

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO



ENFOQUES ALTERNATIVOS PARA LA VALUACIÓN DE
OPCIONES DE BARRERA

MAESTRÍA EN CIENCIAS FINANCIERAS

TESIS PRESENTADA POR
MÓNICA PALACIOS RÍOS

ASESOR
DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ

OCTUBRE 2006

Agradecimientos

Quiero agradecer a la institución a la que pertenezco, la Comisión Nacional Bancaria y de Valores, al Lic. Pablo Escalante, al Dr. Juan Manuel Ugarte y al Ing. Luis Zumaya Jaico, por apoyarme para alcanzar esta meta; al Dr. Francisco Venegas, por las facilidades que me otorgó para realizar este trabajo; a mis padres y a mis hermanos, por la influencia que han tenido en mis acciones; y a mi esposo Angel, por el cariño y comprensión que me ha brindado.

Gracias.

Resumen

En este trabajo se desarrollaron tres enfoques para el planteamiento de las soluciones cerradas para la valuación de opciones de barrera: el probabilístico, que considera la valuación del precio justo para los contratos up-and-out, down-and-out, up-and-in y down-and-in mediante el planteamiento de la valuación neutral al riesgo; el de ecuaciones diferenciales, que se basa en la adecuación de la solución propuesta para la ecuación diferencial de la difusión del calor a la ecuación diferencial parabólica de segundo orden de Black - Scholes para una opción call tipo down-and-out; y el propuesto en el trabajo realizado por Reiner y Rubinstein para obtener las fórmulas analíticas para el precio de las ocho variantes de opciones de barrera. Con el propósito de conocer de manera general otras alternativas que existen para la valuación de opciones de barrera, se comentaron las ventajas y desventajas dos métodos numéricos para obtener el precio de este tipo de contratos: el método de árboles binomiales y trinomiales, así como la Simulación Monte Carlo. Adicionalmente, se llevó a cabo un ejercicio para valorar una opción de barrera referida al Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), para con ello ver los posibles beneficios al incluir este tipo de instrumento dentro de la gama de productos ofrecidos por el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer).

Tabla de Contenido

| | |
|--|------------|
| Introducción | 1. |
| Capítulo 1 : Marco Conceptual | 6. |
| 1.1 Dinámicas del Activo | 6. |
| 1.2 Estrategias de Negocio | 9. |
| 1.3 Fórmulas Black - Scholes para valorar opciones ordinarias | 14. |
| 1.4 Algunos Resultados de la Teoría de la Probabilidad | 20. |
| 1.5 Definiciones y Conceptos de Opciones de Barrera | 22. |
| Capítulo 2 : Alternativas para Obtener la Valuación de Opciones de Barrera | 28. |
| 2.1 Enfoque Probabilístico | 28. |
| 2.2 Enfoque de Ecuaciones Diferenciales de Difusión de Calor | 37. |
| 2.3 Enfoque de Black - Scholes con Reembolso | 48. |
| 2.3.1 Opciones de Barrera Europeas "In" | 50. |
| 2.3.2 Opciones de Barrera Europeas "Out" | 54. |
| 2.4 Corrección de Continuidad | 56. |
| Capítulo 3 : Métodos Numéricos para Valuación de Opciones de Barrera | 59. |
| 3.1 Métodos de Árboles (Método Binomial - Trinomial) | 59. |
| 3.2 Simulación Monte Carlo | 66. |
| Capítulo 4 : Negociación de Opciones de Barrera en los Mercados Financieros | 67. |
| 4.1 Antecedentes de Negociación de Contratos de Opciones en Mercados Financieros | 67. |
| 4.2 Ejercicios de Valuación de Opciones de Barrera referidas al IPC | 72. |
| Capítulo 5 : Conclusiones | 75. |
| Apéndice | 78. |
| A. Teoremas | 78. |
| B. Fórmulas para Valuación de Opciones de Barrera | 80. |
| C. Resultados de Ejercicios de Opciones de Barrera Call Tipo Down | 83. |
| D. Resultados de Ejercicios de Opciones de Barrera Call Tipo Up | 89. |
| Bibliografía | 95. |

Lista de Figuras y/o Tablas

| | | |
|--------------|---|-----|
| Figura 1. | Opción Down-and-out..... | 22. |
| Figura 2. | Opción Up-and-out..... | 25. |
| Figura 3. | Convergencia de soluciones a través de árbol binomial..... | 60. |
| Figura 4. | La barrera se mueve efectivamente para la calibración del árbol..... | 61. |
| Figura 5. | Algoritmo de barrera modificada para un árbol binomial..... | 64. |
| Figura 6. | Comportamiento de los mercado accionarios mexicano y estadounidense... | 69. |
| Figura 7. | Importe nocional de contratos abiertos en mercados organizados..... | 69. |
| Figura 8. | Importe nocional de contratos abiertos en mercados OTC..... | 70. |
| Figura 9. | Evolución de los contratos de opciones en mercados internacionales..... | 70. |
| Figura 10. | Importe nocional de contratos abiertos en mercados OTC..... | 70. |
| Cuadro 1. | Volumen de operación de opciones acumulado 2005..... | 71. |
| Cuadro 2. | Volumen mensual de operación de opciones 2005..... | 72. |
| Gráfica C.1. | | 83. |
| Tabla C.1. | | 84. |
| Gráfica C.2. | | 85. |
| Tabla C.2. | | 86. |
| Gráfica C.3. | | 87. |
| Tabla C.3. | | 88. |
| Gráfica D.1. | | 89. |
| Tabla D.1. | | 90. |
| Gráfica D.2. | | 91. |
| Tabla D.2. | | 92. |
| Gráfica D.3. | | 93. |
| Tabla D.3. | | 94. |

Introducción

En el mundo financiero algunos valores e instrumentos son considerados como tradicionales o fundamentales, como las acciones, los bonos o el petróleo, mientras que otros son considerados productos derivados. En finanzas, un derivado es un instrumento cuyos pagos dependen de un bien tradicional. Por ejemplo los contratos de futuros del oro son instrumentos derivados porque su valor depende del precio del oro. En el caso de un derivado financiero, los pagos del contrato dependen de otro instrumento financiero o valor.

Los derivados financieros han tenido una popularidad abrumadora y un crecimiento importante por varias razones. Los productos derivados ayudan a que los mercados estén más cerca de ser completos, ofrecen a los especuladores o administradores de riesgos instrumentos que permiten facilitar sus estrategias para alcanzar su objetivo de forma más sencilla, además de ser atractivos por su eficiencia de negociación, particularmente por sus costos de transacción y la alta liquidez de sus mercados.

En la teoría financiera, un mercado completo es un mercado en el que cualquier pago identificable puede ser obtenido al negociar los valores disponibles en el mercado. Por ejemplo, un mercado completo permitiría a un operador comprar un valor o un conjunto de valores que pagaría si y sólo si la acción aumentó de 99 a 100 pesos en el siguiente mes. Si el valor disponible dentro de un mercado no es lo suficientemente atractivo y diverso para otros inversionistas de tal forma que no se fomente la especulación, el mercado sería incompleto.

Los productos derivados han jugado un rol importante en los mercados financieros porque precisamente ayudan a tener un mercado cerrado y completo, ya que los operadores pueden ajustar el riesgo y el rendimiento de los portafolios de inversión al incluir operaciones con este tipo de instrumento, con lo cual incrementa su bienestar y el de la economía en general.

Debido a los desastres financieros registrados en los últimos tiempos que han involucrado la negociación de productos derivados, se tiene la percepción de que estos instrumentos son peligrosos. Sin embargo los riesgos asociados a los derivados no son necesariamente malignos, pues generan mayores ganancias siempre y cuando las personas encargadas de definir las estrategias, calculen el valor justo de los contratos, así como que entiendan y tengan pleno conocimiento de los niveles de exposición a los riesgos a los que se encuentran sujetos por su operación.

Los instrumentos derivados también sirven como herramienta para limitar los riesgos que enfrentan las instituciones por el tipo de negocio al que se encuentran enfocadas. Por ejemplo, una corporación que está planeando emitir bonos, enfrenta riesgo de tasa de interés. Si la tasa de interés aumenta antes de la emisión del bono, la empresa tendrá que pagar más durante el tiempo que dure el bono. Esa firma podría usar contratos de futuros sobre tasa de interés para controlar su exposición a este tipo de riesgo. Similarmente, un fondo de pensiones con un portafolio diversificado en distintas emisoras de acciones enfrenta el riesgo de fluctuación de precios, entonces el administrador del fondo podría

usar opciones sobre el índice accionario para reducir o eliminar virtualmente la exposición a ese riesgo.

Adicionalmente, en muchos casos los operadores pueden usar posiciones en productos derivados como un sustituto de los propios subyacentes. Una opción puede imitar la utilidad o pérdida del índice accionario. Asimismo, un futuro de tasa de interés puede servir para sustituir la inversión en bonos gubernamentales. Frecuentemente los costos de transacción asociados a la negociación de productos derivados son sustancialmente más bajos que los costos en los que se incurren por la negociación de los subyacentes, además de tener mayor liquidez en el mercado de derivados. Un inversionista que quisiera tener una posición accionaria bien diversificada, podría comprar varias emisoras de acciones, lo que seguramente generaría un mayor costo total debido al número de transacciones que tendría que realizar, o tal vez prefiera usar un contrato futuro o una opción, referidos a un índice accionario que le permita ahorrar en los costos de transacción sin preocuparse de que las acciones compradas no sean lo suficientemente líquidas¹ para poder obtener alguna utilidad.

Estas aplicaciones y las ventajas que presentan han propiciado que los instrumentos derivados sean más conocidos y utilizados por los inversionistas, alentando la creación de mercados, tanto bursátiles como extrabursátiles, que sean más competitivos y sólidos. Los productos derivados más negociados son los contratos de forwards, futuros, swaps y opciones. Estas últimas, inicialmente fueron creadas como contratos individualizados entre dos partes y hasta hace poco se crearon mercados organizados para su negociación.

