabilidad para sistemas de control híbrido y se usa para obtener un método para el diseño del controlador. Usando el mismo modelo, se ha desarrollado un método de base no variante para el diseño del control. Este método está basado en las invariantes naturales de la parte continua.

En [36] Titus *et al.* estudian el diseño de control para una clase de sistemas híbridos con dinámicas continuas descritas por integradores puros. Aunque esta clase de sistemas híbridos es muy limitada, estos modelos son muy importantes para el control de procesos por lotes. El trabajo presenta una noción de controlabilidad y propone un análisis de controlabilidad que se formula como un problema de alcanzabilidad (reachability). El análisis está basado en un modelo de autómeta híbrido, y el marco de referencia consiste de una planta híbrida y un controlador híbrido que interactúan en forma de retroalimentación.

En [31] Raisch y O'Young siguen también un enfoque basado en los sistemas de eventos discretos. El trabajo aborda el problema en el que una planta continua habrá de ser controlada vía retroalimentación simbólica. El problema híbrido se traduce primero a un problema puramente discreto aproximando el modelo de la planta continua mediante una máquina de estado finito no determinística. Tomando en cuenta las mediciones pasadas y los símbolos de control, puede aumentarse la exactitud de la aproximación y ajustarse a los requisitos de especificación. La teoría de control supervisorio para sistemas de eventos discretos se aplica entonces para hallar el controlador óptimo el cual imponga las especificaciones.

En [27] Nerode y Kohn propusieron una Arquitectura de Control Híbrido de Agente Múltiple como sistema de software para la implementación en tiempo real de controladores distribuidos. La arquitectura está basada en los principios de control declarativo, programación concurrente y sistemas híbridos dinámicos. La acción de control de cada agente se determina resolviendo un problema de optimización que es convexo. En [26] Nerode y Kohn consideran el problema de encontrar un estimado no sesgado del estado de la planta dados datos que son dinámicos, ruidosos y en una multiplicidad de representaciones. Este enfoque no pretende transformar los datos a una representación común. Se establece un marco de referencia llamado Arquitectura de Estimación Híbrida de Agente Múltiple, el cual permite que datos heterogéneos fluyan entre agentes individuales en la red para mejorar sus estimaciones individuales del estado actual de la planta.

En [24] Lygeros *et al.* presentan una metodología para diseñar controladores híbridos para sistemas multiagentes a gran escala, basada en el control óptimo y la teoría de juegos. El diseño híbrido es visto como un juego entre dos jugadores: el control, que ha de ser elegido por el diseñador, y las perturbaciones que codifican las acciones de los demás agentes, es decir, las acciones de controladores de alto nivel o perturbaciones ambientales no modeladas. Los dos jugadores compiten para llegar a obtener las propiedades que satisfagan al lazo cerrado del sistema híbrido. El control "gana" el juego si puede mantener el sistema seguro para cualquier perturbación permisible. La solución al problema de la

teoría de juegos proporciona al diseñador controladores continuos así como conjuntos de estados seguros en los que el control “gana” el juego. Los conjuntos de estados seguros se usan para construir una interfaz al dominio discreto y garantizan la operación segura del sistema híbrido combinado. Este enfoque ha sido usado en el manejo de tráfico aéreo y en el control de sistemas automatizados para autopistas..

En [23] Lemmon y Antsaklis proporcionan una comprensión de la integración de los autómatas temporizados y los métodos robustos de control para el control de sistemas dinámicos complejos. Se presentan los resultados recientes en la ciencia computacional y las comunidades de control robusto y la integración de estos métodos se usan para estudiar la estabilidad y el desempeño de las fronteras de amplitud de los sistemas conmutados.

Los autómatas temporizados y los autómatas híbridos han sido usados por varios investigadores para el modelado y verificación de los sistemas híbridos. En [5] Alur y Dill propusieron autómatas temporizados para modelar el comportamiento de los sistemas de tiempo real en el tiempo. Los autómatas temporizados se estudian desde la perspectiva de la teoría del lenguaje formal. La teoría se aplica a la verificación automática de los requisitos de tiempo real de las máquinas de estado finito. En [6] Alur *et al.* introdujeron el marco de referencia de autómatas híbridos como un modelo y el lenguaje de especificación para sistemas híbridos. Los autómatas híbridos pueden visualizarse como una generalización de los autómatas temporizados, en la cual el comportamiento de las variables está modelado en cada estado por un conjunto de ecuaciones diferenciales. Se muestra que el problema de alcance no puede decidirse incluso para clases muy restringidas de autómatas híbridos. Se presentan dos procedimientos para verificar las propiedades de seguridad de los autómatas híbridos cuasi lineales, en el cual todas las variables cambian a velocidades constantes.

En [29] Puri y Varaiya presentan dos métodos para la verificación de sistemas híbridos. El formalismo de modelado usado es el de los autómatas híbridos. La verificación está basada en abstraer la dinámica continua del sistema híbrido mediante dinámicas continuas más simples. En el primer método, se reemplaza una inclusión diferencial con una inclusión diferencial más simple; en el segundo método el autómata híbrido se abstrae por medio de un autómata temporizado. La metodología se ilustra mediante un ejemplo de

controlador de tren - compuerta. En [40] Desphande y Varaiya usan autómatas finitos no determinísticos para modelar el comportamiento discreto e inclusiones diferenciales para modelar el comportamiento continuo de los sistemas híbridos. Viabilidad se refiere a la capacidad del sistema para realizar un número infinito de transiciones discretas y puede usarse para expresar las propiedades de seguridad y bondad sobre las trayectorias de estado del sistema. Para asegurar la viabilidad, la evolución del sistema debe restringirse de manera que las transiciones discretas ocurran dentro de subconjuntos específicos de sus condiciones de habilitación conocidas como núcleo de viabilidad. Se dan los resultados correspondientes a las propiedades de continuidad del núcleo de viabilidad y se establecen las condiciones bajo las cuales ésta puede computarse en un número finito de pasos. Por último, se diseña un controlador híbrido que produce todas las trayectorias viables.

En [18] Henzinger presenta una metodología para analizar algorítmicamente sistemas híbridos no lineales traduciéndolos primero a autómatas híbridos lineales, y entonces usando herramientas de verificación de modelos automatizados. En un autómata híbrido lineal, el ambiente analógico se divide en un número finito de clases de modo que, dentro de cada clase, las variables analógicas estén regidas por inclusiones diferenciales poliédricas constantes. Se presentan dos métodos de conversión. En el primero, llamado conversión de reloj, se reemplaza, cuando es posible, las restricciones a las variables no lineales por restricciones a las variables con una derivada constante igual a uno. Este método es eficiente pero tiene una aplicabilidad limitada. El segundo método, de aproximación de plano fase lineal, sobreaproxima conservadoramente el plano de fase de un sistema híbrido no lineal usando inclusiones diferenciales poliédricas constantes.

Se han propuesto numerosas herramientas de simulación para la simulación, verificación e implementación de los sistemas híbridos. SHIFT, propuesto por [12] es un lenguaje de programación para describir redes dinámicas de autómatas híbridos. Los modelos de SHIFT ofrecen el nivel apropiado de abstracción para describir aplicaciones complejas como los sistemas automatizados para autopistas cuya operación no puede ser capturada fácilmente por los sistemas convencionales. En [17] Henzinger y Ho propusieron HYTECH como una herramienta automática para analizar sistemas híbridos. En [13] Daws *et al.* desarrollaron KRONOS como plataforma de verificación para sistemas complejos en tiempo real. Taylor y

Kebede en [37] desarrollaron herramientas en MATLAB para el modelado y simulación de sistemas híbridos. Inihov *et al.* en [19] desarrollaron el programa *Model Vision Studium* como una herramienta para la investigación numérica de sistemas híbridos. Dicho programa utiliza la tecnología de programación orientada a objetos, lo que hace que sea una herramienta amigable y fácil de usar.

1.3 Justificación

Debido a la complejidad y a la diversidad de los sistemas híbridos, es muy difícil que una herramienta se pueda aplicar a cualquier sistema y conservar las mismas ventajas y propiedades. Por esta razón, actualmente no existe una herramienta o metodología general y sistemática para la modelación de sistemas híbridos, como las existentes en la industria de manufactura o procesos. Es importante encontrar una metodología óptima que permita la modelación, análisis y simulación de un sistema híbrido.

1.4 Objetivo de la investigación

Desarrollar y establecer una metodología por medio de la cual se pueda realizar la modelación, análisis y simulación de un sistema con entidades continuas y discretas (híbrido).

1.5 Alcance de la tesis

Esta tesis tiene como alcance los siguientes puntos:

- 1.- Formular una metodología de modelado que sirva como punto de partida para la realización de trabajos similares.
- 2.- Aplicar la metodología en el modelado de un sistema híbrido.
- 3.- Establecer un algoritmo de análisis para sistemas híbridos e implementarlo computacionalmente.

1.6 Organización de la tesis

Esta tesis ha sido desarrollada en cuatro capítulos, de los cuales se da una breve descripción a continuación.

En el Capítulo 2 se definen los conceptos básicos de la teoría del autómata, introduciendo el autómata finito, así como su relación con otros tipos de autómatas hasta llegar a la definición formal de autómata híbrido, propiedades y características.

En el Capítulo 3 se presenta la modelación de la dinámica continua y discreta para los sistemas híbridos. Lo anterior se ilustra mediante ejemplos. Posteriormente se presentan los conceptos generales para el análisis de sistemas híbridos desacoplados y se establecen las condiciones necesarias y suficientes para la validación de las transiciones discretas finalizando con el análisis de los sistemas híbridos acoplados.

En el Capítulo 4 se define una metodología para llevar a cabo el modelado de dichos sistemas. Posteriormente se aplica dicha metodología a un proceso. Se desarrolla un algoritmo de análisis para los sistemas híbridos con dinámicas continuas desacopladas y se realiza su validación mediante la aplicación de ejemplos. Se realiza una extensión del algoritmo a sistemas con dinámicas continuas acopladas. Al final, basándonos en el algoritmo, se ha desarrollado un programa computacional para el análisis de sistemas híbridos con dinámicas continuas desacopladas.

Al final de esta memoria se presentan las conclusiones y perspectivas de investigación.

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE AUTOMATAS

En este capítulo se presentan los conceptos básicos sobre el origen del modelo del autómata híbrido. Posteriormente se da una definición formal de dicho modelo, sus propiedades y el tipo de representación que se utiliza en esta tesis.

CAPITULO 2

TEORÍA DEL AUTOMATA

El modelo el autómata finito es un modelo de base para representar las dinámicas discretas de los sistemas y su interacción con el medio. Como este modelo estaba muy limitado para algunas aplicaciones, se hizo una ampliación del mismo introduciendo la variable de tiempo en los estados discretos. Aún mas, debido a la creciente demanda de modelos más exactos y generales para los diferentes sistemas que tenían en su estructura fenómenos tanto discretos como continuos, se realizó una extensión del autómata finito agregando aparte del tiempo en los estados discretos, ecuaciones continuas lo que dió lugar al modelo del autómata híbrido [14].

Muchos cambios en las estructuras de los sistemas tienen que enfrentarse a discontinuidades en sus dinámicas. Estos cambios pueden ser causados por eventos discretos generados por actuadores, sensores ó por otros procesos discontinuos inherentes a la dinámica del mismo. En general, los sistemas donde interactúan componentes discretos y continuos son llamados sistemas híbridos. Diferentes modelos han sido propuestos para representar estas dinámicas híbridas. Aquí trataremos el modelo del autómata híbrido [7].

El modelo del autómata híbrido está basado en una representación explícita tanto de las dinámicas continuas del sistema como de las discretas. Las dinámicas continuas se representan por modelos de estados mediante ecuaciones diferenciales que las describen. Las dinámicas discretas se representan mediante el modelo del autómata finito, donde se observa explícitamente la lógica de conmutación del mismo [14].

Con la finalidad de profundizar en la descripción de nuestro modelo, seguidamente se introduce el concepto de autómata discreto o finito y su evolución natural hasta el autómata híbrido.

2.1 Introducción al modelo del Autómata finito

2.1.1 Conceptos básicos

Grafos

Un grafo (Figura 2.1), denotado por $G = (V, E)$ consiste en un conjunto finito de vértices o nodos V y un conjunto de pares de vértices E llamados aristas. Una trayectoria en un grafo es una secuencia de vértices $v_1, v_2, \dots, v_k, k \geq 1$, tal que existe un arista (v_i, v_{i+1}) para cada $i, 1 \leq i \leq k$ [21].

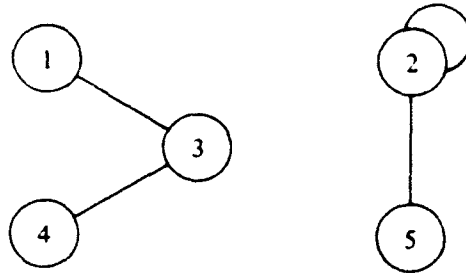


Figura 2.1. Ejemplo de un grafo.

Grafos dirigido

Un grafo dirigido o dígrafo (Figura 2.2) $G = (V, E)$, consiste en un conjunto finito de vértices V y un conjunto de *pares ordenados* de vértices E , llamados arcos. Denotamos un arco de v a w como $v \rightarrow w$. Una trayectoria en un dígrafo es una secuencia de vértices $v_1, v_2, \dots, v_k, k \geq 1$, tal que $v_i \rightarrow v_{i+1}$ es un arco para cada $i, 1 \leq i \leq k$. Decimos que la trayectoria es desde v_1 a v_k . Así pues, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ es una trayectoria de 1 a 4 en el dígrafo de la Figura 2.2 [21].

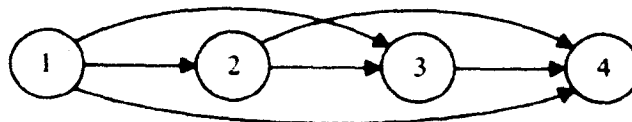


Figura 2.2. Grafo dirigido.

2.1.2 Sistemas de estados finitos

El autómata finito es un modelo matemático para un sistema de estados de entradas y salidas discretas. El sistema puede estar en cualquiera de un número finito de estados. El estado del sistema resume la información concerniente a entradas anteriores y que es necesaria para determinar el comportamiento del sistema para entradas posteriores. El mecanismo de control de un elevador es un buen ejemplo de un sistema de estados finitos. El mecanismo no recuerda todas las demandas previas de servicio, sino solo el piso en el que se encuentra, la dirección de movimiento (hacia arriba o hacia abajo) y el conjunto de demandas de servicio aún no satisfechas [21].

En las ciencias computacionales encontramos muchos ejemplos de sistemas de estados finitos, donde la teoría de autómatas finitos es una herramienta útil en el diseño de tales sistemas. Un primer ejemplo es un circuito de interrupción, como la unidad de control de una computadora. Un circuito de interrupción está compuesto por un número finito de compuertas, cada una de las cuales puede estar en una de dos condiciones, por lo general denotadas por 0 y 1. Estas condiciones podrían, en términos electrónicos, ser dos niveles de voltaje distintos en la compuerta de salida. El estado de una red de interrupción con n compuertas es, por lo tanto, una de las 2^n asignaciones de 0 y 1 para las diferentes compuertas. Aunque el voltaje en cada compuerta pueda tomar cualquier valor de un conjunto infinito de valores, el circuito electrónico está diseñado de tal manera que solo los dos voltajes correspondientes a 0 y 1 son estables, y otros voltajes se ajustarán, casi inmediatamente, a uno de esos voltajes. Los circuitos de interrupción se diseñan intencionalmente de esta manera, de modo que puedan ser vistos como sistemas de estado finito separando por ello, el diseño lógico de una computadora de la implementación electrónica [21].

Ciertos programas utilizados con frecuencia, como los editores de texto y los analizadores de léxico que se encuentran en la mayoría de los compiladores, son diseñados como sistemas de estado finito. Por ejemplo, un analizador de léxico recorre los símbolos de un programa de computación para localizar las cadenas de caracteres correspondientes a

identificadores, constantes numéricas, palabras reservadas, etc. En este proceso el analizador de léxico necesita recordar solamente una cantidad finita de información, como qué longitud de un prefijo de una palabra reservada ha visto desde el inicio. La teoría de los autómatas finitos se utiliza mucho en el diseño de procesadores eficientes de cadenas de este tipo y de otros [21].

La computadora misma puede ser vista como un sistema de estado finito, aunque hacer eso no resulta tan útil como uno quisiera. Teóricamente, el estado del procesador central, memoria principal y almacenamiento auxiliar en cualquier instante de tiempo es uno de un gran número finito de estados. Tomar una computadora como un sistema de estado finito, sin embargo, no es realista o satisfactorio matemáticamente. Establece un límite artificial a la capacidad de memoria. Y por tanto, no es capaz de capturar la esencia real de la computación. Para captar de manera apropiada el concepto de computación se necesita una memoria potencialmente infinita, aún cuando cada instalación sea finita [7].

Antes de definir de manera formal los sistemas de estado finito, consideremos un ejemplo. En la orilla izquierda de un río se encuentra un hombre junto con un lobo, una cabra y una col. Hay un bote con la capacidad suficiente para llevar al hombre y a uno de los otros tres. El hombre, la col y sus demás compañeros deben cruzar el río y el hombre puede llevar a uno solo a la vez. Sin embargo, si el hombre deja solos al lobo y a la cabra en cualquier lado del río, con toda seguridad que el lobo se comerá a la cabra. Del mismo modo, si la cabra y la col se quedan juntas, la cabra se comerá a la col. ¿Es posible que se pueda cruzar el río sin que nada sea comido por nadie? [21].

El problema se puede modelar observando que la información pertinente está en los ocupantes de cada orilla después de cruzar. Existen 16 subconjuntos del hombre (H), el lobo (L), la cabra (G) y la col (C). Un estado corresponde al subconjunto que se encuentra en la ribera izquierda. Los estados están etiquetados por parejas separadas por un guión, por ejemplo HG-LC, en donde los símbolos que están a la izquierda del guión denotan el subconjunto que esta en la orilla izquierda del río. Los símbolos que están a la derecha del

guión representan el subconjunto que se encuentra en la orilla opuesta. Algunos de los 16 estados, como GC-HL son fatales y nunca deben accesarse al sistema [21].

Las “entradas” al sistema son las acciones del hombre. Puede cruzar solo (entrada h), con el lobo (entrada l), la cabra (entrada g) o con la col (entrada c). El estado inicial es HLGC-0 y el estado final es 0-HLGC. En la Figura 2.3 se muestra el diagrama de transición [21].

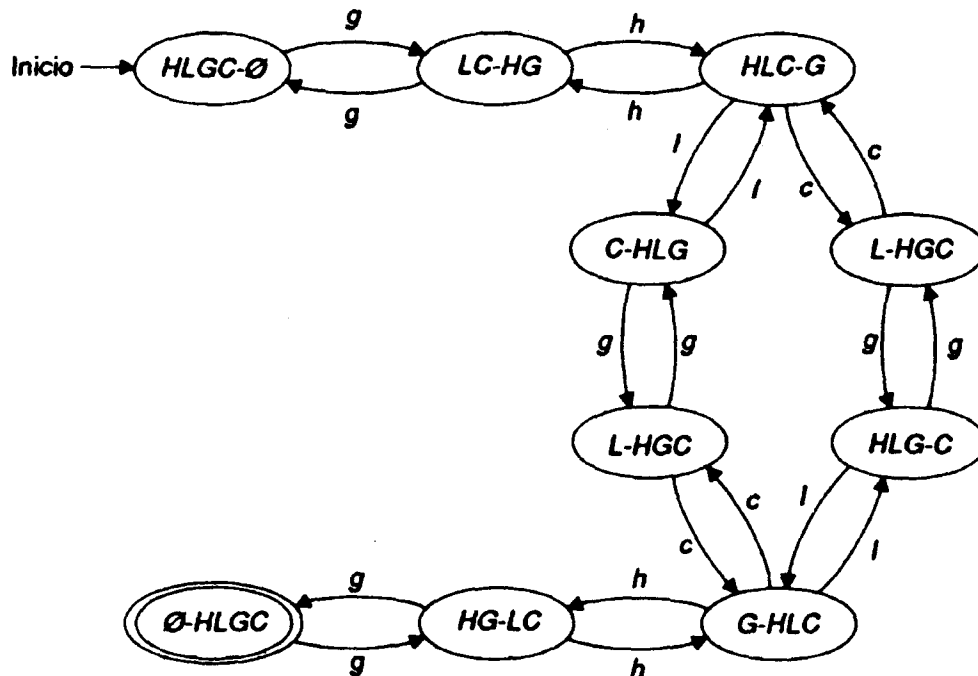


Figura 2.3. Diagrama de transiciones para el problema del hombre, el lobo, la cabra y la col.

Hay dos soluciones del problema igualmente cortas, como puede verse si se buscan las trayectorias que van del estado inicial al final (que está dentro de un círculo doble). Existe un número infinitamente grande de soluciones diferentes del problema, pero todas, con excepción de dos, involucran ciclos inútiles. El sistema de estado finito puede ser considerado como el que define a un lenguaje infinito, el conjunto de todas las cadenas que etiquetan las trayectorias que van del estado inicial al final [21].

Es necesario notar que hay, al menos, dos formas importantes en las que el ejemplo anterior es característico de los sistemas de estado finito. Primero, sólo existe un estado final; en general puede haber muchos. Segundo, sucede que para cada transición existe una transición inversa sobre el mismo símbolo, lo que no necesariamente sucede en el caso general. Nótese que el termino de estado final no significa que el cálculo debe terminar cuando se alcanza. Podríamos continuar haciendo transiciones, por ejemplo, al estado HG-LC del ejemplo anterior [21].

2.1.3 Modelo del Autómata finito

Un autómata finito (FA) consiste en un conjunto finito de estados y un conjunto de transiciones de estado a estado que se dan sobre símbolos de entrada tomados de un alfabeto Σ . Para cada símbolo de entrada existe exactamente una transición a partir de cada estado (posiblemente de regreso al mismo estado). Un estado por lo general denotado como s_0 , es el estado inicial en el que el autómata comienza. Algunos estados están designados como final o de aceptación [25].

A un autómata finito se le asocia un grafo dirigido conocido como diagrama de transiciones. Los vértices del grafo corresponden a los estados del autómata finito. Si existe una transición del estado s al p producidos por una entrada a , entonces existe un arco con etiqueta a que va del estado s al p . El autómata finito acepta una cadena x si la secuencia de transiciones correspondientes a los símbolos de x conduce del estado inicial a un estado de aceptación [25].

Denotamos formalmente a un autómata finito por el conjunto de cinco cantidades $(S, \Sigma, \delta, s_0, F)$, en el que S es un conjunto finito de estados, Σ un alfabeto de entrada finito, s_0 elemento de S y estado inicial, $F \subseteq S$ el conjunto de estados finales y δ la función de transición que transforma $S \times \Sigma$ en S . Esto es, $\delta(s, a)$ es un estado para cada estado s y símbolo de entrada a . En la representación gráfica del autómata finito (Figura 2.4) los círculos representan los estados discretos del sistema, los arcos con flechas el sentido de

las transiciones y las etiquetas sobre las flechas las condiciones de transición entre los estados [25].

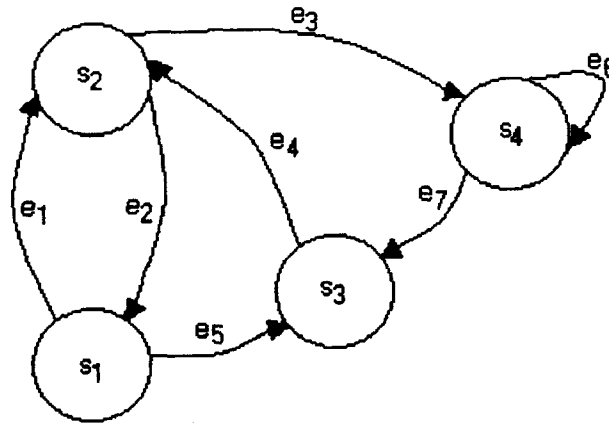


Figura 2.4. Autómata finito

2.1.4 Autómata finito determinístico

Formalmente un autómata finito determinista es una colección de cinco elementos [25]:

1. Un alfabeto de entrada Σ .
2. Una colección finita de estados S .
3. Un estado inicial s .
4. Una colección F de estados finales.
5. Una función $\delta: S \times \Sigma \rightarrow S$ que determina el único estado siguiente para el par (s_i, σ) correspondiente al estado actual y a la entrada.

La característica principal de un autómata finito determinístico es que δ es una función. Por tanto, δ se debe definir para todos los pares (s_i, σ) de $S \times \Sigma$. Esto significa que sea cual sea el estado actual y la entrada, siempre hay un estado siguiente y éste es único. En otras palabras, el estado siguiente será totalmente determinado por la información que proporciona el par (s_i, σ) . En la Figura 2.5 se muestra un autómata finito determinístico.

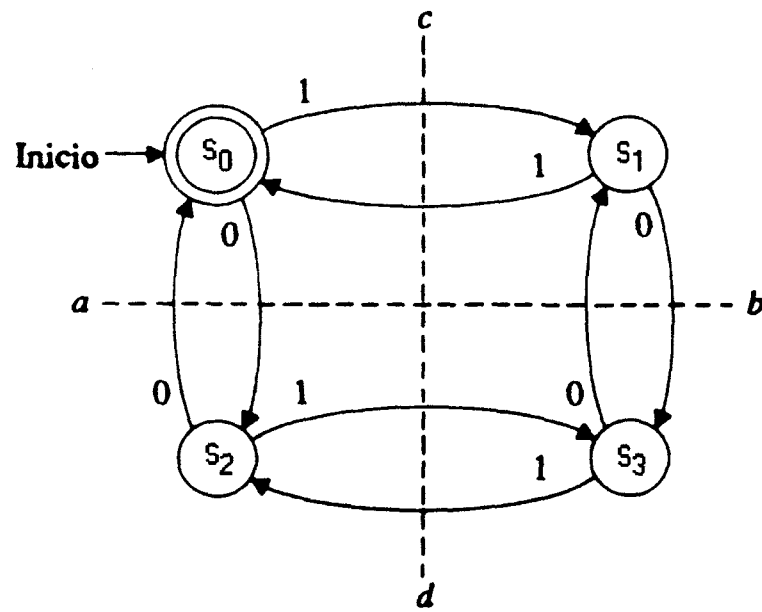


Figura 2.5. Autómata finito determinístico.