Las opciones pueden ser de tipo "call" o "put". El tenedor de una opción call tiene el derecho de comprar un bien subyacente a un precio específico y este derecho termina hasta una fecha determinada. El tenedor de una opción put tiene el derecho de vender un bien subyacente a un precio específico hasta un tiempo establecido. Para adquirir estos derechos, los tenedores de las opciones las compran de otros inversionistas pagando un precio o prima. También pueden ser de tipo europeo si se ejerce el derecho al vencimiento del contrato, o americano si su ejercicio se lleva a cabo en cualquier momento del plazo del contrato.

Las opciones únicamente pueden ser compradas o vendidas, no existen operaciones de préstamo o de fondeo. De este modo, para todo tenedor de una opción, hay un vendedor. El vendedor recibe el pago o prima por una opción del comprador, por el cual el vendedor confiere los derechos al tenedor de la opción. En el caso de un contrato call, el vendedor recibe la prima y a cambio, da al tenedor los derechos de comprar el bien subyacente en un precio específico en una fecha dada. Para un put, el vendedor de la opción recibe el pago del comprador con la promesa de comprar el bien subyacente a un precio específico en una fecha preestablecida, siempre que el tenedor de la opción así lo decida. En los contratos de opciones todos los derechos permanecen con el tenedor del instrumento.

Este tipo de contratos son populares principalmente entre inversionistas sofisticados quienes mantienen grandes portafolios en acciones, como las sociedades de inversión y los

¹ Un activo es líquido si tiene suficiente actividad en los mercados para que pueda ser negociado fácilmente a un precio que corresponda a su valor verdadero.

fondos de pensiones. Al negociar opciones de forma conjunta con portafolios de acciones, estos inversionistas pueden ajustar cuidadosamente el riesgo y rendimiento de sus activos totales. Un ejemplo de ello sería combinar una acción riesgosa y una opción que también sea riesgosa para formar una posición libre de riesgo diseñándolo como un simple bono correspondiente a un nivel de tasa de interés predeterminado. Además de que muchos inversionistas prefieren negociar opciones para reducir la base sujeta a impuestos y evitar las restricciones del mercado accionario, lo que permite producir riesgo con menor capital.

Por lo antes expuesto, la demanda de los contratos de opciones ha ido en ascenso y ha evolucionado a estructuras de intercambio de pagos más complejas que se ajusten a los requerimientos de los participantes de los mercados. A estos contratos se les conoce como opciones exóticas.

La más exitosa y probablemente más vieja de todas las opciones exóticas es la opción de barrera, tema central de este trabajo. Se cree que en el inicio de la década de los ochentas, se negoció el primer contrato put down-and-out. En esos tiempos la principal atracción de las opciones de barrera era que estaban referidas a las acciones que presentaban una mayor volatilidad, los costos de los contratos con barrera eran menores a las opciones estándar sobre el mismo subyacente y se ofrecían durante un tiempo en el que el volumen de transacciones de las opciones ordinarias era bajo. Desde entonces el mercado para opciones de barrera ha continuado creciendo y se estima que ha duplicado su tamaño cada año desde 1992, principalmente en mercados extranjeros de tipo de cambio y accionario, así como en menor medida en mercados de renta fija.

Como las opciones de barrera están sujetas a la trayectoria de los activos, incorporan un alto grado de riesgo en el vendedor y son más económicas que las opciones estándar. Esta característica las hace atractivas para los especuladores o administradores de portafolios. Los especuladores usan opciones de barrera para reproducir fácilmente los esquemas en las estrategias de negocio. Por su parte, los administradores de riesgo pueden cubrir su posición sin la necesidad de pagar por rangos de precios que consideran que difícilmente pueden ocurrir.

A diferencia de las opciones ordinarias o estándar, que dependen únicamente de la magnitud del precio del activo, del vencimiento y del precio de ejercicio, las opciones de barrera capturan como se alcanzan los precios de liquidación del activo subyacente, por ello se les denomina opciones de ruta dependiente.

Debido a esta característica sobre el comportamiento del precio del activo, las opciones de barrera pueden ser de los siguientes tipos: up-and-in, up-and-out, down-and-in and down-and-out. Cada uno de ellos puede ser call o put, de estilo europeo o americano y pueden o no incluir reembolsos predefinidos en el caso de las opciones de barrera que expiran sin valor.

El término "out" en una opción significa que ésta pierde su vigencia cuando el precio del activo subyacente alcanza un nivel preestablecido denominado la barrera. Por otro lado, el término "down" en una opción significa que el precio del activo subyacente cae por debajo de la barrera, mientras que el término "up" significa que el precio del subyacente excede ese valor.

Así por ejemplo, una opción call de tipo europeo down-and-out pierde su valor cuando el precio del subyacente cae por debajo de la barrera, mientras que una opción up-and-out pierde su valor justo en el momento en que el precio del subyacente excede el nivel de la barrera. Los otros dos tipos de opciones down-and-in y up-and-in, se convierten en opciones europeas ordinarias justo en el momento en que cruzan el nivel preestablecido, ya sea debajo o por arriba respectivamente.

Las opciones de barrera de estilo europeo pueden ser vistas como intermedias entre opciones estándar europeas y americanas. Por una parte, son americanas debido a que su valor depende en como se comporta el precio del activo en cuestión a lo largo del tiempo. Pero son más simples de valorar porque el límite crítico del precio del activo es determinado por adelantado. Consecuentemente, como se demostrará en este trabajo, se pueden obtener soluciones cerradas para este tipo de instrumentos o se puede optar por utilizar métodos numéricos para aproximar su valor.

Las especificaciones de los contratos de opciones de barrera hacen que su esquema de pagos sea más complejo que para las opciones estándar, por lo que se han desarrollado diversos artículos referentes a los métodos más adecuados para obtener su precio.

El presente trabajo tuvo por objeto el desarrollar soluciones cerradas para llevar a cabo la valuación de este tipo de instrumentos a través de distintos enfoques, para con ello ofrecer una fórmula que sea de fácil instrumentación y que sea utilizada por los participantes de los mercados financieros en su negociación.

En el Capítulo 1 se llevó a cabo un resumen de los conceptos y demostraciones de los teoremas más importantes, que son necesarios para el planteamiento del modelo desarrollado por Black - Scholes para obtener la fórmula analítica para la valuación de opciones ordinarias, considerando este modelo como la base para las extensiones de las fórmulas analíticas aplicables a opciones en las que se incluye una barrera.

En el Capítulo 2, se plantea la obtención de soluciones cerradas para el precio de opciones de barrera bajo tres enfoques diferentes basados en la ecuación propuesta por Black - Scholes para opciones estándar. El primer enfoque que se discute es el probabilístico, que considera la valuación del precio justo para los contratos up-and-out, down-and-out, up-and-in y down-and-in mediante el planteamiento de la valuación neutral al riesgo. El segundo considera la adecuación de la solución propuesta para la ecuación diferencial de la difusión del calor a la ecuación diferencial parabólica de segundo orden de Black - Scholes para una opción call tipo down-and-out. El tercero consiste en el trabajo realizado por Reiner y Rubinstein para obtener las fórmulas analíticas para el precio de los ocho tipos de opciones de barrera. Adicionalmente, se incluye la corrección de la continuidad de fórmulas analíticas propuesta por Broadie, Glasserman y Kou como consecuencia de la violación del supuesto de que el monitoreo de precios se realiza de forma continua.

Debido a que han existido críticas al uso de soluciones cerradas analíticas para el problema de valorar opciones de barrera, por el hecho de que en la realidad el supuesto de continuidad en los precios sobre el cual fueron desarrolladas no se cumple, en el Capítulo 3 se discuten dos métodos numéricos para obtener el precio de este tipo de contratos: el método de árboles binomiales y trinomiales, así como la Simulación Monte Carlo. Estos métodos son

más difíciles de implementar, por lo cual no son muy utilizados dentro de los mercados financieros.

En el Capítulo 4, se presenta un resumen del entorno en el cual actualmente se operan los diferentes tipos de opciones ordinarias y se plantea un ejercicio para valuar una opción de barrera referida al Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) a efecto de ver los posibles beneficios por la inclusión de este tipo de instrumento dentro de la gama de productos que actualmente ofrece el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer).

Finalmente, en el Capítulo 5 se exponen las conclusiones relativas a los diversos desarrollos y métodos presentados para la valuación de los contratos de opciones de barrera, así como de los resultados obtenidos de su aplicación.

Capítulo 1

Marco Conceptual

Para poder llevar a cabo el desarrollo de los diferentes enfoques para la valuación de las opciones de barrera, es necesario conocer los principales conceptos sobre los cuales se basa la valuación de las opciones ordinarias. Por ello en esta sección, se presenta una descripción de cómo valuar una opción ordinaria de tipo europeo bajo los supuestos del mercado según Black-Scholes, profundizando en las definiciones y teoremas necesarios para su planteamiento. Asimismo, se describen las características de los diversos tipos de opciones de barrera que existen.

1.1 Dinámicas del Activo

En el modelo de Black - Scholes se asume que en el mercado se tienen dos valores, uno que es libre de riesgo B_t y un activo riesgoso S_t , que se puede pedir y dar prestado dinero sin restricciones a la misma tasa de interés y que no existen costos de transacción. Las ventas en corto son permitidas y puede negociarse continuamente.

El activo libre de riesgo B_t , representa los ahorros a una tasa de interés constante r y la dinámica de B_t está dada por la siguiente ecuación:

$$dB_t = rB_t dt \tag{1.1}$$

donde B_0 se asume que es igual a 1. La solución a (1.1) es

$$B_t = e^{rt}.$$

El activo riesgoso S_t , es frecuentemente una acción y su dinámica sigue un Movimiento Browniano.