En general, el autómata finito determinístico es usado en los sistemas que involucran eventos más tangibles y no tan abstractos como la ciencia de la computación. Esta clase de autómatas son ampliamente usados en la rama de control, correspondiendo al tipo de autómata que se tratará en esta tesis.

2.1.5 Autómata finito no determinístico

Se introduce el concepto de autómata finito no determinístico, considerando que cualquier conjunto aceptado por un autómata finito no determinístico puede también, ser aceptado por un autómata finito determinístico. El concepto de no determinismo juega un papel central en las teorías de lenguaje y computación [25].

Considérese una modificación al modelo del autómata finito para permitirle ninguna, una o más transiciones de un estado sobre el mismo símbolo de entrada. Este nuevo modelo se conoce como autómata finito no determinístico. En la Figura 2.6 se muestra un diagrama de transiciones de un autómata finito no determinístico. Se observa

que existen dos aristas con la etiqueta 0 que salen del estado s_0 , uno que regresa a s_0 y otro que va al estado s_3 .

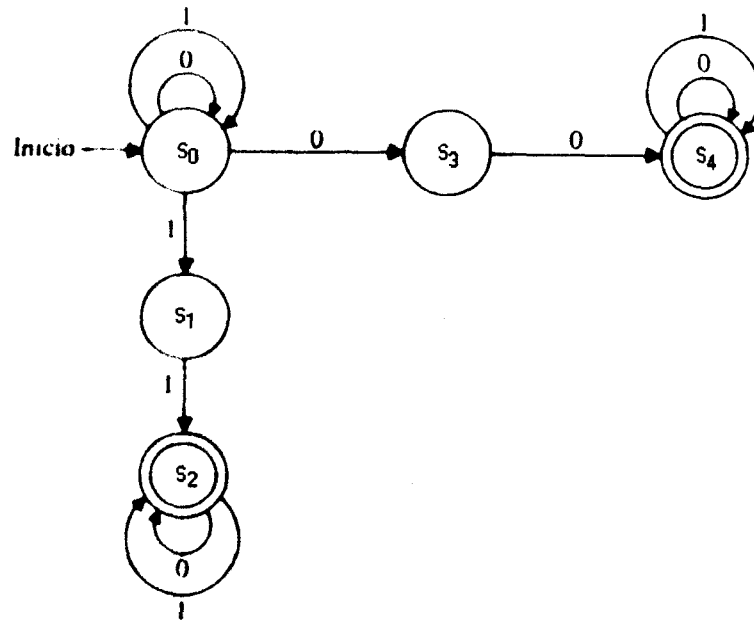


Figura 2.6. Autómata finito no determinístico.

Una secuencia de entrada a_1, a_2, \dots, a_n es aceptada por un autómata finito no determinístico si existe una secuencia de transiciones, correspondiente a la secuencia de entrada, que conduzca del estado inicial a algún estado final. Por ejemplo, 01001 es aceptado por el autómata finito no determinístico de la Figura 2.6 debido a la existencia de una secuencia de transiciones que pasa por los estados $s_0, s_0, s_0, s_3, s_4, s_4$ etiquetados con 0, 1, 0, 0, 1. Este autómata finito no determinístico en particular acepta todas las cadenas que tengan dos ceros consecutivos o dos unos. Para un autómata finito no determinístico podría haber muchas trayectorias con una misma etiqueta, y se deben verificar todas para determinar si una o más acaban en un estado final [25].

2.2 Autómata temporizado

Debido a la imposibilidad del autómata finito de considerar el tiempo como variable [5] propusieron el modelo del autómata temporizado. El autómata temporizado (Figura 2.7)

es un autómata finito al cual se le ha adicionado un conjunto finito de relojes que registran el tiempo que transcurre dentro de cada estado discreto. Dichos relojes son variables continuas que cambian a una razón constante. El valor del reloj puede ser reinicializado como parte de una acción de transición de estado. En la Figura 2.7 se presenta el modelo del autómata temporizado. En este modelo, como en el autómata finito, los estados están representados por vértices o nodos y las transiciones entre dichos estados por arcos [7]. Un autómata temporizado queda totalmente descrito por los estados discretos; los relojes que representan la dinámica continua y las transiciones [15].

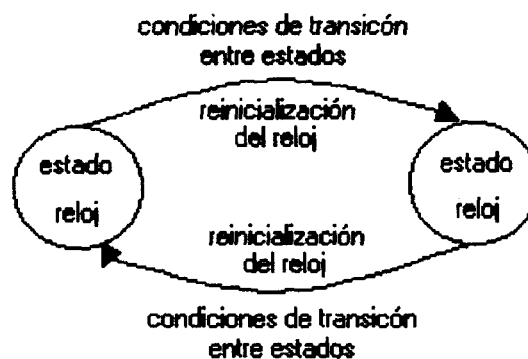


Figura 2.7. Autómata temporizado.

De manera formal un autómata temporizado es descrito por $H = (X, S, E, F, q_0)$ donde [32]:

X : Conjunto finito de relojes.

S : Conjunto finito de n localidades $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ que representan los estados discretos del sistema.

E : Conjunto finito de transiciones representadas por arcos. Estos esquematizan la transición del estado s_i al estado s_j .

F : Función tal que provee las condiciones generales para ejecutar una transición, la cual se presenta como un valor fijo para cada reloj. Por lo general tienen la forma de una igualdad.

q_0 : Representa el estado inicial tal que $q_0 \in S$.

A manera de ejemplo considere el autómata temporizado de la Figura 2.8, el cual modela un sistema monitor de nivel. En dicho modelo la variable $y(t)$ representa el nivel del agua y la variable $x(t)$ contabiliza el retraso en el encendido de la bomba. Se puede observar que $y(t)$ y $x(t)$ son relojes. El monitor tiene las siguientes especificaciones: el nivel del agua se incrementa una unidad por segundo cuando la bomba esta encendida y decae dos unidades cuando está apagada. Cuando el nivel del agua alcance el valor de 10 unidades, el monitor envía una señal de apagado a la bomba, la cual después de un retraso de 2 segundos se apaga. Si el nivel del agua decae a 5 unidades, el monitor envía una señal de encendido a la bomba, la cual después de otro retraso de 2 segundos se enciende [32].

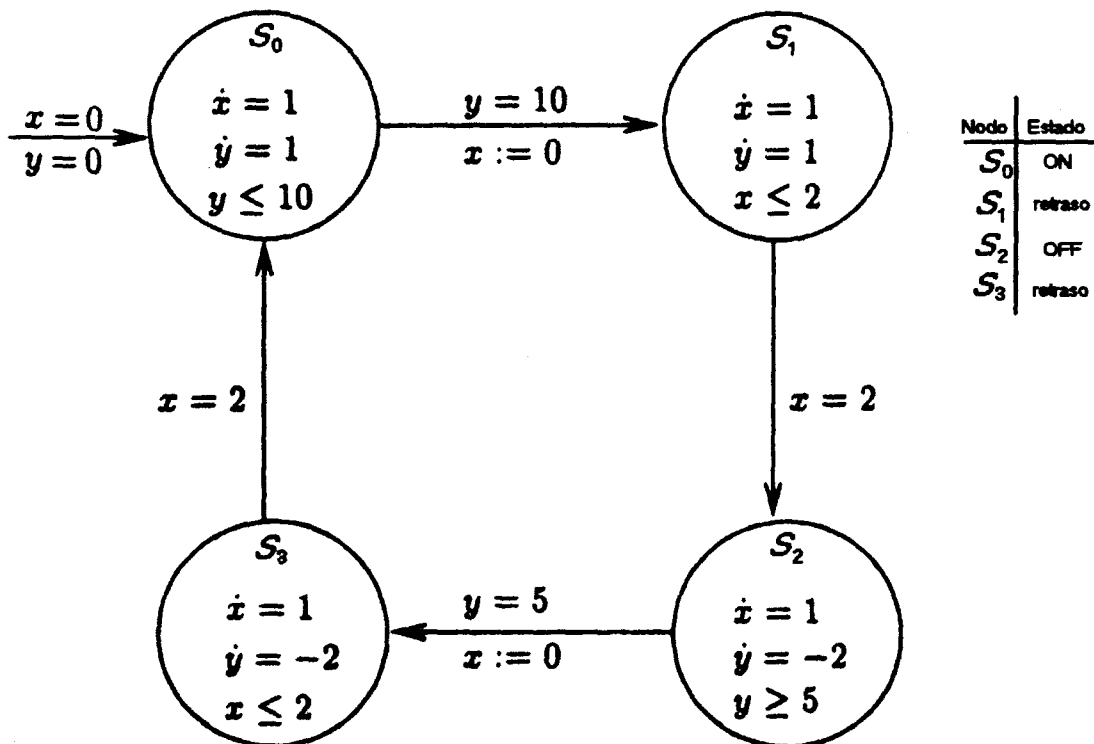


Figura 2.8 Monitor de nivel de agua modelado como un autómata temporizado.

2.3 Autómata híbrido

2.3.1 Modelo de autómata híbrido

El modelo el autómata temporizado no es suficiente cuando se desea modelar no solo la evolución temporizada de las transiciones discretas, sino la evolución de los procesos continuos afectados por eventos discretos. En este caso se debe utilizar el modelo del autómata híbrido. En este sentido, el modelo del autómata híbrido (Figura 2.9) es considerado como una generalización del autómata temporizado donde las ecuaciones diferenciales continuas, restringidas a representar dinámicas de integradores, pueden tener también representaciones de primer orden [15], [32].

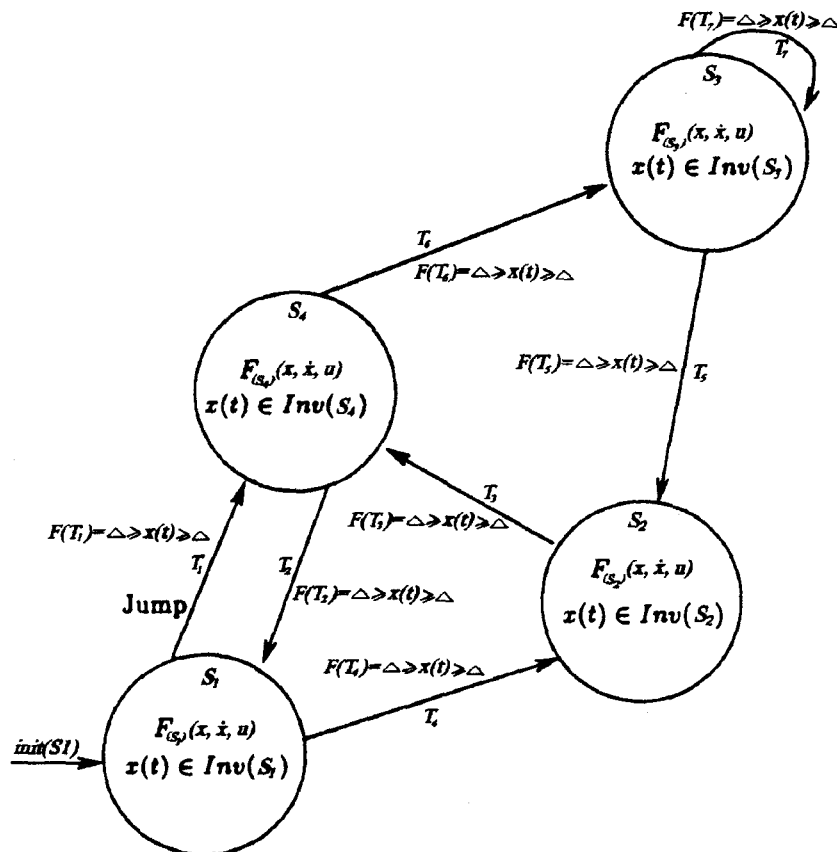


Figura 2.9. Autómata híbrido.

Los nodos de la gráfica (s_1, s_2 , llamados localidades o vértices) modelan los estados discretos del sistema y los arcos modelan el sistema de transiciones discretas. El estado continuo del sistema de transiciones discreto, es modelado por puntos en \mathbb{R}^r y en cada localidad la dinámica continua es modelada por ecuaciones de flujo generalmente bajo la forma de ecuaciones diferenciales. En la representación para cada arco deberá tener una localidad final. Consecuentemente, las localidades están conectadas por arcos. El número de localidades es finito y diferente de cero. El número de arcos también es finito y diferente de cero [15].

Un autómata híbrido [15] está definido completamente por $H = (X, S, inv, flujo, E, \Sigma, F, Aff, init)$ donde:

X (Variables): Representa un conjunto finito ordenado $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ de variables reales. El tamaño de r representa el orden del autómata.

S (Nodos): Es un conjunto finito de n localidades $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ que representan los estados discretos del sistema.

flujo (Condiciones de flujo): Funciones que asignan una condición de flujo $flujo(s_i)$ a cada localidad $s_i \in S$, donde la dinámica continua es usualmente representada por ecuaciones diferenciales.

inv (Invarianzas): Subregiones dentro del espacio de estados que limitan la evolución continua en cada estado discreto. Por lo general tienen la forma de desigualdades, definidas por:

$$a \leq x \leq b \quad (2.1)$$

donde a y $b \in \mathbb{R}$.

Una región por lo general está especificada por la relación:

$$\rho(x) > 0 \quad (2.2)$$

donde $\rho: X \rightarrow \mathcal{R}^r$. El estado x se encuentra dentro de la región, cuando la relación se cumple. Hay que notar que la igualdad en (2.2) determina hipersuperficies. Si dichas hipersuperficies son restringidas a hiperplanos, dan lugar a regiones convexas, esto se muestra en la Figura 2.10 y están definidas por:

$$\rho(x) = Ax + b > 0 \quad (2.3)$$

donde A es una matriz y b un vector.

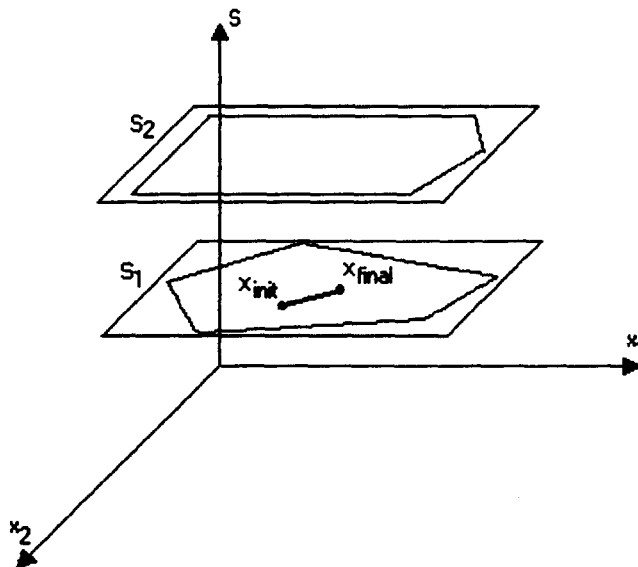


Figura 2.10. Restricciones de la evolución continua.

E (Transiciones): Conjunto finito E de saltos discretos llamados transiciones representados por arcos. Cada transición $T_0 = (s_i, s_j)$ identifica una localidad de origen y una localidad de destino.

F (Condiciones de salto): Una función etiquetada como $F(T_i)$ asigna una condición de disparo a cada transición $T_i \in E$. Esta función provee las condiciones generales para ejecutar una transición, la cual se presenta como una combinación booleana de desigualdades.

Aff (Funciones de afectación): Son funciones que modifican el punto final de salto de un estado a otro al momento en que se ejecuta una transición discreta.

Σ (Etiquetas): Conjunto de etiquetas Σ tal que para cada transición $T_i \in E$ se puede tener una entrada discreta $\sigma_i \in \Sigma$ para prohibir o autorizar la ejecución de la transición, y/o una salida discreta $\sigma_o \in \Sigma$ que se produzca al instante de la conmutación. Las etiquetas pueden ser también utilizadas para definir la composición paralela entre autómatas. Se puede interpretar la significación de σ_i y σ_o a través del esquema de la Figura 2.11.

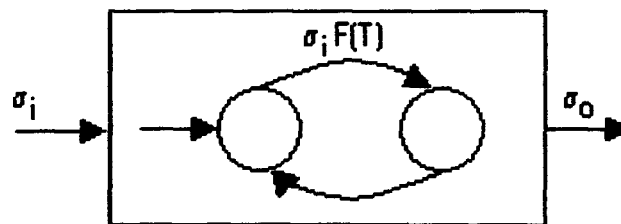


Figura 2.11. Representación de Σ .

La ausencia de una entrada discreta σ_i sobre un arco del grafo deberá ser interpretada por la condición de salto como $\sigma_i = e$, es decir, un evento que siempre ocurre.

$Init$ (Estado inicial): Función que asigna un estado inicial $x_0 \in X$ a un nodo inicial $s_i \in S$.

La condición inicial $init(s_i)$ es un predicado en X . En la representación para autómatas, la condición inicial se expresa sobre un arco que no tiene nodo de origen.

El comportamiento general de un autómata híbrido $H = (X, S, inv, flujo, E, \Sigma, F, Aff, init)$ se resume de la manera siguiente [6]:

- Un estado global de un sistema está determinado por un nodo $s \in S$ y por un estado $x \in X \subset R^r$. Así, se define un estado global como un par $q = (s, x)$. Solo se consideran los estados q tal que x satisface la invarianza del nodo $inv(s)$.
- La evolución dinámica del autómata comienza a partir de un estado global $q_0 = (s_{in}, x_0)$.
- El espacio de estados del autómata híbrido está definido por $Q \subset S \times R^r$.
- Para cada nodo, los valores de las variables cambian con el paso del tiempo en función de la ecuación de flujo continua.
- La transición discreta $T = (s, s') \in E$ puede ser ejecutada a partir de un estado q , si la condición $F(T) \cdot \sigma_i$ es verdadera.
- Los estados que resultan de la ejecución de la transición están descritos por el par $q' = (s', x')$ tal que después de la ocurrencia del evento T , x puede ser reinicializada por la función $Aff(T)$.
- La ejecución de una transición no depende del tiempo, dicho de otra manera, las transiciones son instantáneas.
- El paso del tiempo se produce en los nodos.

2.3.2 Diferentes representaciones del autómata híbrido

En general, dependiendo del sistema a modelar en particular, trabajaremos sobre las siguientes tres representaciones del autómata híbrido: el autómata híbrido lineal, autómata híbrido continuo lineal y el autómata híbrido invariante en el tiempo [15].

Un autómata híbrido H es un autómata híbrido lineal (H_L) si se cumple lo siguiente:

1. Todas las variables del autómata H son lineales.
2. Para todos los nodos $s_i \in S$, la condición inicial $init(s_i)$ y la condición de flujo $flujo(s_i)$ son convexas.
3. Para todas las transiciones $T_i \in E$, la condición de salto $F(T_i)$ es convexa.

La Figura 2.12 muestra un autómata híbrido lineal H_L de dimensión r , considerando $x(0)$, B_i , $K_i \in \mathbb{R}^r$ y $C_i \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r$.

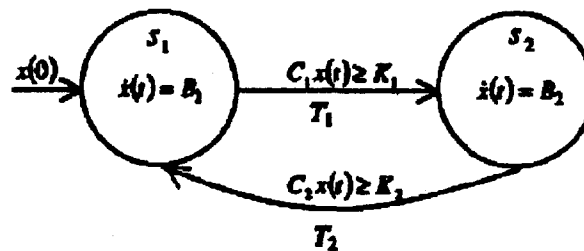


Figura 2.12. Autómata híbrido lineal con dos nodos.

El término continuo lineal es usado en el sentido de la teoría de sistemas. Consideraremos el autómata híbrido continuo lineal como el modelo general para representar las dinámicas continuas lineales en los sistemas híbridos. En este modelo, las representaciones de las ecuaciones de flujo tienen la forma de $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$.

Como en la teoría de control la mayoría de los sistemas dinámicos son modelados típicamente utilizando ecuaciones diferenciales acopladas, consideraremos las ecuaciones de flujo modeladas por ecuaciones diferenciales de primer orden de dimensión- r .

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (2.4)$$

En (2.4), x es el vector de estado continuo que toma valores en un subconjunto del espacio Euclidiano y, $f(t, x, u)$ es un campo de vectores de control. Consideraremos el vector de estado $x \in X \subseteq \mathfrak{R}^r$ y el vector de entradas de control $u \in U \subseteq \mathfrak{R}^m$. El tamaño r de x se le conoce como la dimensión del autómata y el tamaño m de u es el tamaño de las entradas de control. De esta manera se define $x = [x_1 \dots x_r]^T$, $u = [u_1 \dots u_m]^T$ y $f(t, x, u) = [f_1(t, x, u) \dots f_2(t, x, u)]^T$. Consecuentemente, las ecuaciones continuas lineales de flujo pueden modelarse considerando $f(t, x, u) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ como el campo de vectores a ser controlado. Aquí $A(t)$ y $B(t)$ son matrices en $\mathfrak{R}^r \times \mathfrak{R}^r$ y $\mathfrak{R}^r \times \mathfrak{R}^m$ respectivamente.

Un autómata híbrido es continuo lineal (H_{CL}) si se cumple lo siguiente:

1. Para todos los nodos $s_i \in S$ la condición inicial $init(s_i)$ es convexa.
2. La condición de flujo $flujo(s_i)$ es lineal continua. Esto es que los coeficientes de las ecuaciones de estado cambian con respecto al tiempo.
3. Para todas las transiciones la condición de salto $F(T_i)$ es convexa.

Un autómata híbrido es invariante en el tiempo (H_I) si se cumple lo siguiente:

1. Para todos los nodos la condición de flujo $flujo(s_i)$ es invariante en tiempo, es decir los coeficientes de la ecuación de estado no varían con respecto al tiempo.

2. Para toda transición $T_i \in E$, la condición de salto $F(T_i)$ es invariante en el tiempo.

Se define un autómata híbrido continuo lineal invariante en el tiempo H_{CLI} a todo autómata que cumpla con las definiciones anteriores.

2.3.3 Autómata híbrido lineal invariante en el tiempo (H_{CLI})

La representación que nos interesa, y la que va a ser utilizada para la modelación y el análisis de los sistemas híbridos, es la del autómata híbrido lineal invariante en el tiempo. Definimos un autómata híbrido lineal invariante en el tiempo haciendo que $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ sea la ecuación de estado continua en cada localidad o nodo del autómata híbrido, donde A y B son la matriz y el vector de constantes respectivamente. Informalmente, un autómata lineal invariante en el tiempo puede ser visto como una generalización del autómata híbrido lineal no acoplado con matriz A no diagonal [15].

Para el caso en que el comportamiento de un autómata híbrido H_{CLI} tienda a una estructura cíclica, esto es, que exista un ciclo límite; éste se puede representar como un autómata temporizado. Esto se logra haciendo que el tiempo de residencia dentro de cada nodo, sea la condición de salida del mismo. El concepto de tiempo de residencia será explicado en la sección de análisis de sistemas híbridos [15].

Seguidamente en el Capítulo 3, se presentan los conceptos relacionados a la modelación y análisis de los sistemas híbridos.

CAPÍTULO 3

MODELACIÓN Y ANÁLISIS DE SISTEMAS HÍBRIDOS

En este capítulo se exponen los conceptos sobre el modelado de sistemas híbridos usando el modelo del autómata híbrido. Se establecen condiciones necesarias y suficientes para la validación de las transiciones discretas y se presente el análisis de sistemas híbridos acoplados y desacoplados.

CAPITULO 3

MODELACIÓN Y ANÁLISIS DE SISTEMAS HÍBRIDOS

En la representación de un sistema es necesario entender y modelar correctamente las entradas, los elementos que lo componen y las interrelaciones de los mismos. Si estos son modelados correctamente, entonces los resultados obtenidos en las salidas serán correctos. Cuando se intenta modelar un sistema, debe hacerse un compromiso entre la simplicidad del modelo y la precisión de los resultados del análisis. Aquí reside el problema común de la modelación: el incluir lo suficiente de la actividad del sistema para desarrollar un modelo preciso y al mismo tiempo mantener el modelo lo suficientemente simple como para permitir por medios factibles determinar las salidas. Un modelo es una representación o abstracción de la realidad que muestra las relaciones entre causa y efecto, entre objetivos y restricciones. Debe tomarse en cuenta que un modelo no puede representar todos los aspectos de la realidad porque es únicamente una aproximación del objeto real o situación y que los modelos más fáciles de resolver son también los más fáciles de comprender y aplicar. Si embargo, si el modelo se simplifica hasta el grado en donde ya no representa el mundo real, este proporcionará resultados erróneos o engañosos. Si una gran precisión no es necesaria, entonces es preferible desarrollar solamente un modelo razonablemente simplificado [1],[33].

Un análisis es la separación de un objeto en las partes o elementos que lo constituyen en un esfuerzo por clarificar o engrandecer el entendimiento de ese objeto. Si el objeto es un sistema, esta definición puede ser extendida. El análisis de un sistema incluye la determinación de su desempeño, comportamiento o respuesta a un conjunto dado de entradas que son aplicadas bajo cierta configuración [1].

Para efectuar el análisis del comportamiento de un sistema, debe formularse un modelo adecuado. Debe notarse que la determinación de las salidas de un sistema no concluye el problema. Debe procederse más allá de la solución de un conjunto de ecuaciones o de las pruebas efectuadas al modelo. El proceso de análisis también demanda

la interpretación de resultados y el establecimiento de conclusiones de valor, comúnmente la respuesta a un problema no es tan importante como la razón para esa respuesta en particular [1].

3.1 Problema de la modelación

Los sistemas híbridos modelan las interacciones de elementos lógicos con sistemas continuos. Esto involucra una variedad de disciplinas matemáticas y de ingeniería, como la geometría, ecuaciones diferenciales y de diferencia, control óptimo, teoría de autómatas, sistemas de eventos discretos, estructura de datos y computación. Ésta es una línea de investigación relativamente nueva para ingenieros de control y científicos de la computación. Se necesita plantear la pregunta: ¿por que es de interés considerar nuevos modelos híbridos para describir a los sistemas que se encuentran en el área de control de procesos?. Hay muchas razones para incluir mecanismos discontinuos en los modelos de procesos continuos, por citar algunos [35]:

- Es necesario tener un modelo más explícito de las discontinuidades inherentes del proceso y por las cuales, el comportamiento continuo cambie drásticamente.
- Actuadores y sensores son a menudo fundamentalmente discontinuos.
- Los eventos discretos pueden ser una útil abstracción para modelar varios modos de conmutación, usados en la especificación y el control de los procesos continuos.

Los sistemas híbridos no sólo son difíciles de modelar sino también difíciles de analizar y simular. De hecho una teoría unificada no existe en absoluto. Actualmente es un área activa de investigación en la teoría de control e informática pero una teoría totalmente madura puede tardar más años en venir [8].

3.2. Modelación de la dinámica continua y discreta en los sistemas híbridos

Ahora se procederá a discutir varias características en las aplicaciones de control de procesos que son relevantes desde el punto de vista del modelado de sistemas híbridos. El control de procesos al que nos enfocaremos concierne principalmente a los procesos de manufactura que tratan con flujos de material continuos o tipos batch. Típicamente, éste material pasa a través de diferentes tratamientos, por ejemplo, calentamiento, enfriamiento, mezclado, reacción, separación, etc. Ejemplos de este tipo de sistemas pueden ser encontrados en la industria petroquímica, en la industria de la pulpa y papel, y en la industria del acero [35].

3.3 Características continuas

Las propiedades dinámicas pueden ser a menudo determinadas usando leyes físicas, tales como la de la conservación de masa y de energía, a través de representaciones basadas en ecuaciones diferenciales, describiendo los componentes dinámicos de los procesos [35].

En general, el modelo basado en las propiedades físicas lleva a una descripción del sistema en la forma de espacio de estado,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (3.1)$$

donde $x(t)$ es el vector de estado del sistema, $u(t)$ es el vector de entradas externas, t la variable de tiempo y f es una función. También otros modelos pueden ser obtenidos de situaciones específicas. Si el modelado está basado en modelos de subsistemas, las ecuaciones resultantes son a menudo del tipo algebraico-diferencial.

El modelo en (3.1) está expresado en su forma general y un análisis completo de sus propiedades debe llevarse a cabo ciertamente en una estructura de tiempo continuo con discontinuidades. Todavía, en las aplicaciones de control de procesos es común el caso que una descripción más simple es pertinente, debido a la manera de cómo se genera la entrada

de control. Esto es, si el sistema es controlado por una configuración de retroalimentación, la dinámica puede ser al menos en una escala macroscópica, descrita de una forma simple. Un ejemplo de esto es el modelo de un sistema con integrador que se describe a continuación.

3.3.1 Procesos con integrador

Si se asume que la dinámica de la variable x del sistema (3.1) se comporta de manera aproximadamente lineal de manera seccionalmente continua, el modelo puede aproximarse por:

$$x(t) = w_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1} \quad (3.2)$$

donde $\{t_k\}$ son los puntos dónde la proporción de cambio w_k de x se conmuta. El modelo (3.2) parece ser tan simple que no merece interés en absoluto. Sin embargo, a menudo la reducida flexibilidad de la representación (3.2) es aprovechada como una ventaja del diseñador cuando se diseñan controladores híbridos.

El ejemplo más común de esto se encuentra quizás en los procesos batch. En ellos es natural especificar procedimientos comprendidos por varias fases o por lotes, cada uno de los cuales exhibe un comportamiento simple lineal en sus variables de proceso. En este nivel de descripción del sistema, el modelo (3.2) puede ser por consiguiente apropiado.

También debe notarse que los modelos físicos de las dinámicas de los procesos de flujo en las aplicaciones batch a menudo son expresados por integradores. La selección de variables está relacionada con los sensores disponibles y las especificaciones razonables, por lo que las opciones más comunes son nivel, temperatura y concentración. El volumen, energía y cantidad de sustancia dan a menudo procesos con integrador, mientras no se consideren reacciones químicas y pérdidas de energía.

3.3.2 Relación entre los comportamientos de la dinámica continua

Se pueden modelar sistemas con dinámicas continuas acopladas o desacopladas. Ilustraremos con un ejemplo el concepto de modelado basado en autómatas, primero para sistemas con una dinámica continua desacoplada y posteriormente con una dinámica continua acoplada.

Para ejemplificar cada caso trataremos un caso sencillo de un sistema calentador. Asumimos que la temperatura de una habitación está controlada por un actuador de encendido / apagado. Inicialmente el calentador está encendido y deseamos mantener la temperatura de la habitación entre 18°C y 22°C. En el funcionamiento de la planta consideraremos los dos siguientes casos [14]:

a) Modelo del sistema no considerando la interacción de la humedad en la temperatura

Cuando el calentador está encendido, la dinámica de la temperatura denotada por la variable x está descrita por la ecuación de flujo $\dot{x} = 5 - 0.1x$. Cuando el calentador está apagado, la temperatura disminuye de acuerdo a la ecuación de flujo $\dot{x} = -0.1x$. Hay un reloj representado por la variable y que mide el tiempo total que el sistema permanece en el estado de encendido, de esta manera se protege al sensor de temperatura de que no exceda el tiempo máximo de vida a la que puede estar sometido a cierta temperatura. Consideraremos que inicialmente el calentador está encendido, la temperatura es de 10°C y el sensor está nuevo ($y = 0$).

El calentador se apagará tan pronto la temperatura se incremente hasta 22°C o si el sensor de temperatura ha alcanzado su tiempo de vida máximo de funcionamiento confiable, es decir cuando $y = 600$ minutos. El calentador se volverá a encender cuando la temperatura disminuya a 18°C y el sensor de temperatura esté operando en su tiempo de vida confiable, es decir $y < 600$ minutos.

El modelo basado en la dinámica del sistema de temperatura independiente descrita se muestra en la Figura 3.1.

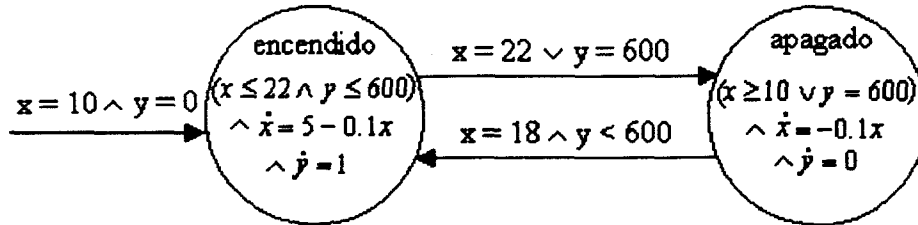


Figura 3.1. Modelo de un sistema híbrido con dinámica continua desacoplada.

En este primer caso, el sistema tiene dos variables continuas que no están correlacionadas (x y y). Esta representación describe una clase restringida de autómatas híbridos para el cual cada ecuación de flujo es independiente. Por consiguiente llamamos a tal modelo “autómata híbrido lineal desacoplado”. Podemos observar también que el comportamiento continuo está restringido a subregiones de comportamiento, definidas como invarianzas. En la Figura 3.2 se muestra el comportamiento continuo de la temperatura debido a las conmutaciones del sistema híbrido.

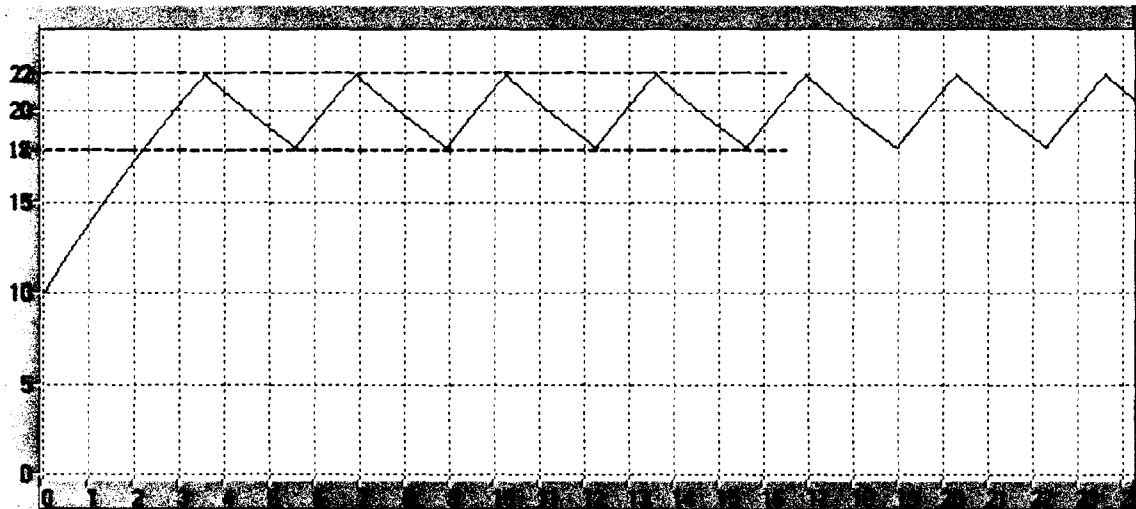


Figura 3.2. Comportamiento de la temperatura debido a las conmutaciones del sistema híbrido.

Así, es fácil de ver la utilidad del autómata híbrido en el orden de representar la dinámica de los sistemas físicos. Como la mayoría de los sistemas en la teoría del control son modelados por dinámicas continuas empleando ecuaciones diferenciales acopladas, los sistemas híbridos con este tipo de comportamiento continuo son de interés. Este es el caso del modelo planteado en b).

b) Modelo del sistema considerando la interacción de la humedad h en la dinámica de temperatura.

Asumimos la mismas condiciones como el modelo anterior pero ahora considerando que las dinámicas de la temperatura y la humedad están descritas por las siguientes ecuaciones:

en el estado de encendido $\dot{x} = 4x + h + 5 \quad \wedge \quad \dot{h} = -20.25x - 5h$

en el estado de apagado $\dot{x} = -0.9x + 0.2h + 1 \quad \wedge \quad \dot{h} = 0.1x - 0.5h$

El segundo modelo considera la interacción de la humedad h en la dinámica de la temperatura como se muestra en la Figura 3.3.

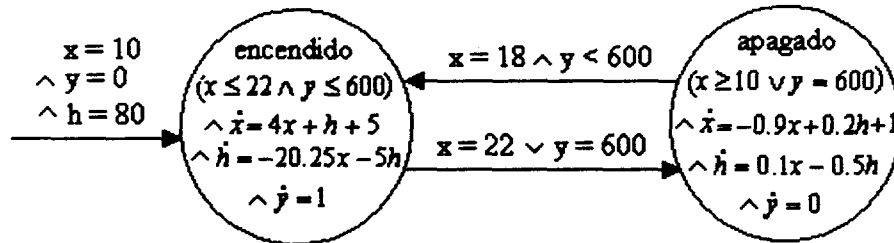


Figura 3.3. Modelo de un sistema híbrido con dinámica continua acoplada.

Para este caso acoplado, tomamos el formalismo natural para el comportamiento continuo y hemos expresado las ecuaciones de flujo continuas matemáticamente por medio de una representación de espacio de estado. En esta representación, la dependencia entre las variables es modelada por la ecuación de estado como se muestra en la Figura 3.4, donde $X(0) = [x \quad h]^T = [10 \quad 80]^T$.

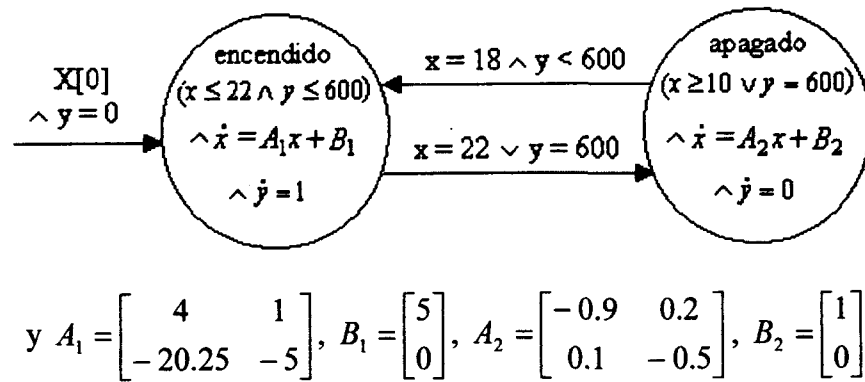


Figura 3.4. Autómata híbrido lineal-continuo invariante en el tiempo.

El comportamiento total de la temperatura debido a la interacción de la humedad se muestra en la Figura 3.5. Haciendo una comparación con la gráfica que se obtuvo en la Figura 2, se puede observar claramente el efecto que se obtuvo sobre la temperatura debido a la interacción de la humedad.

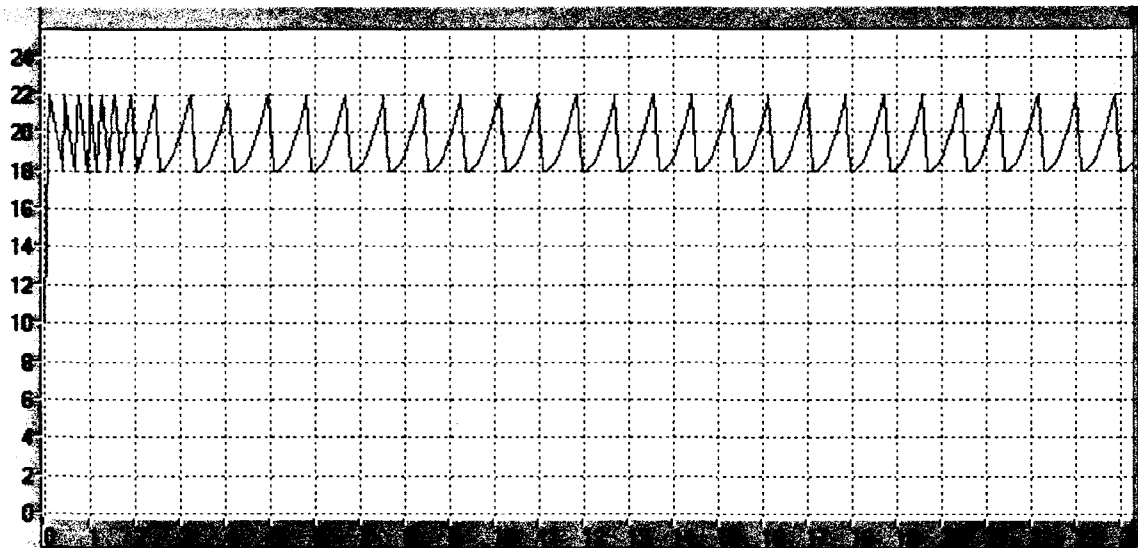


Figura 3.5. Comportamiento de la temperatura debido a la interacción de la humedad.

3.4 Características discretas

Como se mencionó anteriormente, en los procesos batch es natural especificar procedimientos globales que abarquen diferente numero de fases. Durante cada fase, el

sistema de control actúa en un modo específico, ejecutando funciones como llenado, vaciado, calentamiento, mezclado, etc. En muchas de estas situaciones, es conveniente distinguir entre las diferentes fases o modos mediante la asignación de estados discretos. Dichos estados discretos tendrán una dinámica continua asociada dependiendo del funcionamiento del sistema [35].

3.4.1 Diferentes modos de comportamiento físico

Las dinámicas continuas pueden ser descritas a menudo por el modelo (3.1), donde el vector x representa típicamente variables como nivel (o volumen), temperatura y concentración. La relación $f(\dots)$, es por lo general una función continua, pero en ciertos casos contiene diferentes cambios (por ejemplo discontinuidad en f o en $\frac{\partial f}{\partial x}$), esto refleja un cambio en el comportamiento del proceso. Se ilustra tal situación con el tanque de la Figura 3.6. Como se puede observar en la Figura 3.6, este tanque tiene una forma que introduce un cambio en la dinámica continua a cierto nivel. Cuando el nivel se encuentra entre las cotas h_s y h_i debido a la acción de control sobre las válvulas v_1 y v_2 , el nivel se comporta de una manera específica. Cuando el nivel decae por debajo de la cota h_i la acción de control sobre v_1 y v_2 cambia, entonces el sistema tiene un comportamiento continuo diferente [35].

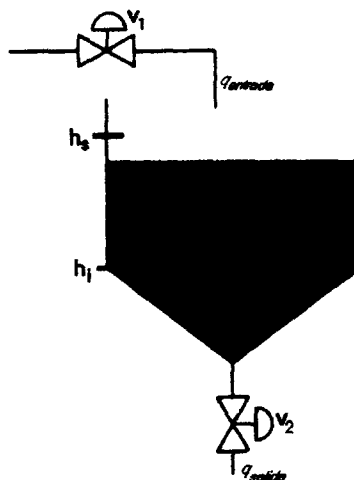


Figura 3.6. Tanque con dinámicas continuas diferentes.

Esta es una de las situaciones donde los cambios en el comportamiento de la dinámica continua se asocia a un estado discreto específico.

3.4.2 Entradas discretas

Los sensores discretos se usan para indicar un estado lógico en alguna variable de interés del sistema. La señal lógica producida por dicho sensor servirá para producir o prohibir alguna acción discreta sobre el proceso (salida por parte del autómata de control).

3.4.3 Salidas discretas

El elemento discontinuo (discreto) más obvio en los procesos es probablemente el actuador discreto. Los ejemplos son abundantes y en la Figura 3.7 se pueden encontrar válvulas binarias (abierto / cerrado), una bomba (encendido / apagado) y un motor mezclador (encendido / apagado). Dichos elementos se consideran como discretos debidos a que solamente pueden operarse en dos estados. Hay que tomar en cuenta estos elementos en la asignación de los estados en el autómata que controla [35].

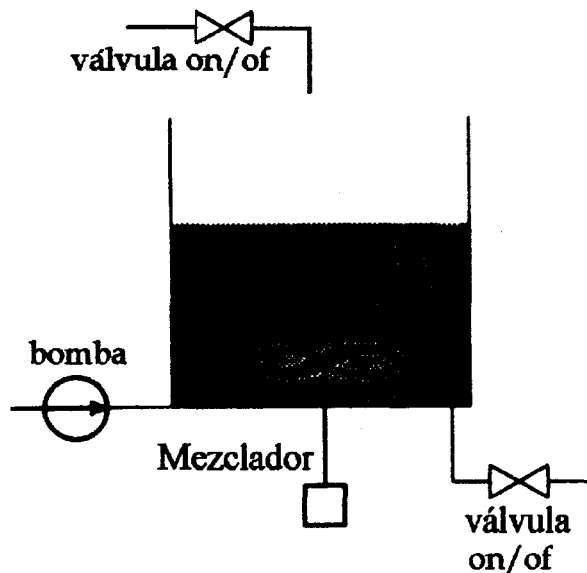


Figura 3.7 Actuadores en un tanque de mezclado.

3.5 Síntesis de la ley de control

Una vez que se han planteado los aspectos generales y el comportamiento de los sistemas que caen dentro de la clasificación de híbridos, se procede a presentar como se puede sintetizar una ley de control partiendo de las especificaciones del sistema. Dichas especificaciones típicamente introducen restricciones en la dinámica del sistema. Para los sistemas híbridos dichas especificaciones se pueden dividir en especificaciones para la parte continua y especificaciones para la parte discreta.

3.5.1 Especificaciones para la parte continua

En la parte continua, las especificaciones se pueden asumir como una restricción de estado, lo que implica que el vector de estado $x(t)$ está restringido a permanecer una región deseada. Por lo tanto, una restricción de estado puede ser considerada como una partición del espacio de estado donde el complemento de la región deseada puede ser considerada como una región prohibida. Formalmente, una especificación de restricción de estado tiene la forma de (2.2) para una región en general, y en el caso de poliedros tiene la forma de (2.3).

Las restricciones de estado o invarianzas que son globales y por consiguiente se tienen que cumplir en todas los nodos se llaman restricciones del sistema. Las invarianzas especificadas para cada nodo se llaman restricciones de estado [35].

Considerando que el estado $x(t)$ puede ser llevado de un estado inicial a un estado final con el adecuado diseño de un controlador continuo, se pueden especificar diferentes tipos de controladores continuos para cada estado discreto y realizar un control óptimo mediante una adecuada conmutación de los controladores.

3.5.2 Especificaciones para la parte discreta

La especificación discreta se lleva a cabo determinando los nodos (s_j) que serán utilizados como inicio y final, y aquellos nodos que se clasifiquen como estados prohibidos o no deseados. La determinación de los nodos de inicio y final se puede utilizar para trazar una trayectoria de comportamiento discreto, y los estados prohibidos para limitar el comportamiento dinámico discreto.

Para optimizar la síntesis de la ley control por lo general se tienen que analizar todos los casos posibles para ver cual es el que genera la mejor solución por ejemplo en el caso de sistemas con dinámicas continuas que describen procesos con integrador, usualmente se recurre a una optimización del tiempo en que se recorren las trayectorias [35].

3.6 Análisis de sistemas híbridos

En el análisis del comportamiento dinámico de sistemas influenciados por la ocurrencia de eventos discretos, hay dos importantes líneas de investigación: la que se basa en el modelo del autómata y la que se basa en las redes de Petri. El interés de este trabajo de tesis se basa en la modelación y análisis de sistemas híbridos mediante el modelo del autómata híbrido. Este tipo de modelación tiene la ventaja de contar con herramientas de análisis cada vez mas poderosas [14].

3.6.1 Análisis de un autómata híbrido desacoplado

Considere la estructura parcial del autómata donde el nodo s_j tiene una transición de entrada y una de salida (Figura 3.8). Suponga una representación de flujo continuo invariante en el tiempo y lineal. Considere x_p y x_q donde $x_p, x_q \in \mathfrak{R}$, son variables no acopladas, es decir independientes en sus condiciones iniciales y de salto. K_{ip} , K_{jq} son valores reales constantes. Los subíndices i, j denotan el nodo fuente de la transición. Los subíndices p y q se refieren a las variables p-ésima y q-ésima del vector de estado $x(t)$

después de un tiempo de residencia ∂_j en el nodo s_j , esto es $x_p = x(\partial_j)[p]$ y $x_q = x(\partial_j)[q]$ [14].

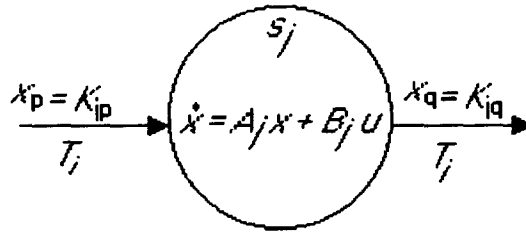


Figura 3.8. Nodo SISO de un autómata híbrido H_{CLI} .

En el nodo s_j , la ecuación $\dot{x} = A_j x + B_j u$ modela la evolución dinámica continua para un horizonte fijo definido en un intervalo cerrado $I_j = [0, \partial_j]$. El tiempo de residencia ∂_j se define como la cantidad de tiempo transcurrido en el estado discreto (nodo) s_j antes del disparo de una transición T_j . La evolución del vector de estados $x(t) \forall t \in I_j$ esta dada por:

$$x(t) = e^{A_j t} x(0) + \int_0^t e^{A_j(t-\varphi)} B_j u(\varphi) d\varphi \quad (3.3)$$

Entonces, para $t = \partial_j$ obtenemos

$$K_j = e^{A_j \partial_j} K_i + \int_0^{\partial_j} e^{A_j(\partial_j-\varphi)} B_j u(\varphi) d\varphi \quad (3.4)$$

donde los valores K_{ip} y K_{jq} son las componentes constantes p-ésima y q-ésima de los vectores K_i y K_j , respectivamente.

Propiedad 3.1

Para el nodo s_j , la transición T_j es habilitada en el instante $t = 0$ a la entrada del nodo, si y solo si para (3.4) existe una solución finita $\partial_j \in \mathfrak{R}_{\geq 0}$. Se debe hacer notar que en el caso general, por ejemplo para cualquier matriz A_j , es difícil encontrar una solución explícita y en la mayoría de los casos, solo es posible una solución numérica de ∂_j [16].

Un primer caso particularmente interesante se presenta cuando el comportamiento dinámico del sistema híbrido continuo lineal es desacoplado. Para analizar tal sistema utilizamos un modelo autómata híbrido H_{CLID} . En la representación suponemos que $\forall s_j \in S$, se tiene una matriz diagonal $A_j = \text{dia}[a_{j1} \dots a_{jr}]$ y un vector constante real $B_j u = [b_{j1} \dots b_{jr}]^T$. Aquí, consideramos disparos de transición no determinísticos asumiendo una región inicial $R_m \subset \mathfrak{R}$ (en el nodo de entrada s_j), y la zona de conmutación $R_{jq} \subset \mathfrak{R}$ definida en la condición de salto $F(T_j)$ como se muestra en la Figura 3.9. Sea K_{jq} un punto en la región R_{jq} al instante de transición T_j . Sea K_m un punto inicial en la región inicial R_m .

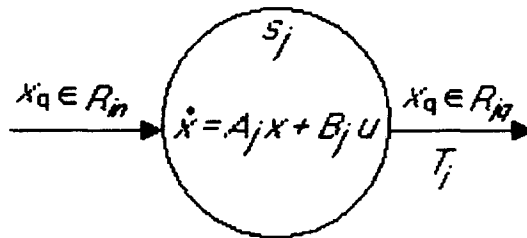


Figura 3.9. Nodo s_j de un autómata híbrido desacoplado

H_{CLID} .