Definición 1.1

Un Movimiento Browniano Estándar, W , es un proceso estocástico con las siguientes propiedades:

(1) $W_0 = 0$

- (2) Los incrementos de W son independientes, es decir, si $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ entonces $W_{t_2} - W_{t_1}$ y $W_{t_4} - W_{t_3}$ son independientes.
- (3) $W_{t_2} - W_{t_1}$ se distribuye normalmente con media 0 y desviación estándar $\sqrt{t_2 - t_1}$.
- (4) La continuidad está dada por:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[|W(t + \Delta t) - W(t)| \geq \delta]}{\Delta t} = 0 \quad \forall \delta > 0 \text{ y } \Delta t = t_i - t_j \text{ con } i > j.$$

La dinámica de S_t está dada por:

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t \tag{1.2}$$

donde μ y $\sigma > 0$ son constantes y se denominan la media y la volatilidad de S respectivamente. W_t es un Movimiento Browniano el cual está definido sobre el espacio de probabilidad $(\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$ donde \mathfrak{F}_t puede ser visto como toda la información hasta el tiempo t y P es la medida de probabilidad.

La ecuación (1.2) es solamente la forma corta para la integral

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u \mu du + \int_0^t S_u \sigma dW_u$$

con $S_0 > 0$, donde la primera integral es una integral ordinaria de Riemann y la segunda es la integral de Itô.

Es importante comentar que las trayectorias de un Movimiento Browniano se caracterizan por ser funciones no diferenciables, por lo que no pueden ser vistas como una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias. Bajo este contexto, es conveniente asumir que la filtración del subyacente \mathfrak{F}_t es el incremento estándar de la filtración natural del Movimiento Browniano del subyacente \mathfrak{F}_t^W , es decir, que la igualdad $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t^W$ se mantiene para todo $t \in [0, T]$.

Teorema 1.1 (Fórmula de Itô)

Sea X_t la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Sea $g = g(t, X_t) \in C^2$, entonces

$$dg = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (dX_t)^2,$$

con las siguientes reglas de multiplicación:

$$(dt)^2 = 0$$

$$dt dW_t = 0$$

y

$$(dW_t)^2 = dt.$$

Ahora podemos resolver (1.2) aplicando el Lema de Itô a $g(t, S_t) = \ln(S_t)$

$$d(\ln(S_t)) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2S_t^2} (dS_t)^2$$

sustituyendo $dS_t = \mu S_t dt + S_t \sigma dW_t$ tenemos,

$$\begin{aligned} d(\ln(S_t)) &= \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + S_t \sigma dW_t) - \frac{1}{2S_t^2} (\mu S_t dt + S_t \sigma dW_t)^2 \\ &= (\mu dt + \sigma dW_t) - \frac{1}{2S_t^2} (\mu^2 S_t^2 dt^2 + 2\mu S_t^2 \sigma dt dW_t + S_t^2 \sigma^2 dW_t^2) \end{aligned}$$

aplicando las reglas de multiplicación,

$$\begin{aligned} d(\ln(S_t)) &= (\mu dt + \sigma dW_t) - \frac{1}{2S_t^2} (S_t^2 \sigma^2 dt) \\ &= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Integrando ambos lados de 0 a t , tenemos

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t,$$

que es lo mismo que

$$S_t = S_0 e^{[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t]}.$$

A esta clase de proceso se le conoce como Movimiento Browniano Geométrico (GBM).

1.2 Estrategias de Negocio

Una estrategia de negocio es un par de procesos estocásticos $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ en el espacio de probabilidad del subyacente $(\cdot, (\mathfrak{S}_t)_{t \in [0, T]}, P)$. La estrategia de negocio $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ sobre el intervalo $[0, T]$ es autofinanciable si su valor $V(\phi)$ que está dado por

$$V_t(\phi) = \phi^1 S_t + \phi^2 B_t, \quad \forall t \in [0, T],$$

satisface la siguiente condición

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u^1 dS_u + \int_0^t \phi_u^2 dB_u, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.3)$$

donde la primera integral se entiende en el sentido de Itô y ambas integrales están bien definidas considerando que

$$P \left[\int_0^T (\phi_u^1)^2 du < \infty \right] = 1 \quad y \quad P \left[\int_0^T |\phi_u^2| du < \infty \right] = 1$$

Notemos que al derivar la ecuación (1.3) tenemos

$$dV_t(\phi) = \phi_t^1 dS_t + \phi_t^2 dB_t, \quad \forall t \in [0, T].$$

El valor presente del portafolio está dado por

$$V_t^* = \frac{V_t}{B_t} = \phi_t^1 \frac{S_t}{B_t} + \phi_t^2 \frac{B_t}{B_t}, \quad \forall t \in [0, T]$$

Si definimos $S_t^* = \frac{S_t}{B_t}$, entonces la ecuación anterior se reduce a

$$V_t^* = \phi_t^1 S_t^* + \phi_t^2, \quad \forall t \in [0, T]$$

En este caso si ϕ fuera autofinanciable, entonces se tendría que cumplir que

$$V_t^*(\phi) - V_0(\phi) = \int_0^t \phi_u^1 dS_u^*, \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.4)$$

Para verificar lo anterior, obtengamos la derivada de $V_t^*(\phi)$

$$\begin{aligned} dV_t^*(\phi) &= d\left(\frac{V_t(\phi)}{B_t}\right) \\ &= d(e^{-rt}V_t(\phi)) \\ &= -re^{-rt}V_t(\phi)dt + e^{-rt}dV_t(\phi) \\ &= -re^{-rt}(\phi_t^1 S_t + \phi_t^2 B_t)dt + e^{-rt}(\phi_t^1 dS_t + \phi_t^2 dB_t) \\ &= -re^{-rt}\phi_t^1 S_t dt - re^{-rt}\phi_t^2 B_t dt + e^{-rt}\phi_t^1 dS_t + e^{-rt}\phi_t^2 dB_t \\ &= -re^{-rt}\phi_t^1 S_t dt - re^{-rt}\phi_t^2 B_t dt + e^{-rt}\phi_t^1 dS_t + e^{-rt}\phi_t^2 (rB_t dt) \\ &= -r\phi_t^1 S_t^* dt + e^{-rt}\phi_t^1 dS_t \\ &= \phi_t^1 dS_t^*. \end{aligned} \quad (1.5)$$

ya que $dS_t^* = \frac{1}{B_t}(dS_t - rS_t dt)$.

Por lo tanto al integrar (1.5) se obtiene (1.4).

La familia de todas las estrategias de negocio autofinanciables es demasiado grande, por lo que no se excluyen las oportunidades de arbitraje.

Por ello es conveniente introducir el concepto de admisibilidad de una estrategia de negocio directamente en términos de una medida martingala. Por definición, una medida de probabilidad Q en (\cdot, \mathfrak{F}_T) equivalente a P , es una medida martingala para el proceso S^* si S^* es una martingala local bajo Q . Similarmente, una medida de probabilidad P^* es una medida martingala para el mercado spot (o una medida martingala spot) si el valor descontado de cualquier estrategia de negocio autofinanciable sigue una martingala local bajo P^* . El siguiente resultado muestra que ambas cosas coinciden.

Lema 1.1 (Medida Martingala Spot)

Una medida de probabilidad es una medida martingala spot si y sólo si es una medida martingala para el valor presente del precio del subyacente S^* .

Para probar esto, reescribamos la ecuación (1.4) de la siguiente manera:

$$V_t^*(\phi) = V_0^*(\phi) + \int_0^t \phi_u^1 dS_u^*, \quad \forall t \in [0, T]$$

donde $V_t^*(\phi) = \frac{V_t(\phi)}{B_t}$ y ϕ es una estrategia de negocio autofinanciable hasta el tiempo T . Ahora es suficiente hacer uso de la propiedad de martingala local de la integral estocástica de Itô.

En el escenario de Black - Scholes, la medida martingala para el valor presente del proceso del precio del subyacente es única y conocida de forma explícita, como se muestra en el siguiente resultado.

Lema 1.2 (Unicidad de la Medida Martingala)

La unicidad de la medida martingala Q para el valor presente del proceso del precio del subyacente está dada por la derivada Randon-Nikodým

$$\frac{dP}{dQ} = e^{\frac{r-\mu}{\sigma}W_T - \frac{1}{2}\frac{r-\mu}{\sigma^2}T}, \quad P - a.s. \quad (1.6)$$

Bajo la medida martingala Q , el valor presente del precio del subyacente S^* satisface

$$dS_t^* = \sigma S_t^* dW_t^* \quad (1.7)$$

y el proceso W_t^* que es

$$W_t^* = W_t - \frac{r - \mu}{\sigma t}, \quad \forall t \in [0, T]$$

sigue un Movimiento Browniano Estándar en un espacio de probabilidad $(-, \mathfrak{F}, Q)$.

Combinando los dos lemas anteriores, se concluye que la medida martingala spot P^* está dada en $(-, \mathfrak{F}_T)$ por medio de la derivada Randon-Nikodým

$$\frac{dP^*}{dP} = e^{\frac{r-\mu}{\sigma} - \frac{1}{2}\frac{(r-\mu)^2}{\sigma^2}T}, \quad P - a.s.$$

El valor presente del precio S^* bajo P^* sigue una martingala estrictamente positiva, dado que

$$S_t^* = S_0 e^{\sigma W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \quad \forall t \in [0, T].$$

Notamos también que dada la ecuación (1.7), las dinámicas del precio S bajo P^* son

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^*, \quad S_0 > 0$$

y de este modo el precio del subyacente en el tiempo t es igual a

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t^* + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

Finalmente, es suficiente observar que todas la filtraciones involucradas en el modelo coinciden, esto es, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{W^*} = \mathfrak{F}^S = \mathfrak{F}^{S^*}$. Ahora estamos en posibilidad de introducir la clase de estrategias de negocio admisibles, a efecto de excluir las oportunidades de arbitraje en el modelo de mercado.

Definición 1.2 (Estrategia de Negocio Admisible)

Una estrategia de negocio $\phi \in \Phi$ es llamada admisible en P^* si el valor presente del portafolio

$$V_t^*(\phi) = \frac{V_t(\phi)}{B_t}, \quad \forall t \in [0, T]$$

sigue una martingala bajo P^* .

No es difícil ver que al restringir a la estrategias de negocio admisibles bajo P^* , se garantiza la ausencia de oportunidades de arbitraje en el mercado. Consecuentemente, dado un pago contingente X que liquida en el tiempo $T \leq T^*$ y que es realizable, es decir puede ser replicado por medio de una estrategia admisible bajo P^* , se puede definir su precio de arbitraje denotado por $\pi_t(X)$, como la riqueza $V_t(\phi)$ en el tiempo t

Ahora definiremos el concepto de arbitraje de forma más precisa.

Definición 1.3 (Oportunidad de arbitraje)

Una oportunidad de arbitraje es una estrategia admisible ϕ tal que

$$V_0(\phi)$$

$$P\{V_T(\phi) \geq 0\} = 1$$

y

$$P\{V_T(\phi) > 0\} > 0$$

Denotemos $\Phi(P^*)$ como la clase de todas las estrategias de negocio autofinanciables admisibles.

Sea \mathcal{M} el mercado de Black-Scholes donde solamente las estrategias de negocio admisibles P^* son permitidas, entonces tenemos

Teorema 1.2

\mathcal{M} es libre de oportunidades de arbitraje.

Lo anterior se debe a que si asumimos que $\phi \in \Phi(P^*)$ tal que

$$V_0(\phi) = 0$$

y

$$P[V_T(\phi) \geq 0] = 1$$

entonces la propiedad de la martingala de V_t^* implica que

$$\begin{aligned} E_{P^*} \left[\frac{V_T(\phi)}{B_T} \mid \mathfrak{S}_0 \right] &= E_{P^*} \left[\frac{V_T(\phi)}{B_T} \right] \\ &= \frac{V_0(\phi)}{B_0} \\ &= \frac{V_0(\phi)}{1} \\ &= V_0(\phi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto y la hipótesis sobre ϕ , nos lleva a que

$$P [V_T(\phi) > 0] = 0$$

lo que significa que no existen oportunidades de arbitraje.

También se establece que el mercado de Black-Scholes \mathcal{M} es completo, es decir que para todo pago X es realizable, o equivalentemente, si para todo pago X medible en \mathfrak{S}_t existe al menos una estrategia de negocio ϕ tal que $V_T = X$.

Un pago contingente \mathcal{X} con fecha de ejercicio T es una variable estocástica con filtración \mathfrak{S}_T . Si este pago X sólo depende del precio de ejercicio en el tiempo T , es decir, $\mathcal{X} = \Psi(S_T)$, entonces es llamado un pago contingente simple y Ψ es llamada la función del contrato.

Como se mencionó anteriormente, el pago contingente se dice que es realizable si está replicado por una estrategia de negocio admisible en P^* denominada ϕ . Entonces, el único precio libre de arbitraje $\pi_t(\mathcal{X})$ de X para cualquier tiempo $t \in [0, T]$ está dado por $V_t(\phi)$, donde $\phi \in \Phi(P^*)$ es tal que $V_T(\phi) = \mathcal{X}$.

Teorema 1.3 (Valuación de un pago contingente libre de arbitraje)

Sea \mathcal{X} un pago contingente con fecha de expiración T el cual es realizable en \mathcal{M} . Entonces su precio libre de arbitraje $\pi_t(\mathcal{X})$ está dado por:

$$\pi_t(\mathcal{X}) = B_t E_{P^*} \left[\frac{\mathcal{X}}{B_T} \mid \mathfrak{S}_t \right].$$

Esta ecuación es llamada la fórmula de valuación neutral al riesgo.

Cabe señalar que dado que \mathcal{M} es completo existe una única medida de probabilidad P^* para \mathcal{M} , lo cual permite obtener la fórmula de valuación neutral al riesgo.

1.3 Fórmula Black-Scholes para valorar opciones ordinarias

Los pagos contingentes simples que comúnmente se negocian son las opciones call y put europeas. Una opción call (put) europea, como se señaló en la introducción a este trabajo, es un contrato que da al tenedor del contrato el derecho de comprar la acción S en el tiempo T a un precio predefinido K , llamado el precio de ejercicio. La función del contrato es $\mathcal{X} = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$ y $\mathcal{X} = \max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+$ respectivamente. El precio de una opción call europea está dada por la famosa fórmula de Black-Scholes del siguiente teorema. Cuando el precio de un call europeo $C(t, S_t)$ es conocido no es difícil encontrar el precio $P(t, S_t)$ de un put europeo como veremos posteriormente.

Teorema 1.4 (Fórmula de Black-Scholes)

En \mathcal{M} , el precio libre de arbitraje en el tiempo t de una opción tipo call europea con precio de ejercicio K y fecha de expiración T está dada por

$$C(t, S_t) = S_t N [d_1^K(t, S_t)] - e^{-r(T-t)} K N [d_2^K(t, S_t)]$$

donde

$$d_1^K(t, S_t) = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2^K(t, S_t) = d_1^K(t, S_t) - \sigma\sqrt{T-t}$$

Para demostrar lo anterior asumimos que $\mathcal{X} = (S_T - K)^+$ es realizable en \mathcal{M} .

De la fórmula de valuación neutral al riesgo tenemos que

$$\begin{aligned} C(t, S_t) &= B_t E_{P^*} \left[\frac{(S_T - K)^+}{B_T} \mid \mathfrak{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} E_{P^*} [(S_T - K)^+ \mid \mathfrak{F}_t] \end{aligned}$$

la segunda igualdad se da porque r es constante.

S_T puede ser escrita como

$$S_T = S_t e^{[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T^* - W_t^*)]}$$

donde $S_t = s$ y entonces

$$C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E_{P^*} \left[\left(S_t e^{[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T^* - W_t^*)]} - K \right)^+ \mid \mathfrak{F}_t \right] \quad (1.8)$$

donde S_t es \mathfrak{F}_t -medible y $W_T^* - W_t^*$ son independientes de \mathfrak{F}_t .

De este modo si

$$E_{P^*} \left[\left| \left(se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T^*-W_t^*)]} - K \right)^+ \right| \right] < \infty, \quad (1.9)$$

podemos usar el Teorema A.1 del Apéndice A para reescribir (1.8) como,

$$e^{-r(T-t)} E_{P^*} \left[\left(se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T^*-W_t^*)]} - K \right)^+ \mid \mathfrak{S}_t \right] = H(S_t, T-t),$$

donde $H(s, T-t)$ está dado por

$$H(s, T-t) = e^{-r(T-t)} E_{P^*} \left[\left(se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T^*-W_t^*)]} - K \right)^+ \right].$$

Vamos a verificar si (1.9) se mantiene,

$$\begin{aligned} & E_{P^*} \left[\left| \left(se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T^*-W_t^*)]} - K \right)^+ \right| \right] \\ & \leq E_{P^*} \left[se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T^*-W_t^*)]} \right] + K \\ & = se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]} E_{P^*} \left[e^{[\sigma(W_T^*-W_t^*)]} \right] + K \\ & = se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]} E_{P^*} \left[e^{\sigma W_{(T-t)}^*} \right] + K \\ & = se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} + K \\ & = se^{r(T-t)} + K < \infty \end{aligned}$$

En la penúltima ecuación, se utiliza que el valor esperado es la función generatriz de momentos para una variable aleatoria que se distribuye normalmente, con media 0 y varianza $T-t$.

Dado que (1.9) se mantiene, es suficiente calcular el valor esperado no condicional.

Definamos

$$y = \frac{W_T^* - W_t^*}{\sqrt{T-t}}$$

entonces $Y \in N(0, 1)$ y $S_T = se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}]}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
& e^{-r(T-t)} E_{P^*} \left[\left(s e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T^*-W_t^*)} - K \right)^+ \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(s e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}} - K \right)^+ \varphi(y) dy,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

donde

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}.$$

Notemos que

$$\left(s e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}} - K \right)^+ = 0$$

si

$$s e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}} < K$$

aplicando logaritmo en ambos lados

$$\begin{aligned}
\ln(s) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) + \sigma y\sqrt{T-t} &< \ln(K) \\
\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) + \sigma y\sqrt{T-t} &< \ln\left(\frac{K}{s}\right) \\
\sigma y\sqrt{T-t} &< \ln\left(\frac{K}{s}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)
\end{aligned}$$

que es equivalente a

$$y < \frac{\ln\left(\frac{K}{s}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Si definimos

$$y_0 = \frac{\ln\left(\frac{K}{s}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

entonces (1.10) es igual a

$$\begin{aligned}
& e^{-r(T-t)} \int_{y_0}^{\infty} (se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}] - K})\varphi(y)dy \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{y_0}^{\infty} se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}]} \varphi(y)dy \\
&- e^{-r(T-t)} \int_{y_0}^{\infty} K\varphi(y)dy = I_1 - I_2
\end{aligned}$$

Para I_1

$$\begin{aligned}
I_1 &= e^{-r(T-t)} \int_{y_0}^{\infty} se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}]} \varphi(y)dy \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{y_0}^{\infty} se^{[r(T-t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{y_0}^{\infty} se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= e^{-r(T-t)} e^{r(T-t)} \int_{y_0}^{\infty} se^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} se^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \int_{y_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2-2\sigma y\sqrt{T-t})} dy \\
&- \frac{1}{2}(y^2 - 2\sigma y\sqrt{T-t}) = \\
&- \frac{1}{2}(y^2 - 2\sigma y\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) = \\
&- \frac{1}{2}(y^2 + \sigma\sqrt{T-t})^2 + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \\
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} se^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \int_{y_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma\sqrt{T-t})^2 + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} dy
\end{aligned}$$

$$y' = y - \sigma\sqrt{T-t}, \quad dy' = dy$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s \int_{y_0-\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y'^2} dy' \\
&= sN(-y_0 + \sigma\sqrt{T-t})
\end{aligned}$$

donde

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{y^2/2} dy$$

que es la función acumulativa de la distribución normal. En esta última ecuación se utiliza la simetría de la distribución normal.