Propiedad 3.2

El tiempo de residencia ∂_j en todos los nodos $s_j \in S$ está determinado por [16]:

$$\partial_j = \frac{1}{a_{jq}} \ln \left(\frac{K_{jq} - P_{jq}}{K_{in} - P_{jq}} \right) \quad \text{si } a_{jq} \neq 0 \quad (3.5)$$

$$\partial_j = \frac{K_{jq} - K_{in}}{b_{jq}} \quad \text{si } a_{jq} = 0 \quad (3.6)$$

donde $P_{jq} = -\frac{b_{jq}}{a_{jq}}$ es un punto de equilibrio.

Este último resultado pudo ser obtenido resolviendo (3.4) para el tiempo de residencia ∂_j considerando el caso escalar con un valor inicial $x_q(0) = K_{in}$ y una condición de salto en la transición $x_q(\partial_j) = K_{jq}$.

Teorema 3.1

Dado un autómata híbrido H_{CLID} , para todas las locaciones $s_j \in S$ la condición necesaria y suficiente para la habilitación de T_j está dada por las siguientes ecuaciones lógicas [15]:

$$[P_{jq} < K_{jq} \leq K_{in}] \vee [P_{jq} > K_{jq} \geq K_{in}] = 1 \quad \text{si } a_{jq} < 0 \quad (3.7)$$

$$[P_{jq} < K_{in} \leq K_{jq}] \vee [P_{jq} > K_{in} \geq K_{jq}] = 1 \quad \text{si } a_{jq} > 0 \quad (3.8)$$

$$[K_{jq} \leq K_{in}][b_{jq} < 0] \vee [K_{jq} \geq K_{in}][b_{jq} > 0] = 1 \quad \text{si } a_{jq} = 0 \quad (3.9)$$

La prueba de las relaciones anteriores es simple y se basa en el hecho de que para la habilitación de una transición T_j es suficiente que $\exists \partial_j \mid \partial_j \in \mathfrak{R}_{\geq 0}$. En la siguiente sección se explicará el origen de las relaciones expresadas anteriormente.

Propiedad 3.3

Para todos los nodos $s_j \in S$ la transición de salida T_j es habilitada si para al menos un punto $K_{jq} \in R_{jq}$ existe al menos un punto $K_{in} \in R_{in}$ que satisface la relación (3.7), la (3.8) ó la (3.9).

Si la propiedad 3.3 se satisface, podemos asegurar que en el nodo s_j existe al menos una trayectoria desde R_{in} hasta R_{jq} para algún punto en R_{jq} . Este último concepto puede ser usado también para propósitos de análisis de alcance (reachability) [15].

3.6.2 Validación de las transiciones discretas

Considere un autómata híbrido compuesto por nodos del tipo como se muestra en la Figura 3.10. Dicho sistema posee a la entrada condiciones iniciales tales que $x_0 \in X \subset \mathfrak{R}^r$. En cada nodo, la dinámica continua se representa por la ecuación de estado $\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}$, a la salida del nodo tenemos que la condición de salto se realiza a partir de una región convexa definida por $Cx = \Gamma$. Ahora consideremos el cambio de variable $y = Cx$ ilustrado en la Figura 3.10b. La condición de salto de la transición definida para una relación lineal en \mathfrak{R}^r es sustituida por un predicado simple en \mathfrak{R} , $y = \Gamma$. De esta manera se representa la salida del sistema y se podrá ejercer alguna acción de manipulación para obtener un comportamiento deseado. Así, con este cambio, el flujo continuo en el nodo es representado por la ecuación de estado más la ecuación de salida y la condición de salto es función de un predicado simple en y [16].

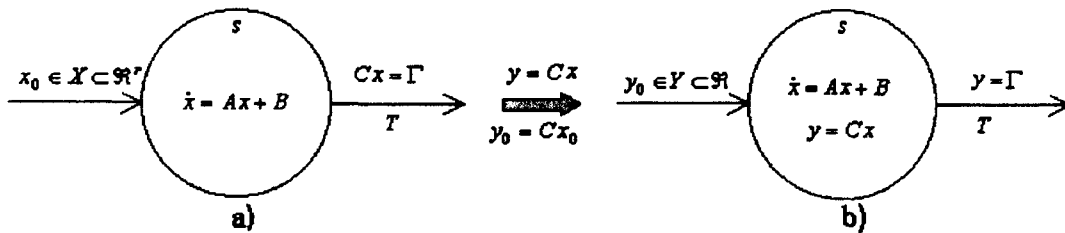


Figura 3.10. Representación general de un nodo para un autómata híbrido H_{CLI} .

A partir de este cambio podemos definir las condiciones para la validación de la transición discreta T a partir del análisis del comportamiento dinámico de y . Así, después del cambio de variable nos interesa determinar si el valor final $y = \Gamma$ puede alcanzarse a partir del valor inicial y_0 . Ahora consideremos el caso de un segundo orden estable ($a_1, a_2 \in \mathcal{R}_{<0}$) para el cual se puede observar que se tiene, de manera general para y , tres posibilidades de comportamiento dinámico (Figura 3.11) [16]:

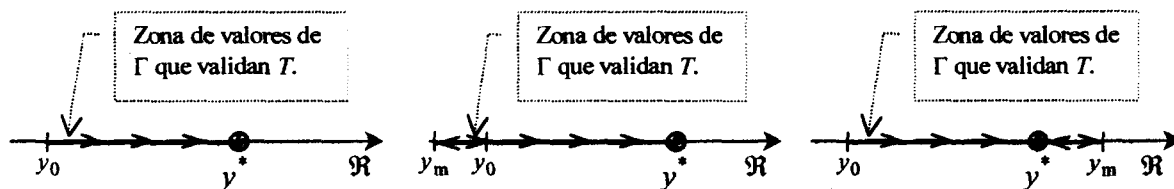


Figura 3.11. Comportamiento dinámico de y .

Para determinar la zona de valor Γ que valida T se necesita determinar, según el caso, los límites y_0 , y^* , y y_m . Así, a partir de un análisis estructural (de polos y ceros) del sistema, se dan las condiciones necesarias y suficientes para la validación de T .

Como se mencionó antes, el sistema de transiciones continuas tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\
 y &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Para nuestro caso, el más general, diagonalizamos la matriz \bar{A} y obtenemos que el sistema de transiciones continuas adquiere la forma:

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} & A & & B \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ & y = \begin{matrix} C \\ \alpha & \beta \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Una vez que se tiene el sistema en la forma de (3.11), a partir de la ecuación de estado y de salida del modelo de espacio de estado, obtenemos la función de transferencia del sistema de transición continuo dentro de cada estado discreto :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B = \frac{(\alpha b_1 + \beta b_2)s - (\alpha b_1 a_2 + \beta b_2 a_1)}{(s - a_1)(s - a_2)} \quad (3.12)$$

El conocimiento de los polos, ceros y de la ganancia de la función de transferencia informa completamente sobre la forma de la respuesta unitaria y , y así como sobre la validación de T . Si $\alpha b_1 + \beta b_2 = 0$, el sistema no tiene ceros, entonces la respuesta del sistema toma la forma clásica de un sistema de segundo orden con polos reales. Para un análisis de la dirección de trayectorias y para el caso $\alpha b_1 + \beta b_2 = 0$, la condición para la validación de T está expresada por las relaciones [16]:

$$\begin{aligned} [y^* < \Gamma \leq y_0] + [y^* > \Gamma \geq y_0] &= 1 && \text{si } a_1, a_2 \in \mathfrak{R}_{<0}, \\ [0 < \text{Res}_1] \cdot [y_0 \leq \Gamma] + [0 > \text{Res}_1] \cdot [y_0 \geq \Gamma] &= 1 && \text{si } a_1 \text{ y/o } a_2 \in \mathfrak{R}_{>0}, \\ [0 < \text{Res}_2] \cdot [y_0 \leq \Gamma] + [0 > \text{Res}_2] \cdot [y_0 \geq \Gamma] &= 1 && \text{si } a_1 = a_2 = 0. \end{aligned}$$

donde:

$$y^* = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = -\left(\frac{\alpha b_1}{a_1} + \frac{\beta b_2}{a_2}\right) = \alpha P_1 + \beta P_2 \text{ representa el punto de equilibrio de la variable } y,$$

$Res_1 = \lim_{s \rightarrow \rho_d} (s - \rho_d)G(s)$ tal que $\rho_d = \max[a_1, a_2]$, representa el residuo correspondiente al polo dominante (valor máximo entre a_1 y a_2), y

$Res_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$ representa el residuo correspondiente al termino más dominante de la respuesta y . (3.13)

La Figura 3.12 ilustra el caso $a_1, a_2 \in \mathcal{R}_{<0}$ para el cual se valida la transición T . Para todos los otros casos para los cuales $\alpha b_1 + \beta b_2 \neq 0$ el sistema (y en consecuencia su respuesta y) está caracterizado por:

- su ganancia $\kappa = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = -\left(\frac{\alpha b_1}{a_1} + \frac{\beta b_2}{a_2}\right) = \alpha P_1 + \beta P_2 = -(a_1 a_2)^{-1} C [\text{cof}(A)] B$, donde
- $\text{cof}(A)$ denota la matriz de cofactores de A , $P_1 = -(b_1/a_1)$ y $P_2 = -(b_2/a_2)$,
- sus polos: $\rho_1 = a_1$ y $\rho_2 = a_2$, y
- sus ceros :

$$z = \frac{\alpha b_1 a_2 + \beta b_2 a_1}{\alpha b_1 + \beta b_2} = \frac{\alpha P_1 + \beta P_2}{(a_2)^{-1}(\alpha P_1) + (a_1)^{-1}(\beta P_2)} = \frac{\kappa}{(-a_1 a_2)^{-1}(\alpha b_1 + \beta b_2)} = C [\text{cof}(A)] B [CB]^{-1}$$

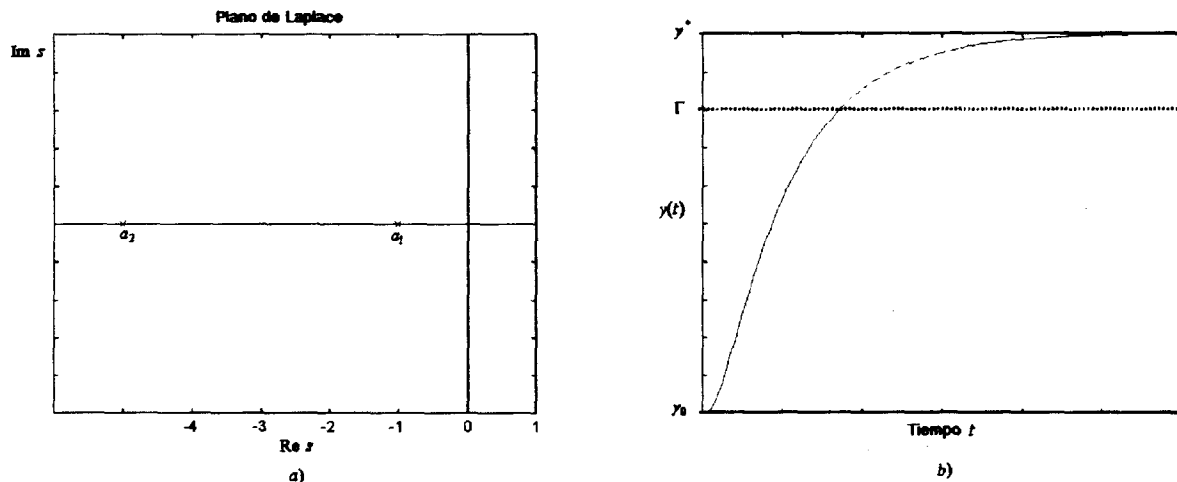


Figura 3.12. Interpretación geométrica de la validación de T . a) posición de polos de $G(s)$ y b) respuesta y para el caso $\alpha b_1 + \beta b_2 \neq 0$ y $a_1, a_2 \in \mathcal{R}_{<0}$.

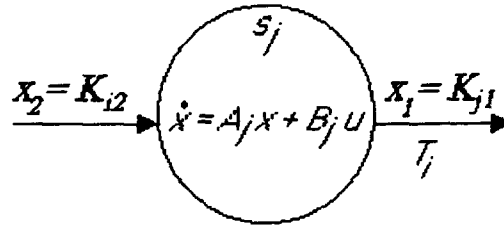
La inclusión de un cero dentro de la función de transferencia del sistema cambia, en ciertas situaciones, radicalmente la forma de la respuesta unitaria y asociada a las formas del sistema. Para determinar la validación de T, con relación a la posición del cero y de los polos dentro del plano de Laplace, se observan tres casos generales: el caso en que se tiene un cero a la izquierda del polo dominante, el caso en que se tiene un cero estable más a la derecha del polo dominante y el último caso que tiene un cero inestable más a la derecha del polo dominante.

3.6.3 Análisis de autómatas híbridos acoplados

En [18] el método “clock translation” es aplicado para la verificación automática del autómata H_{CLID} . Este método consiste en crear un autómata híbrido lineal bisímil temporizado reemplazando todas las variables de estado x del autómata H_{CLID} por relojes. Las variables que pueden ser reemplazadas por relojes son llamadas “solucionables”. Aquí, la primer condición de “solucionabilidad” requiere que x sea independiente de las otras variables en las condiciones de flujo, de salto e iniciales. Sin embargo en el siguiente caso de análisis, a pesar de la representación de la condición de flujo desacoplado, el hecho de tener condiciones de salto relacionadas a una de dos variables de estado diferentes, esto da un cierto acoplamiento entre ellas y consecuentemente una resolución analítica más complicada. En este caso las variables x en las condiciones de salto no serán “solucionables” y por lo tanto la aproximación de translación de reloj no será posible [14].

En esta sección se proveen algunas propiedades del autómata para encontrar la región “alcanzable” para su representación acoplada.

Sea la Figura 3.10 un nodo s_j de un autómata híbrido H_{CLI} . En este caso acoplado $A_j = \text{diag}[a_{j1} \quad a_{j2}]$, el vector $B = [b_{j1} \quad b_{j2}]$, K_{j1} y K_{j2} son constantes reales positivas. Las condiciones de salto son simples función de una de dos variables de estado $x_q(t) = K_{jq} | q \in \{1,2\}$.


 Figura 3.10. Nodo s_j del caso acoplado.

En el nodo $s_j \forall t \in I_j | I_j = [0, \partial_j]$, el conjunto de estados “alcanzables” de alguna región inicial, es función de la condición de salto y la ecuación de trayectoria del espacio de estados. El vector de estados al instante de la transición está definido como $x(\partial_j) = [K_{j1} \ K_{j2}]^T$. En consecuencia, los valores K_{j1} y K_{j2} son valores discretos y solo son obtenidos a cada instante de la transición T_j . La ecuación de la trayectoria del espacio de estados $x_2 = f(x_1)$ en cada nodo s_j del autómata esta dada por [16]:

$$x_2 = x_2(0) + \frac{b_{j1}}{b_{j2}} [x_1 - x_1(0)] \quad \text{para } a_{j1} = a_{j2} = 0 \quad (3.14)$$

$$x_2 = P_{j2} + [x_2(0) - P_{j2}] e^{\left(\frac{a_{j2}}{b_{j1}}\right)[x_1 - x_1(0)]} \quad \text{para } a_{j1} = 0, \ a_{j2} \neq 0 \quad (3.15)$$

$$x_2 = P_{j2} + [x_2(0) - P_{j2}] \left[\frac{x_1 - P_{j1}}{x_1(0) - P_{j1}} \right]^{\frac{a_{j2}}{a_{j1}}} \quad \text{para } a_{j1} \neq 0, \ a_{j2} \neq 0 \quad (3.16)$$

donde $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = [K_{j1} \ K_{j2}]^T$ es la locación s_j de condición inicial.

Propiedad 3.4

La relación entre K_{j1} y K_{j2} en cada instante de transición T_j está dada por:

$$K_{j2} = K_{i2} + \frac{b_{j2}}{b_{j1}}(K_{j1} - K_{i1}) \quad \text{para } a_{j1} = a_{j2} = 0 \quad (3.17)$$

$$K_{j2} = P_{j2} + (K_{i2} - P_{j2})e^{\left(\frac{a_{j2}}{b_{j1}}\right)[K_{j1} - K_{i1}]} \quad \text{para } a_{j1} = 0, \quad a_{j2} \neq 0 \quad (3.18)$$

$$K_{j2} = P_{j2} + (K_{i2} - P_{j2})\left(\frac{K_{j1} - P_{j1}}{K_{i1} - P_{j1}}\right)^{\frac{a_{j2}}{a_{j1}}} \quad \text{para } a_{j1} \neq 0, \quad a_{j2} \neq 0 \quad (3.19)$$

Este es un resultado analítico obtenido al buscar el punto de conmutación en la ecuación de trayectoria del espacio de estados (3.14), (3.15) y (3.16) al instante de disparo de la transición T_j .

Para propósito de análisis de ciclo límite, es importante notar que en el nodo s_j de la Figura 3.10 hay dos variables discretas desconocidas K_{i1} y K_{i2} a la entrada y a la salida del instante de conmutación respectivamente. Generalmente, para cada locación s_j en la estructura del autómata, tendremos una ecuación de la forma expuesta en (3.17), (3.18) y (3.19) con dos incógnitas (K_{i1} y K_{j2}) que determinarán, por medio de un análisis de convergencia, la existencia del ciclo límite. Entonces, para este tipo de sistema híbrido, la existencia de un ciclo límite y su característica unicidad es obtenida a partir de un análisis de convergencia de los valores K_{jq} en los instantes de conmutación $\forall s \in S$ y $q \in \{1,2\}$ de acuerdo al teorema del punto fijo [14].

En el Capítulo 4 se propone una metodología para el modelado de sistemas híbridos basada en el modelo del autómata híbrido. Dicha metodología se ilustra mediante su aplicación a dos ejemplos. Al final de dicho capítulo se presenta el desarrollo de un algoritmo para el análisis de un sistema híbrido y se ejemplifica mediante el análisis de los ejemplos: el primero consiste en el llenado adecuado de botellas que circulan por una banda transportadora y el segundo en el mezclado de dos sustancias químicas.

**CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA PROPUESTA PARA LA MODELACIÓN
Y DESARROLLO DEL ALGORITMO DE ANÁLISIS PARA LOS
SISTEMAS HÍBRIDOS**

En este capítulo se propone una metodología y un algoritmo de análisis para los sistemas híbridos desacoplados. Se ilustra su aplicación mediante dos ejemplos: el primero consiste en el llenado adecuado de botellas que circulan por una banda transportadora y el segundo consiste en el mezclado de dos sustancias químicas.

CAPITULO 4

METODOLOGÍA PROPUESTA PARA EL MODELADO Y DESARROLLO DEL ALGORITMO PARA EL ANÁLISIS DE SISTEMAS HÍBRIDOS

4.1 Metodología propuesta para el modelado de sistemas híbridos

Una vez que se tienen los conceptos básicos para realizar el modelado de sistemas híbridos, se ha desarrollado una metodología para aplicar dichos conceptos de manera adecuada y óptima. La metodología se describe a continuación.

Metodología

1. Identificar las entidades continuas y/o discretas que integran el proceso.
2. Modelación de la parte continua. Esto implica seleccionar el modelo matemático que mas se ajuste a las propiedades físicas del comportamiento continuo a modelar. Hay que recordar que se pueden utilizar desde ecuaciones diferenciales simples hasta muy complejas para representar las dinámicas continuas.
3. Modelación de la parte discreta. Aquí se determina el número de estados discretos necesarios basado en los diferentes modos de comportamiento físico, las entradas y las salidas discontinuas.
4. Analizar las acciones de control.
5. Integrar las representaciones obtenidas de la modelación individual. Lo anterior se logra utilizando el modelo del autómeta híbrido.
6. Realizar el análisis del sistema híbrido obtenido. Esto es con el fin de asegurar que todas las condiciones previamente establecidas se cumplan.

7. Simular del sistema modelado y evaluar los resultados. En esta parte se puede emplear algún programa comercial para llevar a cabo la simulación o programar el algoritmo de análisis.

4.2 Justificación del algoritmo de análisis

Los sistemas híbridos pueden tener comportamientos muy peculiares, ya que involucran dinámicas continuas y discretas, por lo que para analizarlos es necesario contar con una herramienta que permita integrar el análisis de ambas dinámicas sin excluir ninguna. Con esta herramienta se pretende que los sistemas modelados mediante la metodología propuesta aseguren un funcionamiento óptimo, además, se puede utilizar para la detección de fallas, así como para realizar ajustes en el control de dichos sistemas. Tal herramienta ha sido diseñada mediante el desarrollo de un algoritmo de análisis el cual se describe en la siguiente sección.

4.2.1 Desarrollo del algoritmo de análisis

Basados en el autómata híbrido obtenido con la metodología descrita previamente, en esta sección se propone un algoritmo de análisis basado en el estudio descrito en el Capítulo 3 para sistemas híbridos con dinámicas continuas desacopladas. Se utiliza el concepto de tiempo de residencia y de las propiedades analíticas descritas en la sección 3.7.2. A continuación se describen los pasos para ejecutar el análisis de dichos sistemas híbridos.

Algoritmo

1. Calcular todos los puntos de equilibrio para cada nodo ($P_{j_i} \forall S_j$) si es que existen. Este paso involucra el análisis de las ecuaciones diferenciales para interpretar su dinámica.

2. Validar las transiciones de salida de cada nodo considerando sus transiciones de entrada y punto de equilibrio basados en las condiciones lógicas 3.7, 3.8 y 3.9. Esto da lugar a que por simple inspección y de manera rápida se detecten las condiciones de salto que no están correctas o que nunca se van a cumplir.
3. Calcular el tiempo mínimo (∂_{\min}) y máximo (∂_{\max}) de residencia en los nodos basados en las ecuaciones 3.5 y 3.6 y establecer las relaciones que permitan la habilitación o inhabilitación de las transiciones en los nodos. Para cada nodo existe un tiempo de residencia, que indica cuanto tiempo se debe esperar en el nodo antes de que sea disparada la transición y cuanto tiempo se tiene antes de que la condición de disparo ya no sea válida.
4. Recorrer todas las posibles trayectorias que se generen, tomando en cuenta los tiempos de permanencia antes calculados. Para cada condición inicial existirá un tipo de comportamiento asociado tanto a la dinámica continua como discreta; por lo que se determinan los rangos de valores que generen diversas trayectorias.
5. Verificar cuales trayectorias hacen que el sistema sea estable. Este punto sirve para establecer la existencia de un estado estable en el comportamiento continuo del sistema híbrido. En el caso de no encontrar una trayectoria que haga estable al sistema, se sugiere que se revise las especificaciones de control y se ejecute de nuevo el algoritmo de análisis del sistema.

Una vez que se estableció como cambia el comportamiento de un sistema híbrido con dinámicas continuas desacopladas y acopladas, seguidamente mediante un ejemplo ilustrativo, se muestra la aplicación de los conceptos anteriormente expresados y los resultados teóricos descritos.

4.3 Aplicación de la metodología de modelado propuesta a un sistema de llenado de botellas

Considere el sistema de llenado de botellas de la Figura 4.1. El llenado se realiza desplazando las botellas de izquierda a derecha sobre una banda transportadora la cual posiciona las botellas vacías debajo del grifo de un tanque alimentador para su llenado. Dicho sistema cuenta con un sensor que indica la presencia de la botella ($b_1 = 1$) y otro sensor que indica cuando la botella está llena ($b_2 = 1$). Cuando la botella está llena, la banda realiza un movimiento hacia la derecha hasta que se detecta la presencia de una nueva botella vacía. Así, dependiendo de la combinación discreta de los sensores (b_1 y b_2) será la acción de control de movimiento de la banda transportadora. Si la botella no está presente o está presente pero llena, la banda se pondrá en movimiento y esto activará la señal discreta AB . Por el contrario si se detecta la presencia de una botella vacía, la banda se detiene y se apaga la señal discreta AB . El objetivo del sistema de control es mantener el nivel del líquido en el tanque entre dos niveles preestablecidos (uno inferior h_1 y uno superior h_2) mediante el control de la válvula de llenado V_1 y la válvula de descarga V_2 (grifo) del tanque. Este control se deberá realizar en sincronización con el movimiento de la banda transportadora y el adecuado llenado de las botellas (sin derramar líquido).

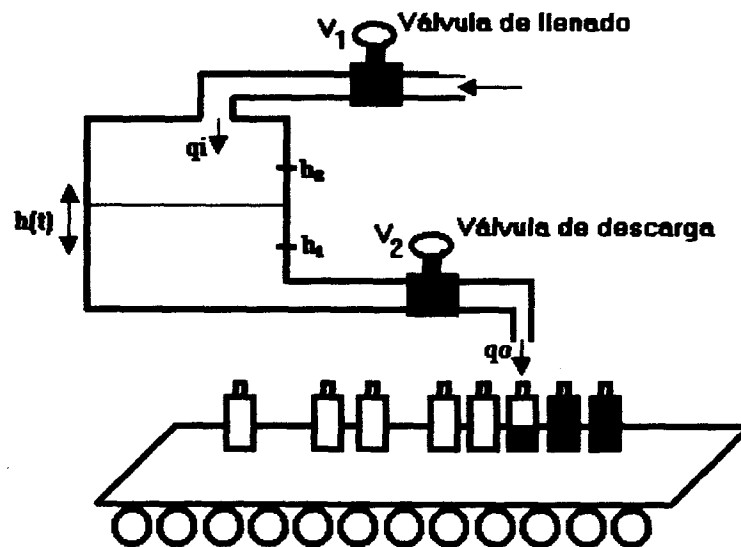


Figura 4.1. Sistema de tanque con banda transportadora.

Metodología para el modelado y el análisis del sistema:

1. Identificar las entidades continuas y/o discretas que describen la dinámica del proceso.

Variables continuas

- Nivel del tanque h .
- Flujo de entrada q_i .
- Flujo de salida q_o .
- Movimiento de la banda transportadora mb .
- Nivel en la botella h_b .