Sea

$$\begin{aligned} d_1^K(t, s) &= -y_0 + \sigma\sqrt{T-t} \\ &= - \left[\frac{\ln\left(\frac{K}{s}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right] + \sigma\sqrt{T-t} \\ &= \frac{-\ln\left(\frac{K}{s}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Entonces para I_2 tenemos

$$I_2 = e^{-r(T-t)} K N(-y_0),$$

donde N está definida como arriba y se utiliza la propiedad de simetría de la distribución normal.

Sea

$$\begin{aligned} d_2^K(t, s) &= -y_0 \\ &= - \left[\ln\left(\frac{K}{s}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right] \\ &= \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= d_1^K(t, s) - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

Con lo cual mostramos que

$$C(t, s) = sN(d_1^K(t, s)) - e^{-r(T-t)}KN(d_2^K(t, s))$$

Teorema 1.5 (Paridad Put - Call)

Para obtener el precio de una opción put europea, usaremos la "Paridad Put-Call".

Sea $C(t, S_t)$ el precio de un call europeo y $P(t, S_t)$ el precio de un put europeo, ambos con precio de ejercicio K y con la misma fecha de expiración T .

Entonces se satisface que

$$C(t, S_t) - P(t, S_t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Es fácil ver que

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K.$$

1.4 Algunos Resultados de la Teoría de la Probabilidad

De igual forma, para valorar opciones de barrera necesitamos saber cual es la función del momento en que se toca, $\tau(y)$ y encontrar la distribución de los procesos estocásticos que están absorbidos en el valor cierto. La función del momento en que se toca la barrera, $\tau(y)$ para un proceso X_t con trayectorias continuas² está definida como sigue.

Definición 1.4

La función del momento en que se toca o *hitting time*, $\tau(y)$, está definida por

$$\tau(y) = \inf \{t \geq 0 \mid X_t = y\}$$

y donde definimos ínfimo del conjunto vacío al infinito.

² X_t tiene trayectorias continuas, de otro modo quizá tenga "saltos" sobre y .

Sea X_t la solución a

$$\begin{cases} dX_t = \mu dt + \sigma dW_t \\ X_0 = \alpha \end{cases}$$

donde W_t es un Movimiento Browniano bajo φ . Entonces el proceso absorbido $X_{t \wedge \tau(y)}$ es igual a X_t si X_s es diferente de y , para todo s antes del tiempo t . Formalmente,

Definición 1.5

$$X_{t \wedge \tau(y)} = \begin{cases} X_t, & \text{si } t < \tau(y) \\ y & \text{si } t \geq \tau(y) \end{cases}$$

También definimos la Función Indicadora que será usada en la siguiente prueba. Sea \mathcal{A} un resultado. Entonces la Función Indicadora está definida como,

$$\mathcal{I}\{\mathcal{A}\} = \begin{cases} 1, & \text{cuando } \mathcal{A} \text{ es verdad} \\ 0 & \text{cuando } \mathcal{A} \text{ es falso} \end{cases}$$

Teorema 3.1.

La función de densidad $f_{t \wedge \tau(y)}(x, t, \alpha)$ de un proceso absorbido $X_{t \wedge \tau(y)}$ está dado por

$$f_{t \wedge \tau(y)}(x, t, \alpha) = \varphi(x; \mu t + \alpha, \sigma \sqrt{t}) - e^{\frac{2\mu(y-\alpha)}{\sigma^2}} \varphi(x; \mu t - \alpha + 2y, \sigma \sqrt{t})$$

Si $\alpha > y$ entonces $f_{t \wedge \tau(y)}(x, t, \alpha)$ estará definida en el intervalo $(y, +\infty)$ y si $\alpha < y$ estará definida en $(-\infty, y)$.

La función $\varphi(x, \mu, \sigma)$ es la función de densidad para una distribución normal con media μ y desviación estándar σ , es decir,

$$\varphi(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Ahora se procederá a explicar cuáles son las opciones de barrera, qué tipos existen y en qué consisten.

1.5 Definiciones y Conceptos de Opciones de Barrera

El valor de una opción de barrera depende de si el precio del subyacente cruza algún nivel mayor preestablecido en el caso de las de tipo up-and-in y up-and-out o un nivel específico menor en el caso de las down-and-in y down-and-out.

Para una opción down-and-out se establece una barrera menor al precio de mercado. Si el precio de mercado del subyacente cae por debajo de este nivel durante la vida de la opción, entonces la opción dejará de existir. En la Figura 1 se muestra el comportamiento que puede seguir una opción de este tipo. Cuando el precio de mercado cruza la barrera el contrato down-and-out deja de existir.

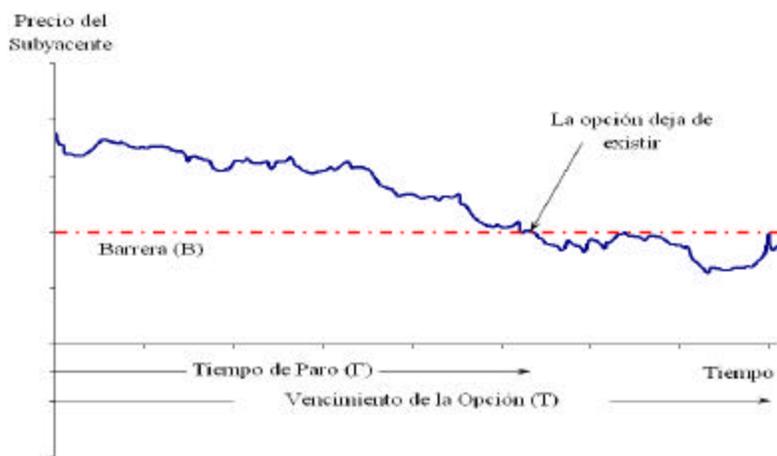


Figura 1. Opción Down-and-out

El tiempo que toma del inicio al momento en que toca la barrera es conocido como el *stopping time*. Un *stopping time* es aleatorio, debido a que no se sabe exactamente cuando se cruzará la barrera.

Sea Γ el *stopping time*. Para indicar si la opción down-and-out permanece, se puede utilizar la función indicadora. Sea T el vencimiento de la opción. Definimos la función indicadora como anteriormente, por

$$i(\Gamma > T) \equiv \begin{cases} 1; & \text{La barrera no ha sido cruzado en la fecha } T \quad (\Gamma > T) \\ 0; & \text{La barrera ha sido cruzado en la fecha } T \quad (\Gamma \leq T) \end{cases}$$

Para una opción down-and-out, algunas veces se proporciona un reembolso si la barrera fue cruzada. La magnitud de este reembolso (posiblemente cero) se establece cuando se inicia el contrato.

Ahora consideremos la valuación de una opción tipo call down-and-out. Por el momento ignoraremos cualquier reembolso. Consideremos una opción call down-and-out que vence en el tiempo T con precio de ejercicio K . La barrera que es menor al precio de mercado es denotada por b . El valor de la opción down-and-out está definido por el siguiente pago:

$$DOC[S(T), 0; K, b] \equiv i(\Gamma > T) \max(S(T) - K, 0)$$

Si la barrera no es cruzada en $\Gamma > T$ entonces $i(\Gamma > T) = 1$ y tenemos el pago común para una opción call estándar. Si la barrera ha sido cruzada en $\Gamma \leq T$, entonces $i(\Gamma > T) = 0$ y el pago de la opción es cero, sin considerar el nivel del precio de mercado del subyacente en el tiempo T .

Ahora consideremos la valuación de una opción put down-and-out cuya fecha de vencimiento es T con precio de ejercicio K . El valor de la opción put down-and-out al vencimiento está definido por el pago:

$$DOP[S(T), 0; K, b] \equiv i(\Gamma > T) \max(K - S(T), 0)$$

Si la barrera no ha sido cruzada en $\Gamma > T$, entonces $i(\Gamma > T) = 1$ y se tiene el pago común de un put estándar. Si la barrera ha sido cruzada en $\Gamma \leq T$ entonces $i(\Gamma > T) = 0$ y el valor de la opción es cero, sin considerar el nivel del precio de mercado del subyacente.

Las opciones de barrera down-and-in llegan a ser activadas solamente si el precio de mercado del activo alcanza por debajo a la barrera b . En consecuencia, el pago para la opción es contingente sobre el evento que la barrera b deba ser cruzada al menos una vez durante la vida de la opción. El valor de una opción down-and-in nunca será más grande que una opción ordinaria con el mismo precio de ejercicio y fecha de vencimiento, porque el valor de una opción down-and-in solamente sería igual al precio de una opción estándar si la barrera se cruza al menos una vez durante la vigencia del contrato. La probabilidad que la barrera sea cruzada es menor a 1.

Para la valuación de un call down-and-in, nuevamente es conveniente usar una función indicadora. Definimos la función indicadora por:

$$i(\Gamma \leq T) = \begin{cases} 1; & \text{La barrera ha sido cruzado en la fecha T} \quad (\Gamma \leq T) \\ 2; & \text{La barrera no ha sido cruzado en la fecha T} \quad (\Gamma > T) \end{cases}$$

Consideremos una opción que vence en T con precio de ejercicio K . El valor de una opción call down-and-in en su vencimiento está definido por el pago:

$$DIC[S(T), 0; K, b] \equiv i(\Gamma \leq T) \max\{S(T) - K, 0\}$$

Si la barrera es cruzada durante la vida de la opción en $\Gamma \leq T$, entonces $i(\Gamma \leq T) = 1$ y se tiene un pago de un call estándar. Si la barrera no es cruzada, $\Gamma > T$ entonces

$i(\Gamma \leq T) = 0$ y el pago de la opción es cero sin considerar el precio a mercado del activo subyacente.