Variables discretas

- Estado de la válvula de llenado V_1 (encendida o apagada).
- Estado de la válvula de descarga V_2 (encendida o apagada).
- Cota h_1 .
- Cota h_2 .
- Señal AB .

Como se mencionó anteriormente la señal AB está formada por la combinación de los sensores de presencia y llenado de la botella. Esto es:

b_1	b_2	AB
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se obtiene la función lógica que forma la señal AB por medio de un mapa de Karnaugh:

$$AB = \bar{b}_1 + b_2 \quad (4.1)$$

2. Modelación de la parte continua

El tanque de la Figura 4.1 se puede considerar como un tanque de almacenamiento con un área transversal A y altura de la columna de líquido h . El líquido entra al tanque por la parte superior y sale por la parte inferior del tanque a través de válvulas, cuya resistencia al fluido es denotada por R . El volumen de flujo de la entrada y volumen de flujo de salida es q_i y q_o respectivamente. La densidad ρ del fluido es constante. El sistema tiene una entrada q_i y una salida h . La dinámica del sistema de nivel es representada por una ecuación diferencial simple en h . La ley física básica puede ser expresada en forma matemática por:

$$\frac{d}{dt}(\rho Ah) = \rho q_i - \rho q_o \quad (4.2)$$

donde la proporción de cambio de tiempo de la masa del fluido dentro del tanque es igual a proporción de masa del fluido que entra menos la proporción de masa del fluido que sale (principio de conservación de la masa).

Ahora expresamos la variable q_o en términos del nivel h . Por simplicidad, se asume una relación lineal y se define la resistencia de la válvula R como:

$$\rho q_o = \frac{\Delta p}{R} \quad (4.3)$$

donde Δp es la diferencia de presión a través de la válvula y ρq_o es la proporción de flujo de masa de salida de la válvula. En este caso:

$$\rho q_o = \frac{\Delta p}{R} = \frac{p_1 - p_2}{R} = \frac{(p_a + \rho gh) - p_a}{R} = \frac{\rho gh}{R} \quad (4.4)$$

donde el punto uno se encuentra en contra corriente en el lado de la válvula donde el líquido entra, y el punto dos está en la lado del desagüe donde el líquido sale. Estimamos que p_1 es igual a la presión hidrostática en el punto uno y p_2 igual a la presión atmosférica p_a , entonces tenemos que:

$$p_1 = p_a + \rho gh \quad \text{y} \quad p_2 = p_a \quad (4.5)$$

Asumiendo que ρA es constante, la ecuación se puede escribir como:

$$\rho A \frac{dh}{dt} = \rho q_i - \frac{\rho gh}{R} \quad (4.6)$$

El modelo es finalmente obtenido eliminando ρ y reorganizando la ecuación 4.6 en la forma estándar de ecuación diferencial de entrada y salida:

$$A \dot{h} + \frac{g}{R} h = q_i \quad (4.7)$$

$$h = \frac{q_i - R \dot{h}}{A} \quad (4.8)$$

Ahora se tiene que considerar la dinámica del llenado de la botella. Para lograr esto se considera que el nivel en la botella está dado por:

$$h_b = \frac{q_{ib}}{A_b} \quad (4.9)$$

donde:

q_{ib} = flujo de entrada de la botella

A_b = Area de la sección transversal de la botella

Pero como el flujo de entrada a la botella es variable ya que depende del nivel en el tanque, se considera que la razón de cambio del flujo de entrada con respecto al tiempo está dado por:

$$\dot{h}_b = \frac{h}{A_b} \quad (4.10)$$

de esta manera, dependiendo del valor del nivel en el tanque es la velocidad con la que se llena la botella.

Para el caso de la modelación de la dinámica de la banda transportadora, se considera que su movimiento es constante y que se detiene cada vez que se detecta una botella vacía. Para representar el tiempo en que se mantiene encendida la banda transportadora, se define y como un reloj para medir el tiempo transcurrido antes de que llegue una botella, esto es:

$$y = 1 \quad (4.11)$$

El tiempo en el que se presenta una botella está dado por la velocidad de la banda transportadora y la separación entre cada botella.

3. Modelación de la parte discreta

Se definen cuatro estados discretos. El estado S_1 se define para indicar que el nivel en el tanque es bajo $h \leq h_1$. El estado S_2 indica que el nivel en el tanque se encuentra en el nivel normal $h_1 < h < h_2$. El estado S_3 indica un nivel alto en el tanque $h > h_2$. Un cuarto estado S_4 indica que no hay actividad dinámica en el tanque $h = cte$ y $h_1 < h < h_2$.

La razón para considerar estos cuatro estados discretos radica en que en cada uno de ellos, la evolución dinámica del nivel h es diferente por lo que deberá ser considerado esto en el modelo del autómata híbrido del sistema.

Durante el estado S_1 no se realiza el llenado de botellas y por lo tanto el sensor b_2 estará apagado. En el estado S_2 se tendrá una dinámica de llenado de botella. Así, el sensor b_2 se encenderá cuando se llene la botella.

Para la presencia de las botellas se definen dos estados discretos. Durante el estado S_1 indica cuando la banda transportadora está en movimiento y por lo tanto el sensor b_1 estará apagado. En el estado S_2 hay presencia de botella, lo que significa que el sensor b_1 estará encendido y la banda transportadora no se moverá hasta que haya una botella llena.

4. Analizar las acciones de control

Especificaciones para la parte continua

Aquí se definen las restricciones en el espacio de estado que la parte continua debe satisfacer. En nuestro ejemplo, se requiere que el nivel se mantenga entre las cotas h_1 y h_2 , por lo tanto para una operación eficiente del tanque se requiere que se cumpla la condición $h_1 < h < h_2$.

Especificaciones para la parte discreta

Para asegurar que el nivel se mantenga entre las cotas h_1 y h_2 , y que el llenado de las botellas se realice en forma adecuada considerando la señal AB , se toman acciones de control en cada estado discreto (nodos).

En cada nodo se toman acciones discretas sobre los actuadores de las válvulas de llenado V_1 y de descarga V_2 . En el nodo S_1 , debido a que el sensor de presencia de las

botellas no se encuentra activado, la válvula de llenado está abierta y la de descarga cerrada, lo cual afecta la dinámica continua en el nodo ya que evita el flujo de salida del tanque q_o . Esta acción se realiza con la finalidad de que el tanque alcance un nivel por arriba de h_1 de acuerdo con las especificaciones establecidas.

En el nodo S_2 , debido a la presencia de una botella ambas válvulas V_1 y V_2 se abrirán para que se lleve a cabo el llenado de la botella y el nivel del tanque alimentador se mantenga por encima de la cota h_1 . Nótese que aquí se tiene una dinámica continua diferente en las variaciones del nivel del tanque.

En el nodo S_3 , debido a que en este estado discreto el nivel del tanque es $h > h_2$, se mantendrá cerrada la válvula de llenado V_1 del tanque y se abrirá la válvula de descarga V_2 debido a la presencia de una botella.

En el nodo S_4 se considera que el tanque se encuentra en un nivel normal o alto y no se ha detectado ninguna botella por lo que ambas válvulas, V_1 y V_2 estarán cerradas.

Como se observa las acciones de control que se llevan a cabo para satisfacer las especificaciones, tanto continuas como discretas, son del tipo encendido o apagado. Lo que significa que no hay necesidad de tomar alguna acción continua directa sobre el sistema.

5. Integración de las entidades continuas y discretas. Aquí se utiliza el modelo del autómata híbrido para realizar la integración de las entidades.

Considere el modelo del autómata híbrido del sistema (Figura 4.2)
 $H = \{X, S, flujo, E, F, \Sigma, init\}$ donde $X = \{h\}$, $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $\Sigma = \{AB\}$ $E = \{T_1, \dots, T_{11}\}$,
 $F = \{F(T_1), \dots, F(T_{11})\}$, $init = \{h = h_0\}$ y ecuaciones de flujo :

$$\begin{aligned} \text{flujo}(S_1) \rightarrow \dot{h} &= \frac{q_i}{A} \\ \text{flujo}(S_2) \rightarrow \dot{h} &= \frac{-Rh + q_i}{A} \\ \text{flujo}(S_3) \rightarrow \dot{h} &= -\frac{Rh}{A} \\ \text{flujo}(S_4) \rightarrow \dot{h} &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Considere el flujo de llenado del tanque $q_i = 1.2 \text{ lt/seg}$, la constante de válvula $R = 3$, el área de la sección transversal del tanque $A = 1.767 \text{ m}^2$, la altura del tanque de 3 m y los límites de acotamiento del tanque $h_1 = 1 \text{ m}$ en la parte inferior y $h_2 = 2.5 \text{ m}$ en la parte superior.

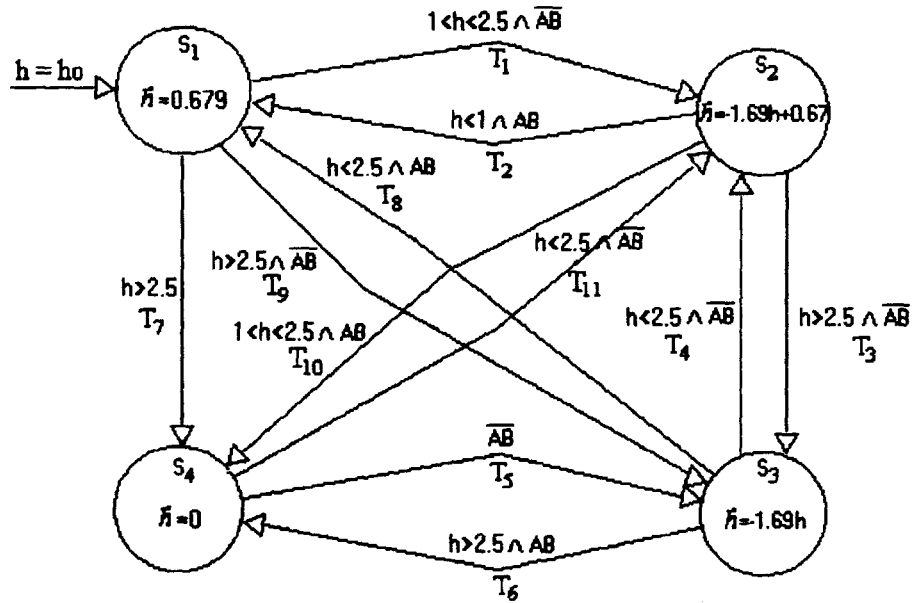


Figura 4.2. Modelo del autómata híbrido del sistema de llenado de botellas.

Considere el modelo del autómata híbrido que representa el comportamiento del sensor de llenado de la botella b_2 (Figura 4.3) $H = \{X, S, \text{flujo}, E, F, \Sigma, \text{init}\}$ donde $X = \{h_b\}$, $S = \{s_1, s_2\}$, $\Sigma = \{b_1\}$, $E = \{T_1, T_2\}$, $F = \{F(T_1), F(T_2)\}$, $\text{init} = \{h_b = 0\}$ y ecuaciones de flujo :

$$\begin{aligned} \text{flujo}(S_1) \rightarrow \dot{h}_b &= \frac{h}{A_b} \\ \text{flujo}(S_2) \rightarrow \dot{h}_b &= 0 \end{aligned} \quad 4.13$$

El área de la sección transversal de la botella es $A_b = 0.0266 \text{ m}^2$. La velocidad de la banda transportadora es de 6 m/min y la separación entre las botellas es 0.08 m .

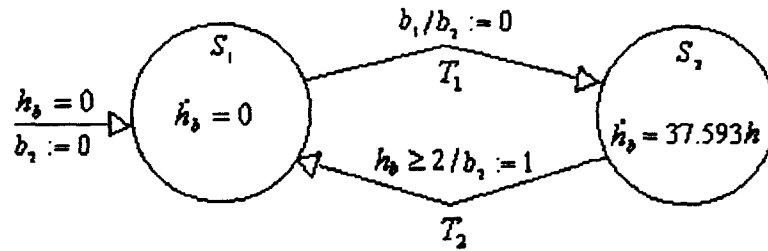


Figura 4.3. Modelo del autómata híbrido que representa el llenado de las botellas.

Considere el modelo del autómata temporizado que representa el comportamiento del sensor de presencia de la botella b_1 (Figura 4.4) $H = \{X, S, \text{flujo}, E, F, \Sigma, \text{init}\}$ donde $X = \{y\}$, $S = \{s_1, s_2\}$, $\Sigma = \{b_2\}$, $E = \{T_1, T_2\}$, $F = \{F(T_1), F(T_2)\}$, $q_0 = \{S_1\}$.

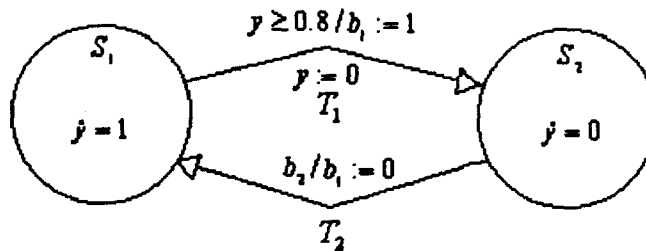


Figura 4.4. Modelo del autómata temporizado que representa la presencia de las botellas.

Los autómatas definidos anteriormente trabajan en forma paralela y están relacionados entre si por etiquetas, ya que por medio de ellas se autoriza o se prohíbe la ejecución de las transiciones.

6.- Análisis del sistema híbrido obtenido

A partir de las condiciones establecidas para la validación de las transiciones, podemos determinar si las transiciones planteadas en el sistema híbrido se habilitan o no, y en consecuencia ajustar el sistema en tal forma que se garantice un comportamiento cíclico adecuado (ciclo límite). El primer modelo obtenido para este sistema se muestra en la Figura 4.2. Para este modelo se realiza el siguiente análisis para cada nodo.

Nodo origen	K_{in}	P_{jq}	K_{jq}	Nodo destino		Condición para la validación de la transición
				AB	\overline{AB}	
S1	h_0	$+\infty$	$1 < h < 2.5$	-	S2	$K_{in} < K_{jq}$
			$h > 2.5$	S4	S3	
S2	$1 < h < 2.5$	0.706	$h < 1$	S1	-	$P_{jq} < K_{jq} < K_{in}$
	$h < 2.5$		$1 < h < 2.5$	S4	S3	
S3	$h > 2.5$	0	$h < 2.5$	S1	S2	$P_{jq} < K_{jq} < K_{in}$
			$h > 2.5$	S4	-	
S4	$h > 2.5$	K_{in}	K_{in}	-	S3	---

Tabla 4.1.

Del resultado expresado en la Tabla 4.1 se observa que para el nodo S_1 tenemos que $P_{jq} = +\infty$ (no existe un punto de equilibrio), por lo que la condición $K_{in} < K_{jq}$ siempre se satisface y las transiciones T_1 , T_7 y T_9 están habilitadas pero no todas son disparables a la vez. Como la transición T_9 está contenida en la transición T_7 , se elimina para evitar conflictos.

Para el nodo S_2 calculamos el punto de equilibrio $P_{jq} = -(b_{jq} / a_{jq}) = 1.2$. Así, para la habilitación de las transiciones T_2 , T_3 y T_{10} a la salida de este nodo, se debe satisfacer la condición $[P_{jq} < K_{jq} \leq K_{in}] + [P_{jq} > K_{jq} \geq K_{in}] = 1$, lo cual nos indica que K_{jq} debe estar colocada entre el punto de equilibrio y K_{in} , de lo contrario las transiciones no se habilitan.

Mediante este análisis observamos (Tabla 4.1) que las transiciones T_3 y T_{11} nunca estarán habilitadas, lo que significa que no son necesarias en el modelo y podemos eliminarlas.

Para el nodo S_3 , el punto de equilibrio es cero. Así, la condición que se debe satisfacer para que las transiciones T_4 , T_6 y T_8 se habiliten es $[P_{jq} < K_{jq} \leq K_{in}] = 1$. Con esta condición se puede afirmar que todas las transiciones a la salida del nodo estarán habilitadas (para cualquier entrada del nodo) pero no todas son disparables a la vez.

Para el nodo S_4 , dado que no existe una dinámica continua durante la permanencia en este estado discreto, la transición T_4 siempre estará habilitada.

Basados en el análisis anterior, si se tiene una continua alimentación de botellas el autómatu híbrido de la Figura 4.5 garantizará la existencia de un ciclo límite para cualquier punto dentro de una región inicial definida.

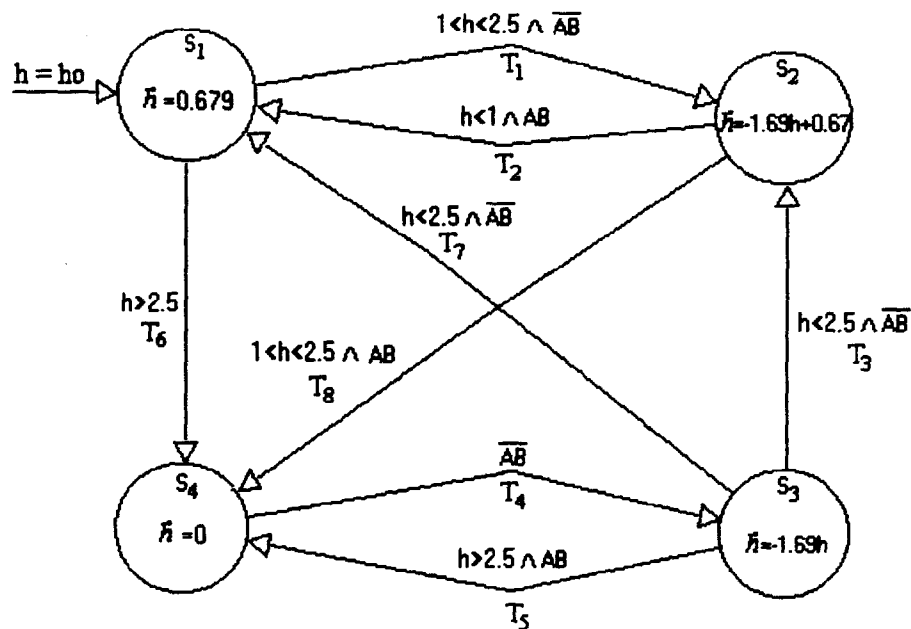


Figura 4.5. Sistema híbrido del tanque con la banda transportadora.

7.- Simulación del sistema y evaluación de resultados

Para llevar a cabo la simulación se empleó el programa *Model Vision Studium 3.0* [19]. Se dan las condiciones iniciales de $h_0 = 0$ y la banda transportadora en movimiento continuo, lo que significa que no hay botella o está llena (AB). Dependiendo de la velocidad de la banda y la separación entre las botellas en un tiempo de 0.8 segundos se detecta la presencia de botella (\overline{AB}) y dependiendo del nivel en el tanque será el tiempo que tarde en llenarse botella. A partir de esto la alimentación de botellas es continua. Las gráficas obtenidas de esta simulación se muestran en la Figuras 4.6 y 4.7.

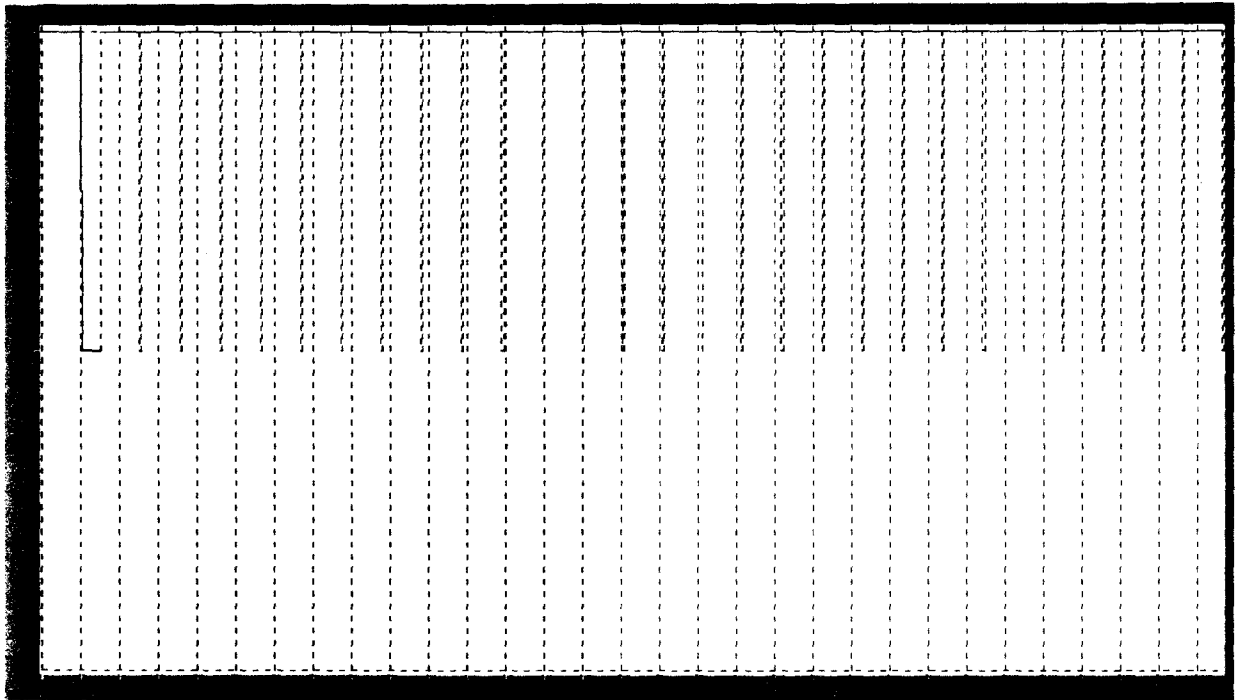


Figura 4.6. Comportamiento de la señal AB para $h_0 = 0$.

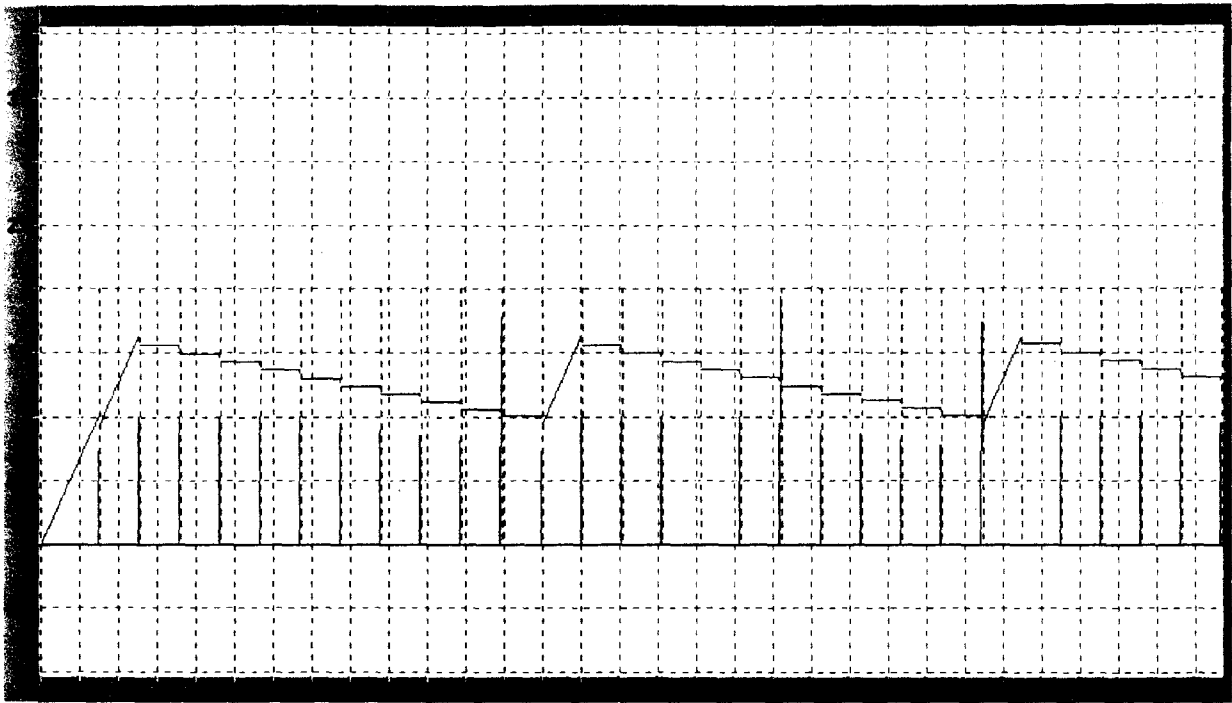


Figura 4.7. Comportamiento del nivel en el tanque y del nivel en la botella para $h_0 = 0$.

Se puede observar en la Figura 4.7 como el comportamiento del sistema híbrido tiende a una estructura cíclica. La variación del nivel se efectúa un rango muy pequeño, lo significa que siempre se estará conmutando entre la región de nivel bajo y la normal después de un cierto tiempo. Esto se puede solucionar aumentando la referencia del nivel.

Para el caso de que la condición inicial sea $1 < h_0 < 2.5$ y la banda transportadora en movimiento continuo. Se puede observar en las Figuras 4.8 y 4.9 como el sistema después de un determinado tiempo entra en una estructura cíclica. Dicha estructura es similar a la de condiciones iniciales iguales a cero. El comportamiento de la señal AB es diferente inicialmente pero cuando se entra a la estructura cíclica es igual que en la condición $h_0 = 0$.

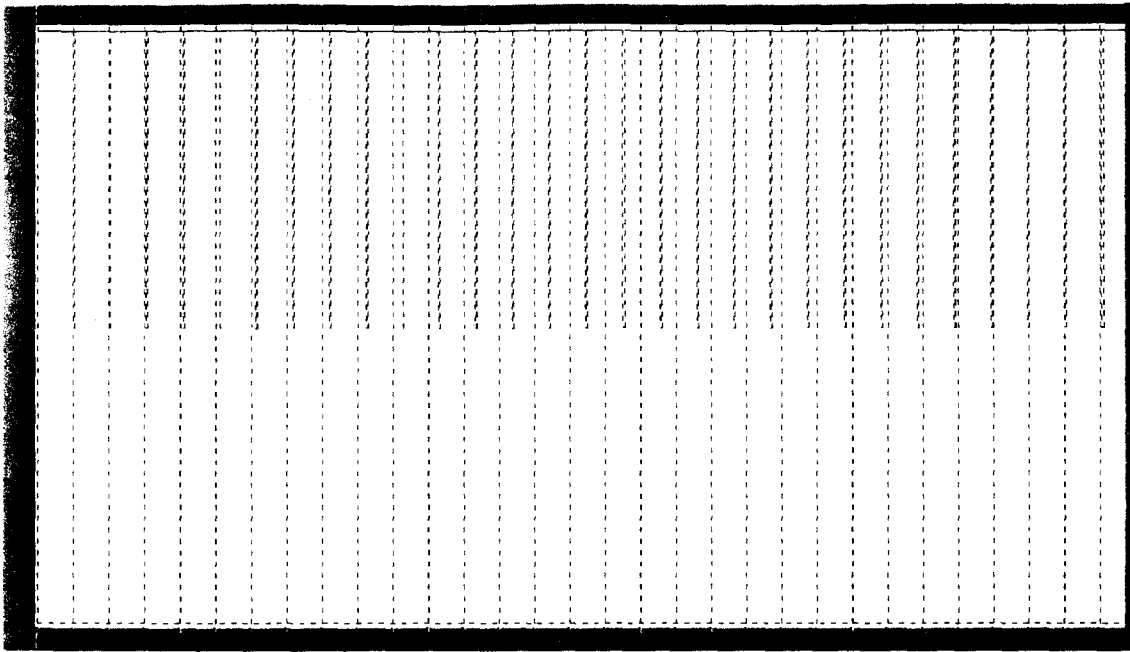


Figura 4.8. Comportamiento de la señal AB para $1 < h_0 < 2.5$.

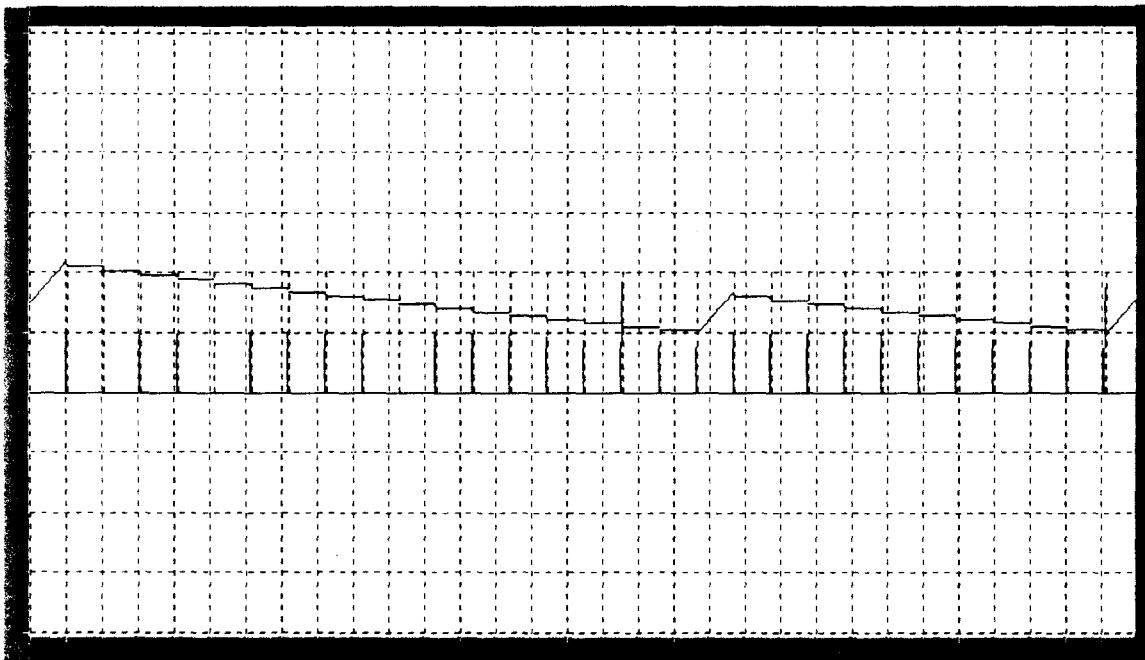


Figura 4.9 Comportamiento del nivel en el tanque y del nivel en la botella para $1 < h_0 < 2.5$.

Ahora para el caso en que la condición inicial sea $h_0 > 2.5$, tenemos que la señal AB tiene un comportamiento diferente debido a que la velocidad de llenado depende del nivel en el tanque, esto se muestra en la Figura 4.10. El comportamiento del nivel (Figura

4.11) después de un determinado tiempo tiende a la estructura cíclica observada anteriormente en las Figuras 4.7. y 4.9.

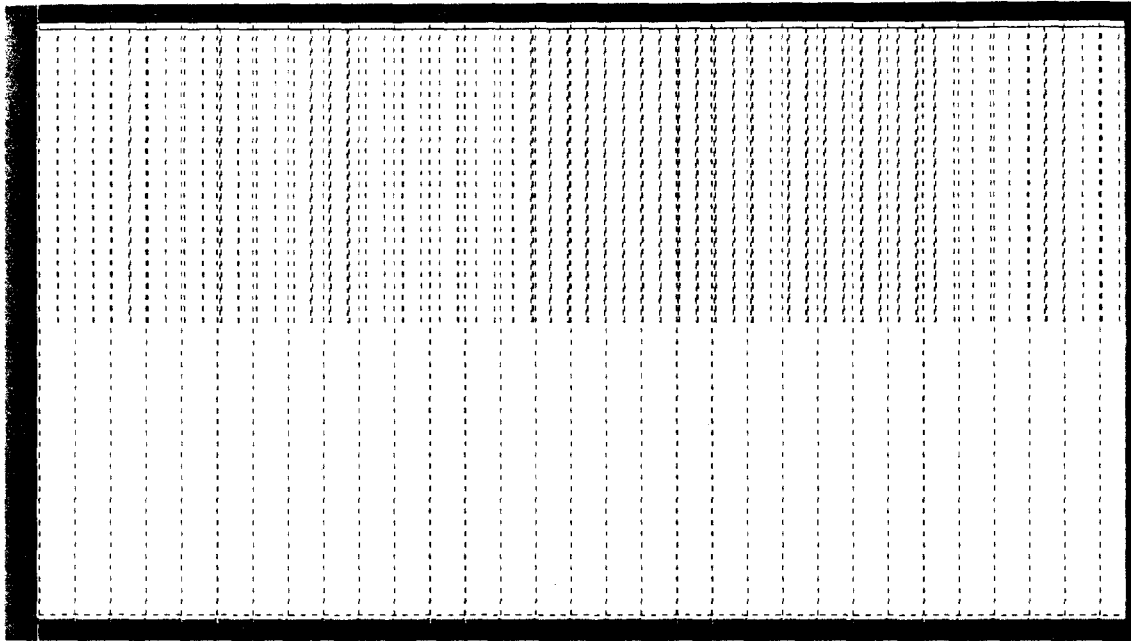


Figura 4.11. Comportamiento de la señal AB para $h_0 > 2.5$.

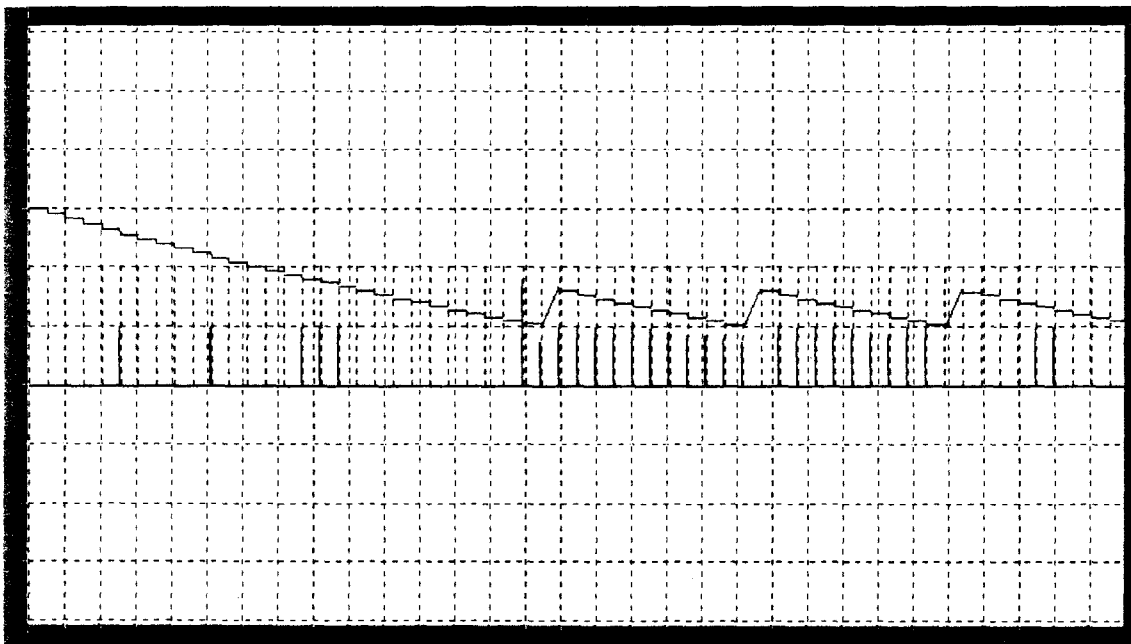


Figura 4.10 Comportamiento del nivel en el tanque y la botella para $h_0 > 2.5$.

Después del análisis previamente realizado se observa que para las condiciones de operación establecidas llegamos a un ciclo limite en el comportamiento dinámico del nivel del tanque para cualquier valor inicial de nivel.

4.4 Aplicación del algoritmo de análisis al sistema de llenado de botellas

En las siguientes apartados de esta sección se presenta la aplicación del algoritmo de análisis a dos sistemas. El primero es un sistema de llenado de botellas y el segundo un sistema de mezclado de dos sustancias químicas.

1 . Cálculo de los puntos de equilibrio en cada nodo.

Para el nodo S_1 tenemos que el punto de equilibrio es: $P_{1q} = +\infty$. Esto nos indica una dinámica continua creciente en forma de rampa.

Para el nodo S_2 tenemos que el punto de equilibrio es: $P_{2q} = 0.4$.

Para el nodo S_3 y S_4 tenemos que el punto de equilibrio es: $P_{3q} = 0$ y $P_{4q} = h = cte > 1$ respectivamente.

Con la ayuda del punto de equilibrio podemos observar la tendencia de la dinámica continua.

- 2 . Validar las transiciones de salida de cada nodo considerando sus transiciones de entrada y punto de equilibrio .**
- 3 . Calcular el tiempo mínimo (∂_{\min}) y máximo (∂_{\max}) de residencia en los nodos y establecer las relaciones que permitan la habilitación o inhabilitación de las transiciones en los nodos.**

- Para el nodo S_1

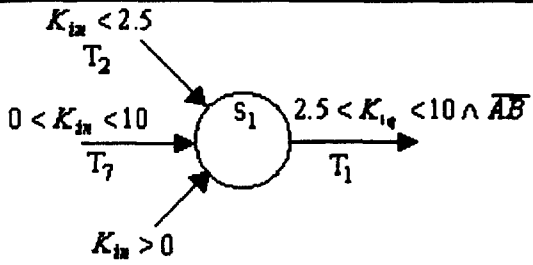
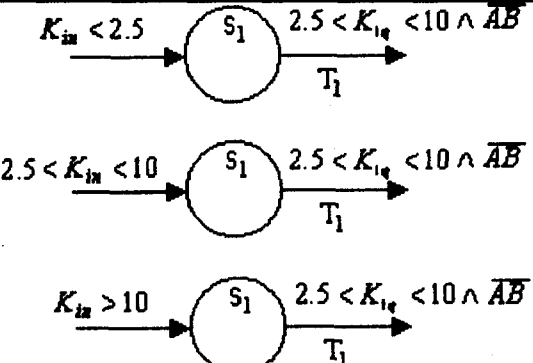
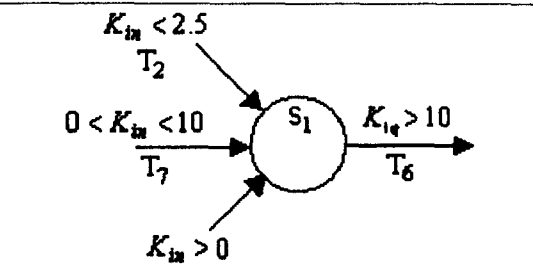
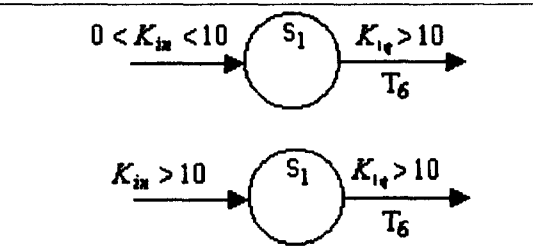
Transiciones de entrada y salida	Valores de entrada al nodo y condición de salida		
		$\partial_{\min} = 4.1666 - 1.666K_{in}$ $\partial_{\min} = 0$ No esta validada	$\partial_{\max} = 16.666 - 1.666K_{in}$ $\partial_{\max} = 16.666 - 1.666K_{in}$ No esta validada
		$\partial_{\min} = 16.666 - 1.666K_{in}$ $\partial_{\min} = 0$	$\partial_{\max} = +\infty$ $\partial_{\max} = +\infty$

Tabla 4.2

- Para el nodo S_2

Transiciones de entrada y salida	Valores de entrada al nodo			
	$K_{1e} < 2.5$	$K_{1e} < 2.5 \wedge AB$	$\partial_{\min} = 0$	$\partial_{\max} = +\infty$
	$2.5 < K_{in} < 10$	$K_{1e} < 2.5 \wedge AB$	$\partial_{\min} = -2 \ln \left(\frac{1.3}{K_{in} - 1.2} \right)$	$\partial_{\max} = +\infty$
	$K_{1e} < 2.5$	$2.5 < K_{1e} < 10 \wedge AB$	No esta validada	No esta validada
	$2.5 < K_{in} < 10$	$2.5 < K_{1e} < 10 \wedge AB$	$\partial_{\min} = 0$	$\partial_{\max} = -2 \ln \left(\frac{1.3}{K_{in} - 1.2} \right)$

Tabla 4.3

- Para el nodo S_3

Transiciones de entrada y salida	Valores de entrada al nodo		
	$2.5 < K_{in} < 10$	$\partial_{min} = 0$	$\partial_{max} = +\infty$
	$K_{in} > 10$	$\partial_{min} = 2 \ln\left(\frac{9.9}{K_{in}}\right)$	$\partial_{max} = +\infty$
	$2.5 < K_{in} < 10$	$\partial_{min} = 0$	$\partial_{max} = +\infty^*$
	$K_{in} > 10$	$\partial_{min} = 2 \ln\left(\frac{9.9}{K_{in}}\right)$	$\partial_{max} = +\infty$
	$2.5 < K_{in} < 10$	No esta validada	No esta validada
	$K_{in} > 10$	$\partial_{min} = 0$	$\partial_{max} = 2 \ln\left(\frac{10}{K_{in}}\right)$

Tabla 4.4

- Para el nodo S_4

Transiciones de entrada y salida	Valores de entrada al nodo	
		$\partial_{\min} = 0$ $\partial_{\max} = +\infty$
		$\partial_{\min} = 0$ $\partial_{\max} = +\infty$

Tabla 4.5

3. Recorrer todas las posibles trayectorias que se generen, tomando en cuenta los tiempos de permanencia antes calculados.

Si el tiempo de ocurrencia de la variable discreta ($tovd$) se encuentra en el rango de $\partial_{\max} > tovd > \partial_{\min}$ para cada transición y cada nodo correspondiente, para los tiempos mínimos y máximos antes calculados se tienen las siguientes trayectorias. Hay que notar que si $tovd < \partial_{\min}$, el tiempo de residencia en el nodo es ∂_{\min} , para los demás casos es $tovd$. De acuerdo a la solución de la ecuación diferencial para los tiempos mínimos antes calculados tenemos:

Para S_1

$$h = 0.679\partial_{\min} + K_{in} \quad (4.14)$$

Para S_2

$$h = 0.4 - 0.4e^{-1.6975\partial_{\min}} + K_{in}e^{-1.697\partial_{\min}} \quad (4.15)$$

Para S_3

$$h = K_{in}e^{-1.697\partial_{\min}} \quad (4.16)$$

Para S_4

$$h = K_{in} \quad \forall h \quad (4.17)$$

Basándonos en la solución de la ecuación continua (4.14, 4.15, 4.16 y 4.17) y el tiempo de permanencia podemos saber la trayectoria que se genera para un K_{in} dado. A partir de esto se calculan las diferentes trayectorias para tres valores de entrada. Esto es:

- Para $K_{in} < 1$

Valor de entrada al nodo $h < 1$	Nodo	Transición disparada
$K_{in} < 1$	S ₁	T ₁
$K_{in} > 1$	S ₂	T ₂
$K_{in} < 1$	S ₁	T ₁
$K_{in} > 1$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃

$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₂
$K_{in} < 1$	S ₁	T ₁
$K_{in} > 1$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄

Tabla 4.6

- Para $1 < K_{in} < 2.5$

Valor de entrada al nodo	Nodo	Transición disparada
$1 < h < 2.5$		
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₁	T ₁
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃

$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈

$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₂
$K_{in} < 1$	S ₁	T ₁
$K_{in} > 1$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄

Tabla 4.7

- Para $K_{in} > 2.5$

Valor de entrada al nodo $h > 2.5$	Nodo	Transición disparada
$K_{in} > 2.5$	S ₁	T ₆
$K_{in} > 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} > 2.5$	S ₃	T ₅
$K_{in} > 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} > 2.5$	S ₃	T ₅
$K_{in} > 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} > 2.5$	S ₃	T ₅
$K_{in} > 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} > 2.5$	S ₃	T ₅

$K_{in} > 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} > 2.5$	S ₃	T ₅
$K_{in} > 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} > 2.5$	S ₃	T ₃
$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃

$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈

$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₂	T ₂
$K_{in} < 1$	S ₁	T ₁
$K_{in} > 1$	S ₂	T ₈
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₄	T ₄
$1 < K_{in} < 2.5$	S ₃	T ₃

$K_{in} < 2.5$	S_2	T_8
$1 < K_{in} < 2.5$	S_4	T_4
$1 < K_{in} < 2.5$	S_3	T_3
$K_{in} < 2.5$	S_2	T_8
$1 < K_{in} < 2.5$	S_4	T_4

Tabla 4.8

4. Verificar cuales trayectorias hacen que el sistema sea estable.

Para el rango de valores $h < 1$ se puede observar en la Tabla 4.6, que se genera una trayectoria entre los nodos de $S_1 - S_2 - S_4 - S_3 - S_2$. En comparación con las Tablas 4.7 y 4.8, la trayectoria es corta y el comportamiento tiende rápidamente a un estado estable.

Cuando el rango de valores de entrada se encuentra entre $1 < h < 2.5$, se observa en la Tabla 4.7 que se generan dos trayectorias, la primera es una trayectoria larga de $S_1 - S_4 - S_3 - S_4 - S_3 - S_4 - S_3 - S_2$ y la segunda es igual a la que se obtuvo en la Tabla 4.7 con la condición inicial igual a cero.

Cuando el rango de valores de entrada se encuentra en $h > 2.5$, se observa en la Tabla 4.8 que se generan también dos trayectorias, que igual para el caso anterior, la primera es la más larga y la segunda es la misma que la se obtuvo en la Tabla 4.6.

Tomando en cuenta las trayectorias generadas podemos observar que el sistema no cumple con el requisito de que el nivel en el tanque esté dado por $1 < h < 2.5$. Esto ya se había visto en la simulación realizada anteriormente.

Para solucionar esto, matemáticamente se puede alterar la dinámica de la ecuación continua, ocasionando un cambio en el punto de equilibrio de la ecuación. Con la selección adecuado del valor de los coeficientes de la ecuación se puede ajustar el punto de

equilibrio, para que el nivel no caiga por debajo de las especificaciones cuando se entre a un estado estable.

Físicamente el cambio en la dinámica implicaría:

- Aumentar la velocidad del flujo de entrada, esto se puede lograr reduciendo la resistencia de la válvula de entrada.
- Disminuir la velocidad del flujo de salida, lo cual se puede lograr aumentando la resistencia de la válvula de salida.

Se podría aumentar el nivel en el tanque espaciando la distribución de las botellas en la banda transportadora, pero esto afectaría la producción y no sería rentable.

4.5 Aplicación de la metodología de modelado propuesta al mezclado de dos sustancias químicas

Considere el sistema de tanques de la Figura 4.11. Asumimos que los dos componentes de flujos, el componente A del tanque 1 y el componente B del tanque 2, son mezclados en el tanque 3. Adicionalmente se asume que cuando los flujos de entrada q_A y q_B , están activados, son aproximadamente constantes. La razón para esta suposición es que el flujo q_A del tanque 1 es controlado por una bomba de encendido / apagado que da un flujo casi constante. En el tanque 2 el nivel es controlado por una válvula de entrada por medio de sensores binarios. Esto implica que el flujo q_B es aproximadamente constante cuando la válvula de salida está abierta. Se requiere efectuar el mezclado de los dos componentes cuidando los efectos de la reacción; después del mezclado se deposita la mezcla en un recipiente.

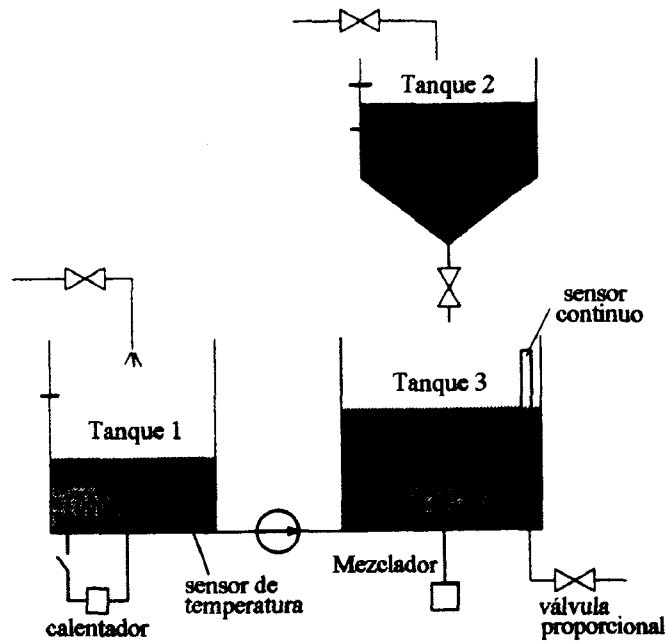


Figura 4.11. Mezclado de dos sustancias químicas.

1.- Identificar las entidades continuas y/o discretas que integran el proceso.

Entidades continuas

- El flujo q_A del tanque 1.
- El flujo q_B del tanque 2.
- El volumen del tanque 3.

Entidades discretas

- Estado de la bomba del tanque 1 (encendida o apagada).
- Estado de la válvula de salida del tanque 2 (encendida o apagada).
- Estado de la válvula de salida del tanque 3 (encendida o apagada).
- Agitador (encendido o apagado).

2.- Modelación de la parte continua

Podemos definir los volúmenes parciales de los componentes A y B como:

$$\begin{aligned} \dot{V}_A(t) &= q_A(t) \\ \dot{V}_B(t) &= q_B(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

El volumen V_A y V_B se definen como variables de estado en 4.18 y el volumen total en el tanque 3 en modo de llenado es $V(t) = V_A(t) + V_B(t)$.

La reducción en el volumen del tanque 3 se define como:

$$\dot{V} = -q_C \quad (4.19)$$

donde $-q_C$ es el flujo de descarga del tanque 3.

3.- Modelación de la parte discreta

Se definen cuatro estados discretos. El estado S_1 se define para indicar que ambos flujos están activos. El estado S_2 expresa que el flujo q_B se encuentra activado y el flujo q_A desactivado. El estado S_3 indica que el flujo q_A se encuentra activado y el flujo q_B desactivado. Un cuarto estado S_4 representa que el tanque 3 esta siendo vaciado.

4.- Síntesis del controlador

Especificaciones para la parte continua

Se tiene una condición de frontera en un tiempo final t_f :

$$\begin{aligned} V_A(t_f) &= V_{Af} \\ V_B(t_f) &= V_{Bf} \end{aligned} \tag{4.20}$$

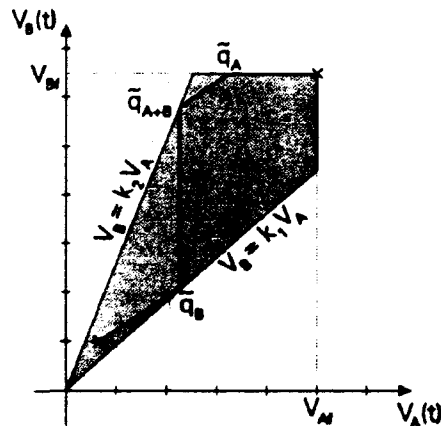
Para prevenir reacciones no deseables cuando los dos componentes son mezclados, también se requiere que:

$$k_1 V_A(t) \leq V_B(t) \leq k_2 V_A(t) \tag{4.21}$$

Se asume también que los flujos q_A y q_B cuando están presentes, están relacionados por $q_B < k_1 q_A$. La pendiente de las trayectorias esta dada por:

$$\frac{dV_B}{dV_A} = \frac{q_B(t)}{q_A(t)} \tag{4.22}$$

lo que define una región permitida para la evolución continua (Figura 4.12).