Valuemos una opción call down-and-in para demostrar su equivalencia a una opción call ordinaria menos una opción call down-and-out. Hay una relación intrínseca entre las opciones down-and-in y down-and-out, asumiendo que para ambas opciones que no existen reembolsos. Esta relación puede ser vista como sigue. Durante la vida de la opción, la barrera puede o no ser cruzada. Usando la función indicadora definida en los dos casos anteriores, se puede escribir

$$1 = i(\Gamma \leq T) + i(\Gamma > T)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la expresión anterior, reescribimos el pago de una opción call down-and-in como:

$$\begin{aligned} DIC[S(T), 0; K, b] &= [1 - i(\Gamma > T)]max\{S(T) - K, 0\} \\ &= max\{S(T) - K, 0\} - i(\Gamma > T)max\{S(T) - K, 0\} \end{aligned}$$

El primer término sobre la derecha representa el pago para un call ordinario, y el segundo término es el pago de una opción call down-and-out. Esto da la relación equivalente entre la opción down-and-in y una opción call estándar menos un call down-and-out.

Supongamos que sobre la vida de la opción down-and-in, la barrera nunca es cruzada. ($\Gamma < T$). En consecuencia, por definición, el lado izquierdo de la expresión anterior, el valor de la opción es cero ya que la barrera no ha sido tocada. En el lado derecho de la expresión anterior, estamos largos en una opción call ordinaria. Por lo tanto, las dos opciones son canceladas y el valor neto es cero. Ambos lados de la expresión anterior son iguales a cero.

Ahora supongamos que sobre la vida de la opción down-and-in, la barrera es cruzada ($\Gamma \leq T$). Por consiguiente, la opción down-and-out dejó de existir ($\Gamma \leq T$), entonces tenemos una opción call estándar. Nuevamente, ambos lados de la expresión son iguales.

Entonces dada la expresión anterior, para cualquier vencimiento t , el valor de la opción down-and-in está dado por:

$$DIC[S(0), T; K, b] = c[S(0), T; K] - DOC[S(0), T; K, b]$$

donde $c[S(0), T; K]$ es el valor de una opción call europea con precio de ejercicio K y vencimiento T . Esta ecuación muestra que el valor de un down-and-in es equivalente al valor de un call estándar menos una opción down-and-out.

El valor de un put down-and-in en T con precio de ejercicio K está definido por

$$DIP[S(T), 0; K, b] \equiv i(\Gamma \leq T) \max\{K - S(T), 0\}$$

Repitiendo la lógica usada para deducir la expresión anterior, tenemos:

$$DIP[S(T), 0; K, b] = \max\{K - S(T), 0\} - i(\Gamma > T) \max\{K - S(T), 0\}$$

El primer término de la derecha representa el pago para un put estándar, y el segundo término es el pago de un put down-and-out. En consecuencia, antes del vencimiento:

$$DIP[S(0), T; K, b] = p[S(0), T; K] - DOP[S(0), T; K, b]$$

donde $p[S(0), T; K]$ es el valor de un put europeo estándar con precio de ejercicio K y vencimiento T . Esta expresión muestra la equivalencia entre una opción put down-and-in es una opción put ordinaria menos una opción down-and-out put.

Para una opción up-and-out se tiene una barrera superior. Si el precio de mercado del activo está por arriba de la barrera, la opción deja de existir, como se muestra en la Figura 2. Se puede proporcionar un reembolso si la barrera es cruzada. La magnitud del reembolso (posiblemente cero) está especificada cuando el contrato es iniciado.

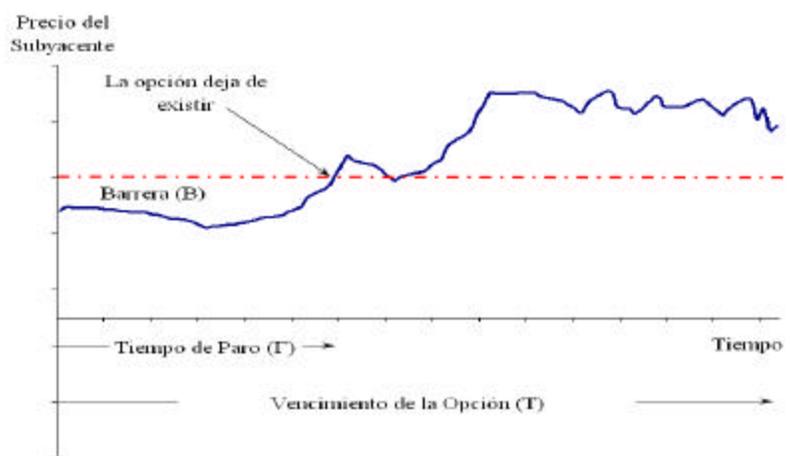


Figura 1. Opción Up-and-out

Suponiendo que no existen reembolsos, una opción call up-and-out con vencimiento T y precio de ejercicio K , en el que la barrera está denotada por b tiene un valor dado por:

$$UOC[S(T), O; K, b] \equiv i(\Gamma \leq T) \max\{S(T) - K, 0\}$$

Si la barrera no ha sido tocada ($\Gamma > T$) entonces $i(\Gamma > T) = 1$ y se tiene un pago ordinario de una opción call estándar. Si la barrera ha sido cruzada ($\Gamma \leq T$) entonces $i(\Gamma > T) = 0$ y el pago de la opción es cero sin considerar el precio de mercado del activo.

Para $K \geq b$ el valor de UOC es siempre cero, porque para que una UOC tenga valor, el precio de mercado del subyacente debe ser más grande del precio de ejercicio. Pero esto implicaría que la barrera fuera cruzada y en consecuencia, la opción dejará de existir.

Si el contrato up-and-out gana un reembolso cuando la barrera es cruzada entonces se necesita valuar este reembolso y añadirlo al valor de la opción.

Consideremos una opción put up-and-out que vence en T con precio de ejercicio K . El pago de un put up-and-out está dado por:

$$UOP = [S(T), O; K, b] \equiv i(\Gamma > T) \max\{K - S(T), 0\}$$

Una opción put up-and-in no tiene valor en el vencimiento a menos que el precio de mercado esté por arriba de la barrera b durante la vida de la opción. Entonces el pago de un put up-and-in estará dado por:

$$UIC[S(T), O; K, b] \equiv i(\Gamma \leq T) \max\{S(T) - K, 0\}$$

Si la barrera es alcanzada durante la vida de la opción ($\Gamma \leq T$), entonces $i(\Gamma \leq T) = 1$ y tenemos un pago de un call ordinario. Si la barrera no es cruzada ($\Gamma > T$) entonces $i(\Gamma \leq T) = 0$ y la opción vale cero, sin considerar el nivel de precio de mercado del activo. Valuamos un UIC mostrando la equivalencia con un call ordinaria menos UOC. Esta derivación está basada en la relación intrínseca entre un UIP y UOP asumiendo que ambas opciones no pagan reembolsos. Usando la ecuación anterior podemos reescribir el pago de un UIC como

$$UIC[S(T), O; K, b] = \max\{S(T) - K, 0\} - i(\Gamma > T)UOC[S(T), O; K, b]$$

Dada la expresión anterior para cualquier tiempo t antes del vencimiento, el valor de un UIC está dado por

$$UIC[S(T), O; K, b] = c[S(0), T; K] - i(\Gamma > T)UOC[S(T), O; K, b]$$

donde $c[S(0), T; K]$ es el valor de un call europeo estándar con precio de ejercicio K y vencimiento en T .

El pago de una opción put up-and-in está definido por:

$$UIP[S(T), O; K, b] \equiv i(\Gamma \leq T) \max\{K - S(T), 0\}$$

Repitiendo el mismo argumento dado en el valor de UIP anterior

$$UIC[S(T), O; K, b] = p[S(0), T; K] - i(\Gamma > T)UOC[S(T), O; K, b]$$

Pasemos ahora a las alternativas de soluciones cerradas para la valuación de opciones de barrera, objeto principal del presente trabajo.

Capítulo 2

Alternativas para obtener la Valuación de Opciones de Barrera

A continuación se discutirán tres extensiones del modelo Black - Scholes de opciones europeas ordinarias para obtener soluciones cerradas para la valuación de opciones de barrera, considerando enfoques basados en la probabilidad y utilizando resultados derivados de soluciones de ecuaciones diferenciales, así como la extensión propuesta por Reiner y Rubinstein (1991) para las fórmulas analíticas cerradas de los ocho tipos de opciones de barrera que existen.

2.1 Enfoque Probabilístico

Una vez explicados los conceptos y definiciones contenidas en el capítulo anterior, en esta sección nos enfocaremos en los cuatro tipos de opciones de barrera: up-and-out, down-and-out, up-and-in y down-and-in.

Para los contratos up-and-out, sea $\mathcal{X} = \Psi(S_T)$ un pago contingente estándar. Entonces el contrato up-and-out está definido como sigue.

Definición 2.1.

El contrato up-and-out está definido como,

$$X^{bo} = \begin{cases} \mathcal{X} & \text{si } S_t < b \quad \forall t \in [0, T] \\ 0 & \text{si } S_t \geq b \quad \text{para cualquier } t \in [0, T] \end{cases}$$

donde $b > S_0$ es constante y se llama la barrera.

Para valuar este contrato necesitamos $\Psi^b(S_T)$ la cual está definida como:

$$\Psi^b(x) = \begin{cases} \Psi(x) & \text{si } x < b \\ 0 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

El precio de arbitraje $\pi^{bo}(t, S_t, \Psi)$ con S_t el precio de mercado en el tiempo t , está dado por el siguiente teorema.

Teorema 2.1. (El precio libre de arbitraje de un contrato up-and-out)

Sea $\mathcal{X} = \Psi(S_T)$ un pago contingente, \mathcal{X}^{bo} definido como antes y $S_t < b$.

Entonces el precio libre de arbitraje de \mathcal{X}^{bo} es

$$\pi^{bo}(t, S_t, \Psi) = \pi(t, S_t, \Psi^b) - \left(\frac{b}{S_t}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} \pi\left(t, \frac{b^2}{S_t}, \Psi^b\right),$$

donde $\bar{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Para demostrar lo anterior, sin perder generalidad asumamos que $t = 0$ y $S_0 = s$. Por la fórmula de valuación neutral al riesgo tenemos que

$$\begin{aligned} \pi^{bo}(0, s, \Psi) &= B_0 E_{P^*} \left[\frac{\mathcal{X}^{bo}}{B_T} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ &= e^{-rT} E_{P^*} \left[\Psi(S_T) \mathcal{I} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} S_t < b \right\} \right] \\ &= e^{-rT} E_{P^*} [\Psi^b(S_{T \wedge \tau(b)})] \\ &= e^{-rT} E_{P^*} \int_{-\infty}^b \Psi^b(x) f(x) dx \end{aligned}$$

donde $f(x)$ es función de densidad para $S_{T \wedge \tau(b)}$.

Bajo la probabilidad neutral al riesgo P^* tenemos que

$$\begin{aligned} S_T &= s e^{((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T^*)} \\ &= e^{(\ln s + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T^*)} \end{aligned}$$

Sea $X_T = \ln s + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T^*$, entonces X_T es solución a

$$\begin{cases} dX_t = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t^* \\ X_0 = \ln s \end{cases}$$

De la sección previa sabemos que la función de densidad $g(x)$ para $X_{T \wedge \tau(\ln b)}$ es

$$g(x) = \varphi(x; \bar{r}T + \ln s, \sigma\sqrt{T}) - e^{\frac{2\bar{r}(\ln b - \ln s)}{\sigma^2}} \varphi(x; \bar{r}T - \ln s + 2 \ln b, \sigma\sqrt{T}),$$

donde $\bar{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Si escribimos $S_{T\Lambda\tau(b)} = e^{X_T\Lambda\tau(b)}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} e^{-rT} \int_{-\infty}^b \Psi^b(x) f(x) dx &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\ln b} \Psi^b(e^x) g(x) dx \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\ln b} \Psi^b(e^x) \varphi(x; \bar{r}T + \ln s, \sigma\sqrt{T}) dx \\ &\quad - e^{rT} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\ln b} \Psi^b(e^x) \varphi\left(x; \bar{r}T + \ln\left(\frac{b^2}{s}\right), \sigma\sqrt{T}\right) dx, \end{aligned}$$

si $x > \ln b$ entonces $\Psi^b(e^x) = 0$, tanto que sin hacer alguna diferencia si integramos para $+\infty$ en vez de $\ln b$. Ahora tenemos

$$\begin{aligned} \pi^{bo}(0, s, \Psi) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^b(e^x) \varphi(x; \bar{r}T + \ln s, \sigma\sqrt{T}) dx \\ &\quad - e^{-rT} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^b(e^x) \varphi\left(x; \bar{r}T + \ln\left(\frac{b^2}{s}\right), \sigma\sqrt{T}\right) dx. \end{aligned}$$

En la primera integral reconocemos $\varphi(x; \bar{r}T + \ln s, \sigma\sqrt{T})$ como función de densidad para X_T con $X_0 = \ln s$ y la segunda integral $\varphi\left(x; \bar{r}T + \ln\left(\frac{b^2}{s}\right), \sigma\sqrt{T}\right)$ como función de densidad para X_T con $X_0 = \ln \frac{b^2}{s}$.

Sea

$$\begin{cases} S_T^1 = e^{X_T} & \text{si } X_0 = \ln s \\ S_T^2 = e^{X_T} & \text{si } X_0 = \ln \frac{b^2}{s} \end{cases}$$

Esto deja

$$\begin{aligned}\pi^{bo}(0, s, \Psi) &= e^{rT} E_{P^*} [\Psi^b(S_T^1)] - \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} e^{-rT} E_{P^*} [\Psi^b(S_T^2)] \\ &= \pi(0, s, \Psi^b) - \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} \pi\left(0, \frac{b^2}{s}, \Psi^b\right)\end{aligned}$$

El contrato down-and-out es definido de una forma similar al contrato up-and-out.

Definición 2.2

El contrato down-and-out está definido como,

$$\mathcal{X}_{bo} = \begin{cases} \mathcal{X} & \text{si } S_t > b \quad \forall t \in [0, T] \\ 0 & \text{si } S_t \leq b \quad \text{para cualquier } t \in [0, T] \end{cases}$$

donde $b < S_0$ es constante y es llamada la barrera.

Para valuar este contrato necesitamos la función $\Psi_b(S_T)$ definida como

$$\Psi_b(x) = \begin{cases} \Psi(x) & \text{si } x > b \\ 0 & \text{si } x \leq b \end{cases} \quad (2.1)$$

El precio de un contrato down-and-out está dado por el teorema que se indica a continuación, pero la prueba se omite porque es casi idéntica a la demostración del Teorema 2.1.

Teorema 2.2 (El precio libre de arbitraje de un contrato down-and-out)

Sea $\mathcal{X} = \Psi(S_T)$ un pago contingente, \mathcal{X}_{bo} definido como antes y $S_t > b$ entonces, el precio libre de arbitraje de \mathcal{X}_{bo} es

$$\pi_{bo}(t, S_t, \Psi) = \pi(t, S_t, \Psi_b) - \left(\frac{b}{S_t}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} \pi\left(t, \frac{b^2}{S_t}, \Psi_b\right).$$

donde $\bar{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Para valuar, por ejemplo una opción call europea up-and-out, necesitamos saber que la función de valuación es lineal.

Lema 2.1

La función de valuación π es lineal en el tercer argumento, es decir,

$$\pi(t, S_t, \alpha\Psi + \gamma\Upsilon) = \alpha\pi(t, S_t, \Psi) + \gamma\pi(t, S_t, \Upsilon)$$

para algunas constantes reales α, γ y para cualquier función de los contratos Ψ y Υ .

La fórmula de valuación neutral al riesgo da

$$\begin{aligned} \pi(t, S_t, \alpha\Psi + \gamma\Upsilon) &= B_t E_{P^*} \left[\frac{\alpha\Psi + \gamma\Upsilon}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \alpha B_t E_{P^*} \left[\frac{\Psi}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right] + \gamma B_t E_{P^*} \left[\frac{\Upsilon}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \alpha\pi(t, s, \Psi) + \gamma\pi(t, s, \Upsilon). \end{aligned}$$

En la segunda igualdad usamos la linealidad del valor esperado.

También necesitamos un pago contingente $h(S_T, b)$ el cual está definido como

$$h(S_T, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_T > b \\ 0 & \text{si } S_T \leq b \end{cases}$$

El precio libre de arbitraje de $h(S_T, b)$ está dado por el siguiente Lema.

Lema 2.2

El precio libre de arbitraje de $h(S_T, b)$ es

$$\pi(t, S_t, h(S_T, b)) = e^{-r(T-t)} N \left[\frac{\ln \left(\frac{S_t}{b} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right]. \quad (2.2)$$

La fórmula de valuación neutral al riesgo da que

$$\pi(t, S_t, h(S_T, b)) = B_t E_{P^*} \left[\frac{h(S_T, b)}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.3)$$

Por el mismo argumento utilizado en la demostración del Teorema 1.4 del capítulo anterior, es suficiente considerar el valor esperado no condicional si usamos la misma notación que en el Teorema 1.4, tenemos

$$\begin{aligned}
\pi(t, s, h(S_T, b)) &= B_t E_{P^*} \left[\frac{h(S_T, b)}{B_T} \right] \\
&= e^{-r(T-t)} E_{P^*} [\mathcal{I}\{S_T > b\}] \\
&= e^{-r(T-t)} P^* \left\{ s e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma Y \sqrt{T-t}} > b \right\} \\
&= e^{-r(T-t)} P^* \left\{ \ln(s) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) + \sigma Y \sqrt{T-t} > \ln(b) \right\} \\
&= e^{-r(T-t)} P^* \left\{ \sigma Y \sqrt{T-t} > \ln(b) - \ln(s) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) \right\} \\
&= e^{-r(T-t)} P^* \left\{ \sigma Y \sqrt{T-t} > \ln\left(\frac{b}{s}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) \right\} \\
&= e^{-r(T-t)} P^* \left\{ Y > \frac{\ln\left(\frac{b}{s}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right\} \\
&= e^{-r(T-t)} P^* \left\{ Y < \frac{\ln\left(\frac{s}{b}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right\} \\
&= e^{-r(T-t)} N \left[\frac{\ln\left(\frac{s}{b}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right].
\end{aligned}$$

En la última ecuación usamos la simetría de la distribución normal.

A efecto de tener una notación más corta definamos $C(t, S_t, x)$ como el precio libre de arbitraje de un call europeo con precio de ejercicio x .

También definamos $H(t, S_t, y)$ como el precio libre de arbitraje de $h(S_t, y)$ dado por la ecuación (2.2).

Ahora tenemos que el precio libre de arbitraje de una opción call europea up-and-out está dado por el siguiente Lema.

Lema 2.3 (El precio libre de arbitraje de un call up-and-out)

Sea $\Psi = (S_T - K)^+$ y $S_0 < b$ entonces si $b \leq K$ el precio es

$$\pi^{bo}(t, s, \Psi) = 0,$$

y cuando $b > K$ tenemos

$$\begin{aligned}\pi^{bo}(t, s, \Psi) &= C(t, S_t, K) - (b - K)H(t, S_t, b) - C(t, S_t, b) \\ &\quad - \left(\frac{b}{S_t}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} \left(C\left(t, \frac{b^2}{S_t}, K\right) - (b - K)H\left(t, \frac{b^2}{S_t}, b\right) - C\left(t, \frac{b^2}{S_t}, b\right)\right).\end{aligned}$$

Para demostrarlo consideremos los siguientes casos:

Si $b \leq K$ es fácil ver que

$$\Psi^b = 0$$

por lo que el Teorema 2.1. tenemos que

$$\pi^{bo}(t, s, \Psi) = 0.$$

Si $b > K$ entonces vemos que

$$\Psi^b(S_T) = (S_T - K)^+ - (b - K)h(S_T, b) - (S_T - b)^+,$$

por el Teorema 2.1 ahora tenemos

$$\begin{aligned}\pi^{bo}(t, S_t, \Psi) &= \pi(t, S_t, (S_T - K)^+ - (b - K)h(S_T, b) - (S_T - b)^+) \\ &\quad - \left(\frac{b}{S_t}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} \pi\left(t, \frac{b^2}{S_t}, (S_T - K)^+ - (b - K)h(S_T, b) - (S_T - b)^+\right)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Por Lema 2.1 la ecuación (2.3) es igual a

$$\begin{aligned}&C(t, S_t, K) - (b - K)H(t, S_t, b) - C(t, S_t, b) \\ &\quad - \left(\frac{b}{S_t}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} \left(C\left(t, \frac{b^2}{S_t}, K\right) - (b - K)H\left(t, \frac{b^2}{S_t}, b\right) - C\left(t, \frac{b^2}{S_t}, b\right)\right)\end{aligned}$$

Ahora definiremos los contratos up-and-in y down-and-in. Como se discutió en el capítulo anterior, los contratos de tipo in son de alguna forma opuestos a los contratos de tipo out

porque en los contratos in son menos costosos si el precio a mercado del subyacente no toca la barrera, mientras que los contratos out son menos costosos si el precio de mercado del subyacente toca la barrera.