4.12. Región permitida que satisface las restricciones para la evolución continua.

Especificaciones para la parte discreta

Para asegurar las especificaciones anteriores se puedan cumplir se toman diferentes acciones de control dentro de los estados discretos (nodos). En el nodo S_1 se toman acciones discretas sobre la bomba y el actuador de la válvula de salida del tanque 2 cuando

$V_B(t) \geq k_2 V_A(t)$. En el nodo S_2 , se apaga la bomba del tanque 1, por lo que solo está presente el flujo q_B , esto es para cumplir con la condición de $V_B(t) \leq k_1 V_A(t)$ o cuando $V_A(t) \geq V_{Af}$. En el nodo S_3 , se cierra la válvula de salida del tanque 2, por lo que solo el flujo q_A está presente, para cumplir con la condición de $V_B(t) \geq V_{Bf}$.

5.- Integración de las entidades continuas y discretas. Aquí se utiliza el modelo del autómata híbrido para realizar la integración de las entidades.

Considere el modelo autómata híbrido del sistema (Figura 4.13) $H = \{X, S, flujo, E, F, \Sigma, init\}$ donde $X = \{V_A, V_B\}$, $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $E = \{T_1, \dots, T_9\}$, $F = \{F(T_1), \dots, F(T_9)\}$, $init = \{V_A = q_A, V_B = q_B\}$ y ecuaciones de flujo :

$$\begin{aligned} \dot{V}_A(t) &= q_A(t) \\ \dot{V}_B(t) &= q_B(t) \\ \dot{V} &= -q_C(t) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Asumimos que el valor de las constantes es $k_1 = 0.8$ y $k_2 = 1.2$ y los limites para los volúmenes parciales en $V_{Af} = 10$ y $V_{Bf} = 9$.

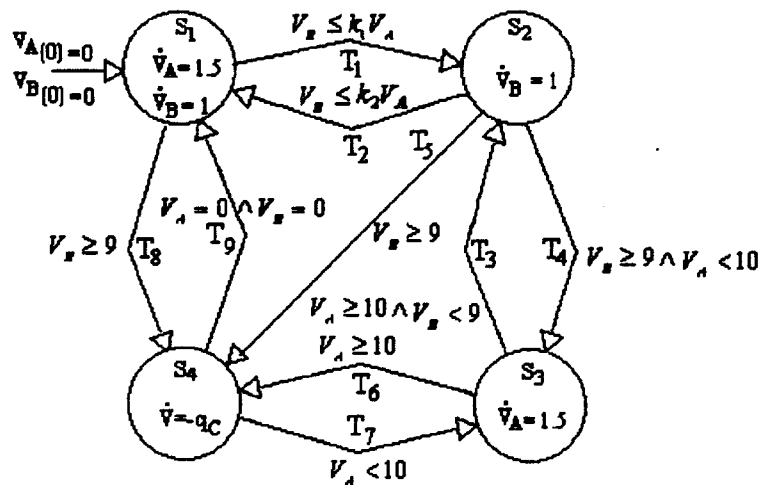


Figura 4.13. Modelo del autómata híbrido para el mezclado de dos sustancias.

6.- Análisis del sistema híbrido obtenido

A partir de las condiciones establecidas para la validación de las transiciones, podemos determinar si las transiciones planteadas en el sistema híbrido se habilitan o no. El primer modelo obtenido para este sistema se muestra en la Figura 4.2. Para este modelo se realiza el siguiente análisis para cada nodo.

Nodo _{origen}	K_{in}	P_{jq}	K_{jq}	Nodo _{destino}	Condición para la validación de la transición
S ₁	$V_A = 0$ \wedge $V_B = 0$ $V_B \geq k_2 V_A$	$+\infty$	$V_B \leq k_1 V_A$ $V_B \geq 9$	S ₂ S ₄	$K_{in} < K_{jq}$
S ₂	$V_B \leq k_1 V_A$ $V_A \geq 10$ \wedge $V_B < 9$ $V_B \geq 9$	$+\infty$	$V_B \geq k_2 V_A$ $V_A \geq 10$ \wedge $V_B < 9$ $V_B \geq 9$	S ₁ S ₃ S ₄	$K_{in} < K_{jq}$
S ₃	$V_B \geq 9$ \wedge $V_A < 10$ $V_A < 10$	$+\infty$	$V_A \geq 10$ \wedge $V_B < 9$ $V_A \geq 10$	S ₂ S ₄	$K_{in} < K_{jq}$
S ₄	$V_B \geq 9$	$-\infty$	$V_A \leq 10$	S ₃	$K_{in} < K_{jq}$

	$V_A \geq 10$		$V_A = 0$ \wedge $V_B = 0$	S_1	
--	---------------	--	------------------------------------	-------	--

Tabla 4.9

Del resultado expresado en la Tabla 4.9 se observa que todas las transiciones se habilitan en un tiempo dado, lo que significa que ninguna se especifico de más.

7.- Simulación del sistema y evaluación de resultados

Para llevar a cabo la simulación se empleo el programa *Model Vision Studium 3.0* [19], se asume que el flujo $q_A = 1.5$ y el flujo $q_B = 1$. Los volúmenes son inicialmente cero, condición que se debe mantener antes de preparar una nueva mezcla. El comportamiento del volumen V_A y el volumen V_B se muestran en la Figura 4.14.

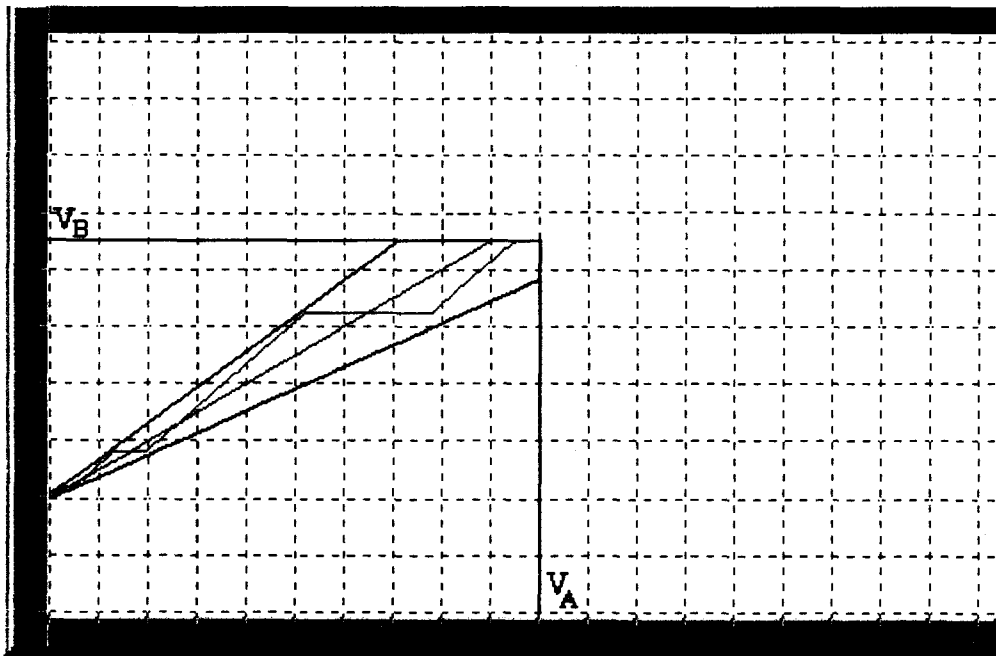


Figura 4.14. Comportamiento del volumen V_A respecto del volumen V_B .

En la Figura 4.14 se observa como la evolución continua se restringe a una región especificada por las condiciones del proceso.

4.6 Aplicación del algoritmo de análisis al mezclado de dos sustancias químicas

1. Cálculo de los puntos de equilibrio en cada nodo.

Para el nodo S_1, S_2, S_3 tenemos que el punto de equilibrio es: $P_{j_i} = +\infty$. Esto nos indica una dinámica continua creciente en forma de rampa.

Para el nodo S_4 tenemos que la dinámica es decreciente, por lo que su punto de equilibrio es $P_{j_4} = -\infty$.

2. Validar las transiciones de salida de cada nodo considerando sus transiciones de entrada y punto de equilibrio.
3. Calcular el tiempo mínimo (∂_{\min}) y máximo (∂_{\max}) de residencia en los nodos y establecer las relaciones que permitan la habilitación o inhabilitación de las transiciones en los nodos.

- Para el nodo S_1

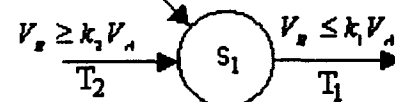
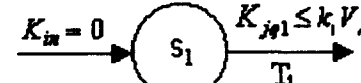
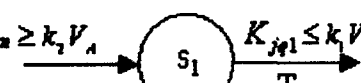
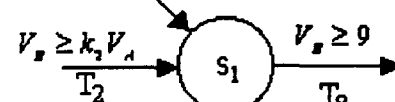
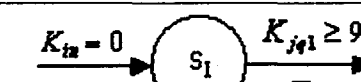
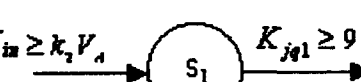
Transiciones de entrada y salida	Valores de entrada al nodo		
$V_A = 0 \wedge V_B = 0$ T_9 $V_B \geq k_2 V_A$ T_2 	$K_{in} = 0$ 	$\partial_{\min} = k_1 V_A - K_{in}$	$\partial_{\max} = +\infty$
	$K_{in} \geq k_2 V_A$ 	$\partial_{\min} = k_1 V_A - k_{in}$	$\partial_{\max} = +\infty$
$V_A = 0 \wedge V_B = 0$ T_9 $V_B \geq k_2 V_A$ T_2 	$K_{in} = 0$ 	$\partial_{\min} = 9 - K_{in}$	$\partial_{\max} = +\infty$
	$K_{in} \geq k_2 V_A$ 	$\partial_{\min} = 9 - K_{in}$	$\partial_{\max} = +\infty$

Tabla 4.10

- Para el nodo S_2

Transiciones de entrada y salida	Valores de entrada al nodo	
	$K_{in} < 9$	$\partial_{min} = k_2 V_A - k_{in}$ $\partial_{max} = +\infty$
	$K_{in} \leq k_1 V_A$	$\partial_{min} = k_2 V_A - k_{in}$ $\partial_{max} = +\infty$
	$K_{in} < 9$	$\partial_{min} = 9 - k_{in}$ $\partial_{max} = +\infty$
	$K_{in} \leq k_1 V_A$	$\partial_{min} = 9 - K_{in}$ $\partial_{max} = +\infty$
	$K_{in} < 9$	$\partial_{min} = 9 - k_{in}$ $\partial_{max} = +\infty$
	$K_{in} \leq k_1 V_A$	$\partial_{min} = 9 - K_{in}$ $\partial_{max} = +\infty$

Tabla 4.11

- Para el nodo S_3

Transiciones de entrada y salida	Valores de entrada al nodo	
	$K_{in2} < 10$	$\partial_{min} = \frac{10 + k_{in2}}{1.5}$ $\partial_{max} = +\infty$
	$K_{in} \geq 9 \wedge K_{in2} < 10$	No esta validada No esta validada
	$K_{in2} < 10$	$\partial_{min} = \frac{10 + K_{in2}}{1.5}$ $\partial_{max} = +\infty$
	$K_{in} \geq 9 \wedge K_{in2} < 10$	$\partial_{min} = \frac{10 + K_{in2}}{1.5}$ $\partial_{max} = +\infty$

Tabla 4.12

- Para el nodo S_4

Transiciones de entrada y salida	Valores de entrada al nodo		
		No esta validada	No esta validada
		$\partial_{\min} = \frac{10 - K_{in2}}{1.5}$	$\partial_{\max} = +\infty$
		$\partial_{\min} = K_{in} + \frac{K_{in2}}{1.5}$	$\partial_{\max} = +\infty$
		$\partial_{\min} = K_{in} + \frac{K_{in2}}{1.5}$	$\partial_{\max} = +\infty$

Tabla 4.13

- Recorrer todas las posibles trayectorias que se generen, tomando en cuenta los tiempos de permanencia antes calculados.

Para S_1

$$V_A = 1.5\partial_{\min} + K_{in} \quad (4.24)$$

$$V_B = \partial_{\min} + K_{in}$$

Para S_2

$$V_B = \partial_{\min} + K_{in} \quad (4.25)$$

Para S_3

$$V_A = 1.5\partial_{\min} + K_{in} \quad (4.26)$$

Para S_4

$$V = -q_c \partial_{\min} \tag{4.27}$$

Basándonos en la solución de la ecuación continua y el tiempo de permanencia podemos saber la trayectoria que se genera para un K_m dado. En este caso las condiciones iniciales de entrada que se deben de mantener son que la suma de los volúmenes en el tanque sea igual a cero.

Valor de entrada al nodo	Nodo	Transición disparada	Justificación
$V_A = V_B = 0$	S1	T1	1
$V_B \leq k_1 V_A$	S2	T2	2
$V_B \geq k_2 V_A$	S1	T1	1
$V_B \leq k_1 V_A$	S2	T2	2
$V_B \geq k_2 V_A$	S1	T1	1
$V_B \leq k_1 V_A$	S2	T2	2
$V_B \geq k_2 V_A$	S1	T8	1
$V_B \geq 9 \wedge V_A < 10$	S4	T7	4
$V_B \geq 9 \wedge V_A < 10$	S3	T6	3
$V_B \geq 9 \wedge V_A \geq 10$	S4	T9	4
$V_B = V_A = 0$	S1	T1	1

Tabla 4.14

6 . Verificar cuales trayectorias hacen que el sistema sea estable.

Como se puede observar en la Tabla 4.14, para la especificación de la condición inicial (volumen cero), solo se genera una trayectoria, la cual es cíclica. Si los volúmenes no estuvieran en cero, la trayectoria generada sería mas corta.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este capítulo se presentan las conclusiones de la investigación así como las perspectivas para trabajos futuros.

CAPITULO 5

CONCLUSIONES

Esta investigación surgió por la necesidad de contar con herramientas más precisas y generales para la modelación y el análisis de sistemas híbridos. Como se presentó anteriormente, la modelación de un sistema híbrido siempre presenta dificultades, y por consiguiente, con la aplicación de la metodología propuesta se obtienen resultados favorables. Además, el desarrollo de un algoritmo de análisis permite comprobar si el modelado fue efectuado correctamente; proporcionando una herramienta para visualizar el comportamiento de los sistemas híbridos.

En general, el objetivo de la investigación fue proponer una metodología para el modelado y desarrollar un algoritmo de análisis para sistemas híbridos usando el modelo del autómata híbrido, por lo que éste fue cumplido satisfactoriamente.

PERSPECTIVAS

Las perspectivas para investigaciones futuras son las siguientes:

1. Incluir en los comportamientos dinámicos especificaciones para la parte continua y discreta mas complejas.
2. Generalizar el algoritmo de análisis a sistemas híbridos con dinámicas continuas acopladas.
3. Extender el algoritmo de análisis a fin de comprobar la estabilidad y robustez de controladores diseñados para sistemas híbridos.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

1. Antsaklis, P.J., Nerode, A. "Hybrid Control Systems: An introductory Discussion to the Special Issue". *Automatic Control, IEEE Transactions on*. volumen: 43, pp.457-460, Abril 1998.
2. Antsaklis, P.J., Koutsoukos X.D. "On hybrid control of complex systems: a survey". Department of Electrical Engineering. University of Notre Dame, Notre Dame.
3. Antsaklis, P.J., Stiver, J.A. and Lemmon, M. "Hybrid system modeling and autonomous control systems". Grossman *et al.* (1993). pp. 366-392, 1993.
4. Alur, R., Courcoubetis, C., Henzinger, T.A. and Ho, P-H.. "Hybrid automata: An algorithmic approach to the specification and verification of hybrid systems". Grossman *et al.* (1993). pp. 209-229, 1993.
5. Alur, R. And Dill D. "The theory of timed automata". *Theoretical and Computer Science* 126. pp. 183-235, 1994.
6. Alur, R., Courcoubetis, C., Halbwachs, N., Henzinger, T.A., Ho, P-H., Nicollin, X., Oliveiro, A., Sifakis, J. and Yovine, S. "The algorithmic analysis of hybrid systems". *Theoretical and Computer Science* 138. pp. 3-34, 1995.
7. Bavel, Zamir. "Introduction to the theory of automata". Reston, Va. : Reston Pub. Co., c1983.
8. Branicky, M. "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems". *IEEE Transactions on Automatic Control, Special Issue on Hybrid Systems*, 1998.

9. Brockett, R.W. "Hybrid models for motion control systems". Essays on Control: of the 35th IEEE Conference on Decision and Control. Kobe, Japan. pp. 1190-1195., 1993.
10. Back, A., Guckenheimer, J. and Myers, M. "A dynamical simulation facility for hybrid systems". Grossman *et al.* (1993). pp. 255-267, 1993.
11. Benveniste, A. "Compositional and uniform modelling of hybrid systems". IEEE Transactions on Automatic Control, Special Issue on Hybrid Systems, 1998.
12. Desphande, A., Gollu, A. and Varaiya, P. "The shift programming language and run-time system for dynamic networks of hybrid automata". Transactions on Automatic Control, Special Issue on Hybrid Systems, 1998.
13. Daws, C., Oliveiro, A., Tripakis, S. and Yovine, S. "The tool KRONOS". Alur *et al.* (1996). pp. 208-219, 1996.
14. Favela, A., Alla, H., Flaus, J.M., "Modeling and analysis of time invariant linear hybrid systems", IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, 1998.
15. Favela, A. "Hybrid Automata Models in Continuous-Linear Hybrid Systems Analysis", Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Intelligent Control/Intelligent Systems and Semiotics, Cambridge, MA., pp. 11-16, 1999.
16. Favela, A. Modelisation et analyse du comportement dynamique des systèmes hybrides: une approach basé sur le modèle d'automate hybride. Thèse de Doctorat de l'INPG. Grenoble, France, Octobre 1999.
17. Henzinger, T.A. and Ho, P-H. "HYTECH: The Cornell hybrid technology tool". Antsaklis *et al.* (1995). pp. 265-293, 1995.

18. Henzinger, T.A., Ho, P-H. and Wong-Toi, H. "Algorithmic analysis of nonlinear hybrid systems". Transactions on Automatic Control, Special Issue on Hybrid Systems, 1998.
19. Inihov, D., Kolesov, Y.B., Senichenkov, Y. "Model Vision Studium Standard version 3.0.17", *Experimental Object Technologies (XJ)*, St.-Petersburg State Technical University, 1997.
20. Johansson, M. and Rantzer, A. "Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems". IEEE Transactions on Automatic Control, Special Issue on Hybrid Systems, 1998.
21. Kelley, Dean. "Automata and formal languages : an introduction". Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall, c1995.
22. Lemmon, Michael D., He, Kevin X., Markovsky, I. "Supervisory Hybrid Systems". IEEE Control Systems, 1991.
23. Lemmon, M.D. and Antsaklis, P.J. "Timed automata and robust control: Can we now control complex dynamical systems?". Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control, 1997.
24. Lygeros, J., Godbole, D.N. and Sastry, S. "Multiagent hybrid system desing using game theory and optimal control". Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control. Kobe, Japan- pp. 1190-1195, 1996.
25. Narendra, Kumpati S, Thathachar, Mandayam A.L. "Learning automata : an introduction". Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, c1989.
26. Nerode, A. and Kohn, W. "Models for hybrid systems: Automata, topologies, stability". Grossman *et al.* (1993), pp. 317-356, 1993a.

27. Nerode, A. and Kohn, W. "Multiple agent hybrid control architecture". Grossman *et al.* (1993). Pp. 297-316, 1993b.
28. Pettersson, S. And Lennartson, B. "Stability and robustness of hybrid systems". Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control. Kobe, Japan. 1996.
29. Puri, A. and Varaiya, P. "Verification of hybrid systems using abstractions". Antsaklis *et al.* (1995). pp. 359-369, 1995.
30. Passino, Kevin M., Özgüner, Ü., "Modeling and Analysis of Hybrid Systems: Examples", *Proceedings of the 1991 IEEE International Symposium on Intelligent Control* , pp.13-15, Agosto 1991.
31. Raisch, J. and O'Young, S.D. "Discrete approximation and supervisory control of continuous systems". Transactions on Automatic Control, Special Issue on Hybrid Systems, 1998
32. Schaft, A. J. van der., Schumacher, Johannes. "An introduction to hybrid dynamical systems". New York : Springer, 2000.
33. Stiver, J.A., Antsaklis, P.J. "Modeling and analysis of hybrid control systems". Decision and Control, Proceedings of the 31st IEEE Conference on. volumen: 4, pp. 3748-3751, 1992.
34. Stiver, J.A., Antsaklis, P.J. and Lemmon, M.D. "A logical DES approach to the design of hybrid control systems". Mathl. Comput. Modelling 23(11/12). pp. 55-76, 1996.
35. Titus, M., Egardt, B., Lennartson, B., Pettersson, S. "Hybrid systems in process control". IEEE Control Systems Magazine. volumen: 16 5, pp. 45-56, Octubre 1994.

36. Titus, M. and Egardt, B. "Control design for integrator hybrid system". Transactions on Automatic Control, Special Issue on Hybrid Systems, 1998.
37. Taylor, J.H. and Kebede, D. "Modeling and simulation of hybrid systems in MATLAB". IFAC 13th Triennial Worls Congress. Volumen J. San Francisco, CA. Pp. 275-280, 1996.
38. Tavernini, L. "Differential automata and their discrete simulators". Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 11(6), pp. 665-683, 1987.
39. Ye, H., Michael, A.N. and Hou, L. "Stability theory for hybrid dynamical systems". Transactions on Automatic Control, Special Issue on Hybrid Systems, 1998.
40. Desphande, A. and Varaiya, P. "Viable control of hybrid systems". Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control. Kobe, Japan. pp. 1196-1201, 1996.

ANEXOS

Apéndice A. Guía para el usuario del programa computacional basado en el algoritmo formulado para el análisis de sistemas híbridos

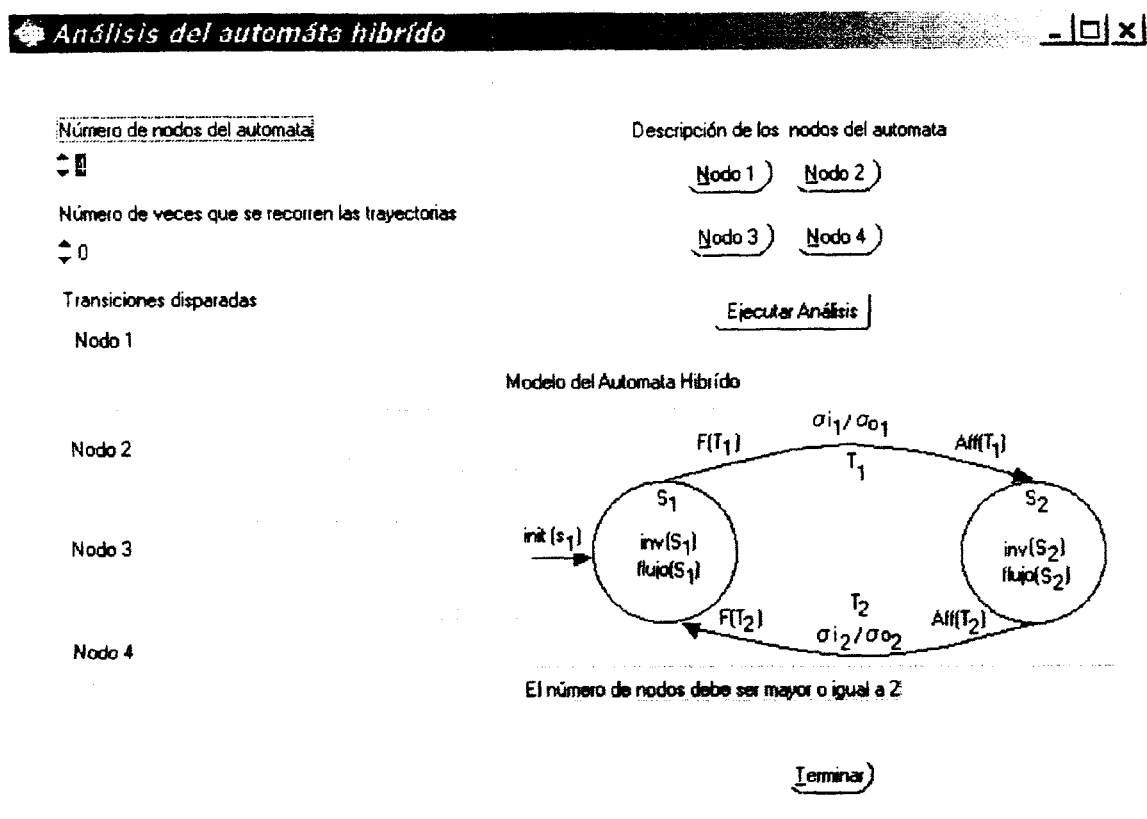
A.1 Introducción

A partir del algoritmo de análisis se desarrollo un programa computacional que permite conocer las trayectorias que se generan en un sistema híbrido a partir de una condición inicial de entrada en el nodo de origen. Las características del programa son las siguientes:

- Las ecuaciones de flujo continuas son de la forma $\dot{x} = Ax + B$ y sólo se permite una ecuación por nodo.
- El numero máximos de nodos que se pueden definir para formar un autómata híbrido es de cuatro nodos.
- El número máximo de transiciones por cada nodo es de tres transiciones.
- La información de la transiciones que se disparan para cada nodo se presentan en una ventana individual que corresponde a dicho nodo.
- Las condiciones iniciales se pueden modificar en cualquier momento.

A.2 Descripción del programa

Al ejecutar el programa aparece la ventana que se muestra en la Figura A.1. Aquí se especifican las características del autómata y parámetros de análisis, como son: el numero de estados discretos (nodos) y el numero de veces que se recorren las trayectorias del autómata.



A.1. Panel principal.

En la figura A.2 se presenta la casilla donde se define el numero de nodos del autómata híbrido.

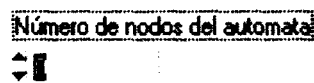


Figura A.2. Casilla para definir el numero de nodos.

En la Figura A.3 se presentan los controles que permiten ingresar los datos a cada uno de los nodos. Con estos botones se ingresa a otro panel donde se puede especificar el comportamiento dinámico continuo, así como las transiciones, condiciones de salto y su relación con otros nodos.

Descripción de los nodos del automata

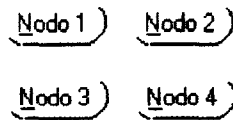


Figura A.3. Botones de comando que permiten definir el comportamiento de cada nodo.

En la Figura A.4 se presenta el panel por medio del cual se ingresan las características del nodo. Aquí se definen los coeficientes de la ecuación continua, y las especificaciones de las transiciones como son: número de transiciones del nodo, especificación de las condiciones de salto, el nodo origen y destino para cada transición y la condición inicial de entrada al nodo.

Definición del nodo

Nodo 1

Ecuación continua de la forma $x' = a \cdot x + b$

Coeficiente a Coeficiente b

↕ 0.00 ↕ 0.00

Numero de transiciones del nodo: $K_{in}(0)$

↕ 1 ↕ 0.000

Transición 1 ↕ 0.00 $< x < \uparrow 0.00$	Transición 2 ↕ 0.00 $< x < \uparrow 0.00$	Transición 3 ↕ 0.00 $< x < \uparrow 0.00$
Destino de la transición T1	Destino de la transición T2	Destino de la transición T3
<input type="radio"/> Nodo 1 <input type="radio"/> Nodo 2 <input type="radio"/> Nodo 3 <input type="radio"/> Nodo 4	<input type="radio"/> Nodo 1 <input type="radio"/> Nodo 2 <input type="radio"/> Nodo 3 <input type="radio"/> Nodo 4	<input type="radio"/> Nodo 1 <input type="radio"/> Nodo 2 <input type="radio"/> Nodo 3 <input type="radio"/> Nodo 4

Figura A.4. Panel para introducir las características del nodo.

Después de haberse introducido las características del nodo se oprime el botón

y posteriormente se oprime el botón .

Una vez que se han definido los nodos que conforman al autómata híbrido, se procede a especificar el número de veces que se recorren las trayectorias, esto se aprecia en la Figura A.5.

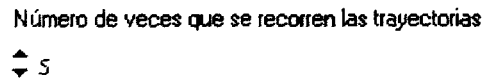



Figura A.5. Casilla para especificar el número de recorridos.

Finalmente, después de haber ejecutado las instrucciones anteriores, se oprime el botón , el cual dará inicio al algoritmo.

Las trayectorias resultantes de la ejecución del algoritmo, se presentan en las casillas correspondientes a cada nodo como se muestra en la Figura A.6.

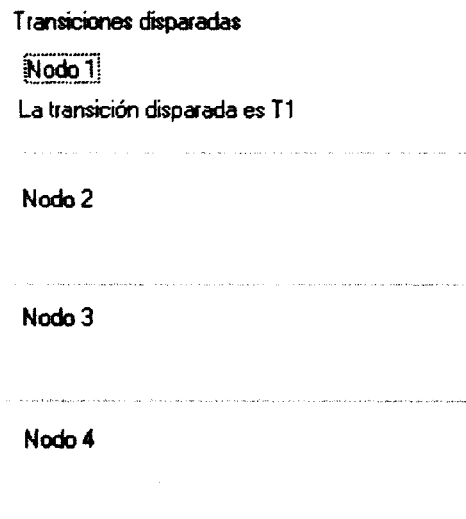



Figura A.6. Casillas donde se registran los resultados del análisis.

Apéndice B. Manual del usuario del programa Model Vision Studium

B1. Introducción

El programa Model Vision Studium es una herramienta para la investigación numérica de sistemas híbridos, los cuales son modelos matemáticos de objetos del mundo real con características discretas y continuas. Tales sistemas son bastante difíciles de describir y de simular debido a que los componentes discretos y continuos pueden tener una interacción compleja.

B.2 Generación de un autómata híbrido usando Model Vision

Ejecute el programa Model Vision Studium. Una vez iniciado el programa para generar un proyecto seleccione en el menú “Project/New..” o usando el botón de comando  en la barra de herramientas. En el dialogo que aparece después de ejecutar el comando escriba el nombre que desee asignarle al proyecto y presione el botón “Create” para que tome efecto el cambio. Ahora se ha creado el espacio de trabajo de su proyecto y se almacenará en el archivo con extensión *.mvb.

En este momento aparecen dos ventanas importantes del proyecto en la ventana principal: la ventana de descripción del proyecto “Project Manager”, en la cual se define si el proyecto es del tipo continuo o híbrido y la ventana para el manejo experimental del proyecto “Test bench”; ésta última se utiliza para definir los elementos que se utilizan para formar el sistema que se desea simular (Figura B.1).

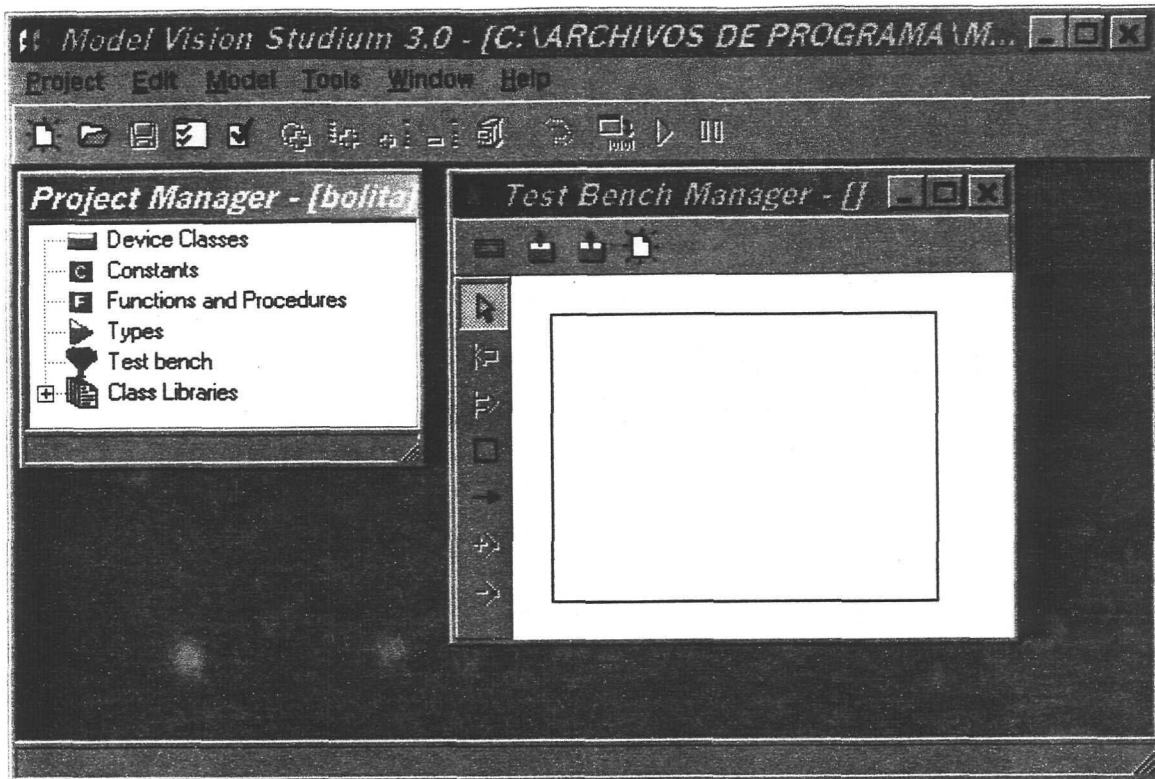



Figura B.1.

Ahora vamos a crear un nuevo dispositivo para realizar su simulación. En la ventana “Test bench” haga click en el botón  y aparecerá la siguiente ventana (Figura B.2)

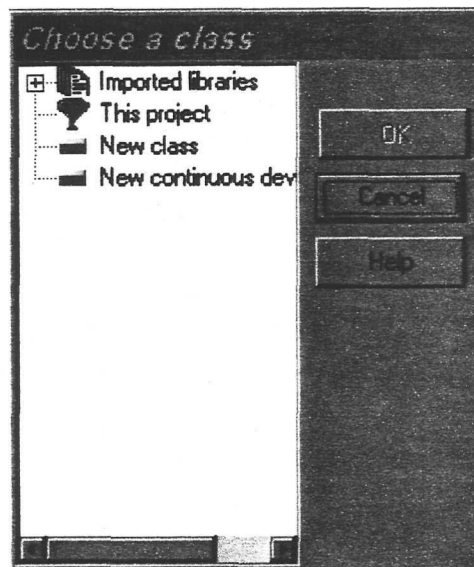


Figura B.2.

Seleccione la opción “New Class”. Ahora:

- Mueva el cursor hasta el punto donde quiera poner el nuevo elemento y presione el botón izquierdo del ratón y manténgalo presionado hasta que forme un rectángulo que va a ser el nuevo elemento.
- Después de liberar el botón izquierdo del ratón, en la ventana “Test bench” aparecerá el elemento creado con el nombre “Dev_1” por omisión.

Haga un doble click sobre el elemento creado y aparecerá una ventana llamada “Class” (Figura B.3).

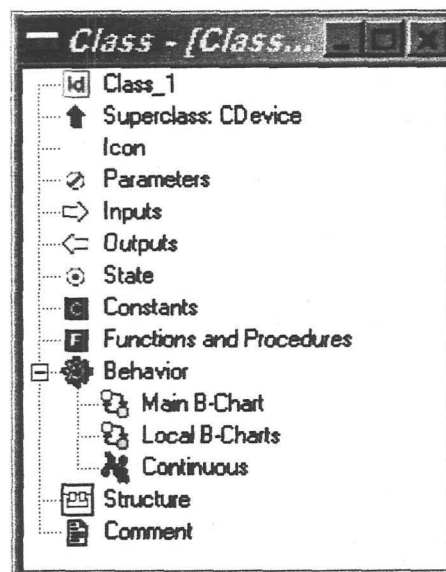


Figura B.3.

En esta ventana se definen las propiedades del elemento que se va a simular. En la opción “Parameters” se definen las características que son fijas del elemento creado. En la opción “Inputs” se definen las entradas al elemento y en la opción “Outputs” las salidas. En la opción “State” se definen las variables que van a fungir como variables de estado para el comportamiento continuo del sistema híbrido. En la opción “Constants” se definen las constantes del sistema. En la opción “Functions and Procedures” se pueden programar funciones y procedimientos para representar las características deseadas del elemento creado.

La opción "Behavior" es donde se definen los componentes del sistema híbrido como son número de estados y de ecuaciones diferenciales. Aquí se definen las gráficas orientadas y se les asocia su respectivo comportamiento continuo. Como se observa en la Figura B-3, tiene tres ramas: la primera "Main B-chart" se refiere a las propiedades del autómata principal, es decir, en esta opción se dibuja el autómata que se va a simular. Cuando se da un doble click a la opción "Main B-chart" aparece la ventana que se muestra en la Figura B-4.

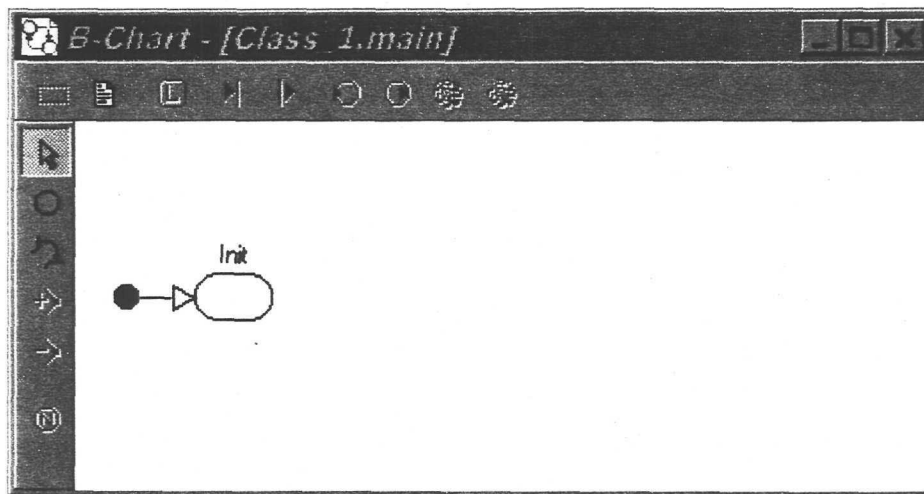




Figura B-4.

Para añadir estados discretos al autómata se selecciona el botón  y después por medio del ratón se dibujan los nodos deseados. Una vez que se han definido los estados que conforman al autómata se procede a definir las transiciones que unen los nodos. Esto se hace por medio del botón , que una vez seleccionado se posiciona el ratón sobre el nodo origen y luego se posiciona sobre el nodo destino manteniendo siempre apretado el botón izquierdo del ratón. Si se requiere que los nodos del autómata principal tengan asociado algún tipo de comportamiento, ya sea discreto o continuo, se posiciona el ratón sobre dicho nodo y se da un click con el botón derecho. Aparecerá la ventana de dialogo de la Figura B-5.

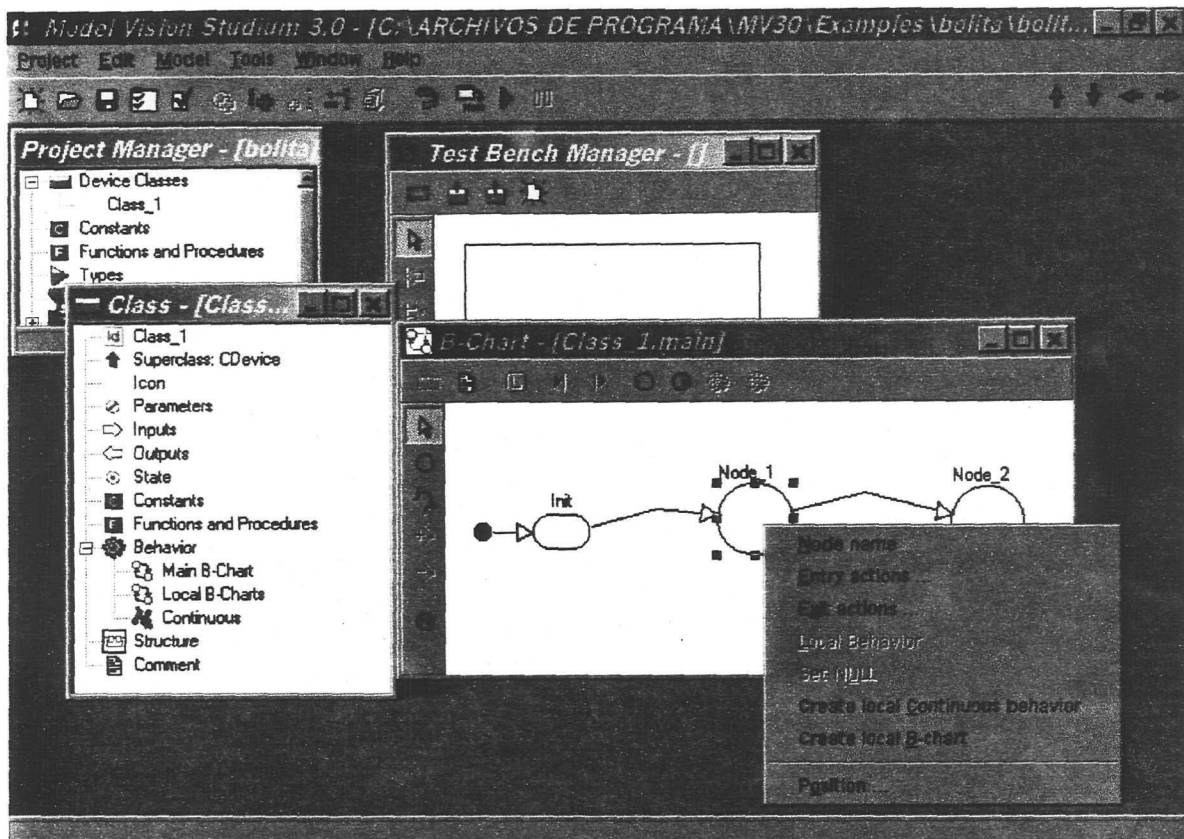


Figura B-5.

En la ventana que surgió de dar un click con el botón derecho del ratón puede dar nombre al nodo, establecer acciones a la entrada y salida del mismo, asignarle un comportamiento continuo a cada nodo y crear subautomatas dentro de cada nodo del autómatas principal.

Para poder definir las condiciones de salto de cada transición se posiciona el ratón en la transición que se desee y se da un click con el botón derecho. Aparecerá la ventana de dialogo que se muestra en la Figura B-6.

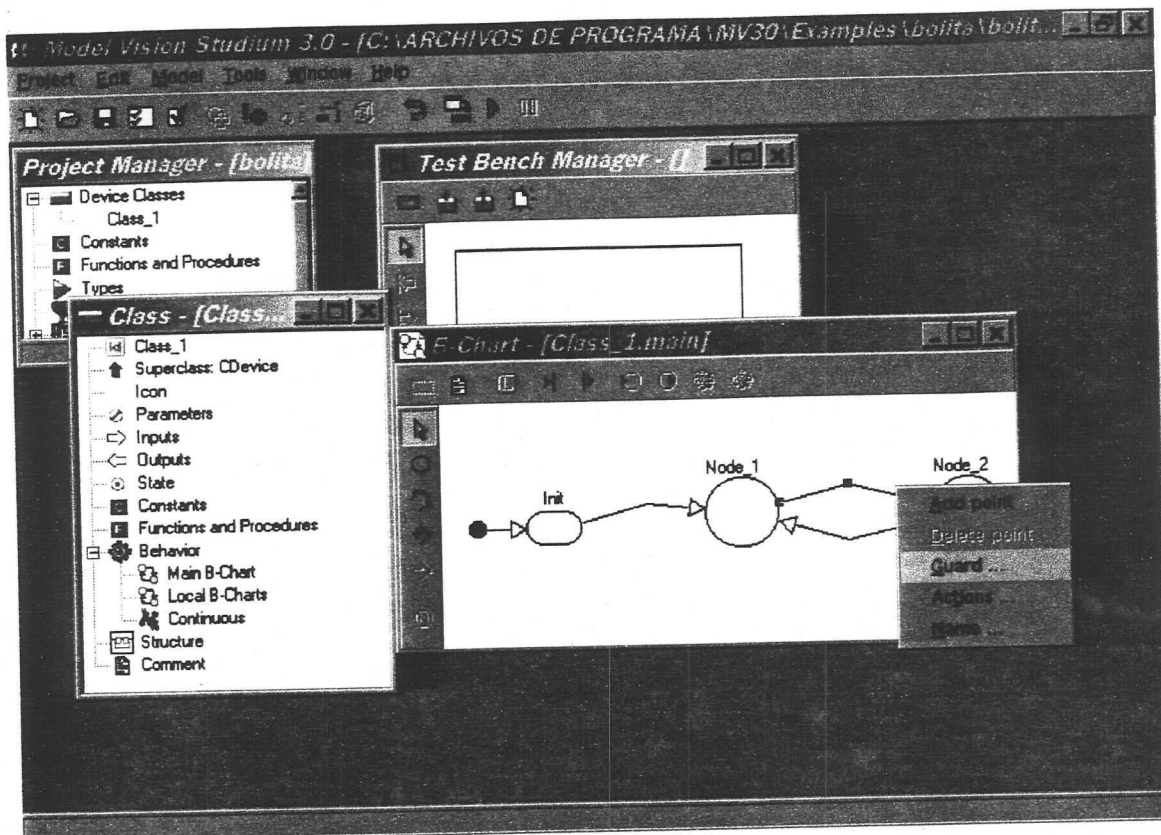


Figura B-6.

Se selecciona “Guard” y entonces aparece una ventana donde se introducen las condiciones para la transición (Figura B-7).

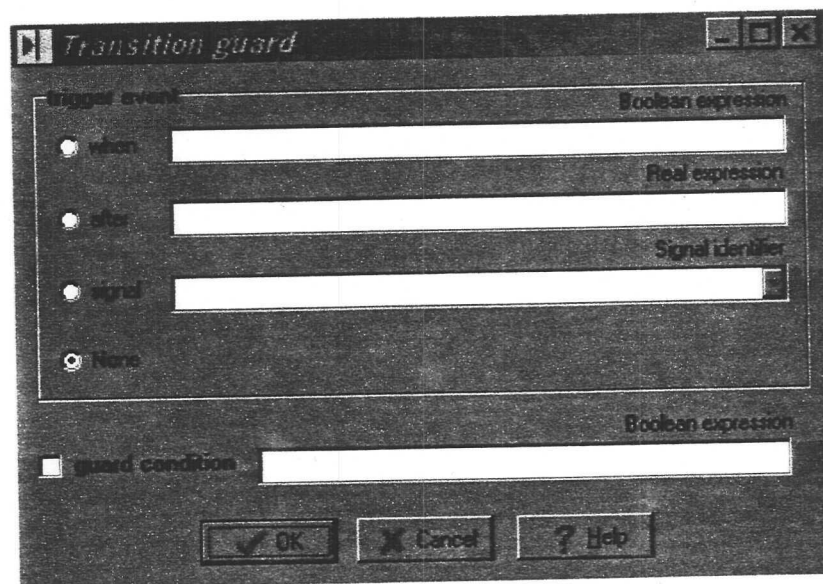



Figura B-7.

Como se observa en la Figura B-6 también hay opciones para definir las acciones que se toman cuando se dispara la transición y el nombre de la transición.

Una vez que se tiene estructurado el autómata híbrido se procede a la simulación del mismo. Esto se realiza presionado el botón , lo que producirá una compilación del modelo y luego abrirá otra ventana donde se manejan los parámetros para la simulación (Figura B-8).

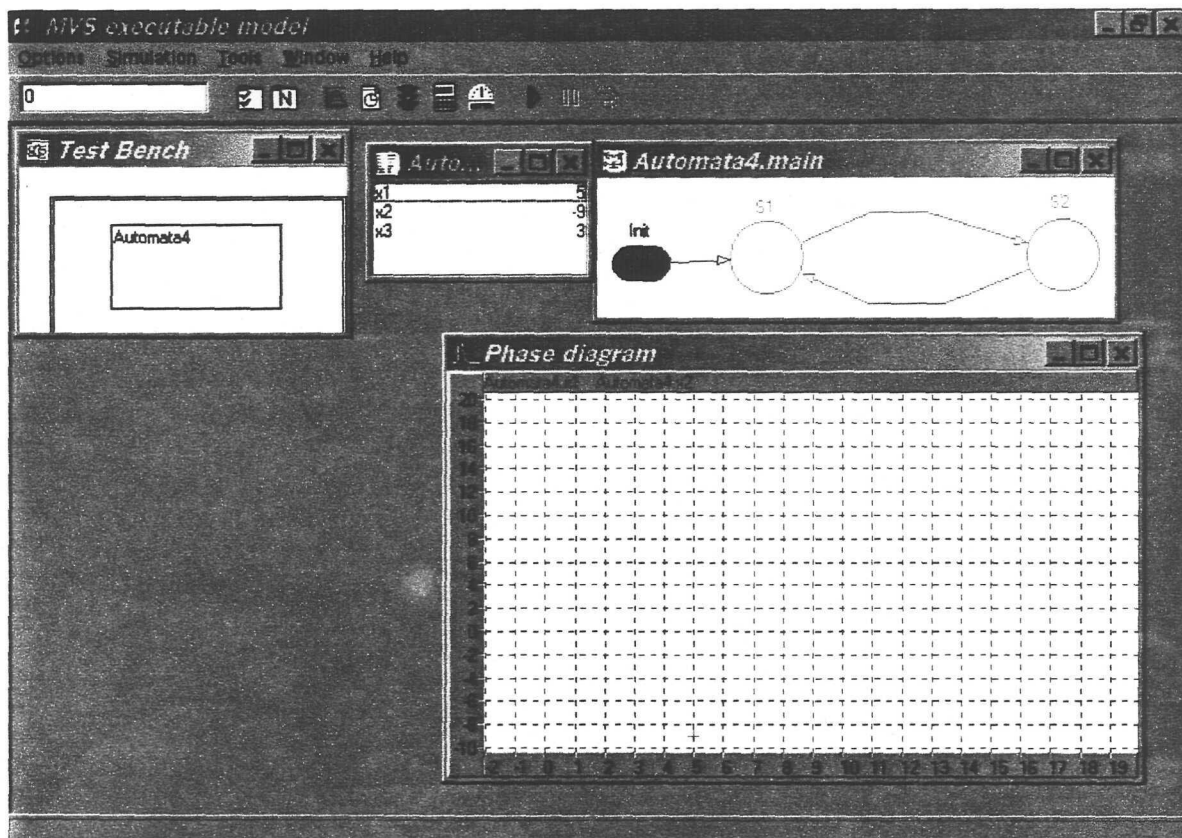











Figura B-8.

En el botón  se definen los parámetros de la simulación como son escalas de tiempo, color de fondo, etc. En el botón  se seleccionan tolerancia de la simulación y los métodos numéricos que serán empleados en la solución de las ecuaciones algebraicas, diferenciales y algebraica-diferenciales. El botón  sirve para realizar las graficas del

comportamiento de las variables que se deseen observar (Figura B-8). El botón  sirve para poner puntos de espera cada vez que se cumpla alguna condición específica. El botón  sirve como calculadora. En el botón  se proveen las animaciones estándares que se pueden realizar con el autómata. Con el botón  se inicia la simulación del autómata híbrido. Con el botón  se pausa la simulación y con el botón  se reinicializa la simulación.

Centro de Información-Biblioteca



30002008035455