Si $\mathcal{X} = \Psi(S_T)$ es un pago contingente ordinario es transparente que los contratos up-and-in y down-and-in son definidos como sigue:

Definición 2.3

El contrato up-and-in está definido como,

$$\mathcal{X}^{bi} = \begin{cases} \mathcal{X} & \text{si } S_t \geq b \text{ para cualquier } t \in [0, T] \\ 0 & \text{si } S_t < b \quad \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

donde $b > S_0$ es una constante llamada la barrera.

Definición 2.4

El contrato down-and-in está definido como,

$$\mathcal{X}_{bi} = \begin{cases} \mathcal{X} & \text{si } S_t \leq b \text{ para cualquier } t \in [0, T] \\ 0 & \text{si } S_t > b \quad \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

donde $b > S_0$ es una constante llamada la barrera.

Para conocer los precios libres de arbitraje $\pi^{bi}(t, s, \Psi)$ y $\pi_{bi}(t, s, \Psi)$ respectivamente usaremos el siguiente lema, que fue discutido de manera intuitiva en el Capítulo 1 y que ahora será formalizado.

Lema 2.4 (Paridad In-Out de Opciones de Barrera)

El precio de un contrato up-and-in es,

$$\pi^{bi}(t, s, \Psi) = \pi(t, s, \Psi) - \pi^{b0}(t, s, \Psi), \tag{2.4}$$

y para todo contrato down-and-in tenemos,

$$\pi_{bi}(t, s, \Psi) = \pi(t, s, \Psi) - \pi_{b0}(t, s, \Psi), \tag{2.5}$$

Si compramos un contrato up-and-in y un contrato up-and-out de \mathcal{X} , ambos con la misma barrera, recibiremos exactamente \mathcal{X} el día de ejercicio. Entonces tenemos,

$$\pi(t, s, \Psi) = \pi^{bi}(t, s, \Psi) + \pi^{bo}(t, s, \Psi),$$

y de ello se obtiene inmediatamente la ecuación (2.4).

Para la ecuación (2.5) se sigue el mismo procedimiento.

El precio libre de arbitraje de dos contratos están dados por los siguientes dos teoremas.

Teorema 2.3 (El precio libre de arbitraje de un contrato up-and-in)

Sea $\mathcal{X} = \Psi(S_T)$ un pago contingente, \mathcal{X}^{bi} definido como antes y $S_t < b$ entonces, el precio libre de arbitraje de \mathcal{X}^{bi} es

$$\pi^{bi}(t, S_t, \Psi) = \pi(t, S_t, \Psi_b) + \left(\frac{b}{S_t}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} \pi\left(t, \frac{b^2}{S_t}, \Psi^b\right),$$

donde $\bar{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Por Lema 2.4 se sigue que

$$\pi^{bi}(t, s, \Psi) = \pi(t, s, \Psi) - \pi^{bo}(t, s, \Psi),$$

aplicando el Teorema 2.1 tenemos

$$\pi^{bi}(t, s, \Psi) = \pi(t, s, \Psi) - \pi(t, s, \Psi^b) + \left(\frac{b}{S_t}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} \pi\left(t, \frac{b^2}{S_t}, \Psi^b\right).$$

De las definiciones de Ψ^b y Ψ_b vemos que $\Psi = \Psi^b + \Psi_b$. Usando la linealidad de la función de valuación,

$$\begin{aligned} \pi^{bi}(t, s, \Psi) &= \pi(t, S_t, \Psi^b) + \pi(t, S_t, \Psi_b) - \pi(t, S_t, \Psi^b) \\ &\quad + \left(\frac{b}{S_t}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} \pi\left(t, \frac{b^2}{S_t}, \Psi^b\right) \\ &= \pi(t, S_t, \Psi_b) + \left(\frac{b}{S_t}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} \pi\left(t, \frac{b^2}{S_t}, \Psi^b\right) \end{aligned}$$

Teorema 2.4 (El precio libre de arbitraje de un contrato down-and-in)

Sea $\mathcal{X} = \Psi(S_T)$ un cobro contingente, \mathcal{X}_{bi} definido anteriormente y $S_t > b$ entonces, el precio libre de arbitraje de \mathcal{X}_{bi} es

$$\pi_{bi}(t, S_t, \Psi) = \pi(t, S_t, \Psi^b) + \left(\frac{b}{S_t}\right)^{\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}} \pi\left(t, \frac{b^2}{S_t}, \Psi_b\right),$$

donde $\bar{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

La prueba es casi idéntica a la demostración del Teorema 2.3 por lo que también es omitida.

2.2 Enfoque de Ecuaciones Diferenciales de Difusión del Calor

Como se ha visto, si en una opción europea de compra del tipo down-and-out el precio del activo subyacente, S_t , permanece por arriba de su barrera, B , es decir, $S_t > B$ en $0 \leq t \leq T$, entonces la opción tiene un valor intrínseco igual a $\max(S_T - K, 0)$, y en este caso, el precio de la opción satisface la ecuación diferencial parcial parabólica de segundo orden de Black-Scholes.

Sin embargo, si para algún $t' \in (0, T]$, la barrera se activa, es decir, $S_{t'} = B$, entonces el precio de la opción es cero. Bajo supuestos típicos, es posible encontrar una fórmula explícita para el valor de una opción europea de compra del tipo down-and-out. Por el momento, examinemos el caso $K \geq B$, es decir, el precio de ejercicio excede a la barrera.

En lo que sigue, se denotará el precio de una opción europea de compra del tipo down-and-out por $c_{DO}(S_t, t)$. Supongamos que el activo subyacente es una acción que no paga dividendos. Mientras S_t es mayor que B , el valor de la opción $c_{DO}(S_t, t)$ satisface la ecuación:

$$\frac{\partial c_{DO}}{\partial t} + \frac{\partial c_{DO}}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_{DO}}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - r c_{DO} = 0$$

con condición final

$$c_{DO}(S_t, T) = \max(S_T - K, 0).$$

Sin embargo, si S_t alcanza a B , entonces la opción pierde su valor, por lo cual

$$c_{DO}(b, t) = 0.$$

Para encontrar $c_{DO}(S_t, t)$ que resuelva el planteamiento anterior, primero se utiliza el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} S &= Ke^x \\ t &= \frac{T - \tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \\ c_{DO} &= Ke^{\alpha x + \beta \tau} v(x, \tau) \end{aligned} \tag{2.6}$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2}(k - 1) \\ \beta &= -\frac{1}{4}(k + 1)^2 \\ \kappa &= \frac{2r}{\sigma^2} \end{aligned}$$

De esta manera, la barrera se transforma en

$$x_0 = \ln\left(\frac{B}{K}\right)$$

y el problema de valorar una opción de compra del tipo down-and-out se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ x_0 &\leq x \leq \infty \\ \tau &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

con

$$\begin{aligned} v_0(x) &\equiv v(x, 0) \\ &= \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) \quad x_0 \leq x \leq \infty \end{aligned}$$

y

$$v_0(x) = 0 \tag{2.8}$$

Esta última condición, que se añade a la ecuación de calor, puede tratarse a través del método de imágenes. La interpretación ahora es que el calor se difunde en una barra semi-infinita con temperatura cero en el punto $x = \ln(B/K)$.

La difusión del calor en una barra es independiente del sistema de coordenadas que se elija para su estudio. Por lo tanto, la ecuación (2.8) es invariante bajo traslaciones, de x a $x + x_0$, o reflexiones, de x a $-x$. En consecuencia, si $v(x, \tau)$ es una solución de (2.6), entonces $v(x + x_0, \tau)$ y $v(-x + x_0, \tau)$ son también soluciones para cualquier constante x_0 . Se verá ahora como se resuelve un problema de difusión de calor en una barra semi-infinita con el método de imágenes mediante los siguientes pasos.

Primero, se resuelve el problema para una barra infinita hecha de dos barras semi-infinitas con distribuciones iniciales de temperaturas opuestas pero de la misma magnitud, es decir, media barra es caliente y media barra es fría. De esta manera, la temperatura en el punto de unión de las barras es cero. Se reflejan los valores iniciales, $x \geq x_0$, en el punto $x = \ln(B/K)$. Al mismo tiempo, con la reflexión se están cambiando los signos lo que garantiza (2.8). Por lo anterior, tenemos que, en lugar de resolver con (2.7) y (2.8) en el intervalo $x_0 \leq x < \infty$ se resuelve (2.7) para todo x sujeto a:

$$u(x, 0) = v_0(x) - v_0(2x_0 - x) \quad -\infty < x < \infty \quad (2.9)$$

En efecto, por el método de imágenes, se tiene que:

$$\begin{aligned} v_0(-x) &= v_0(-(x - x_0)) \\ &= v_0(-x + x_0). \end{aligned}$$

En la segunda igualdad se ha utilizado una primera traslación de x a $x - x_0$. Si además se hace otra traslación de x a $x - x_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} v_0(-x) &= v_0(-(x - x_0) + x_0) \\ &= v_0(2x_0 - x) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Esto es,

$$u(x, 0) = \begin{cases} \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) = u_0(x) & \text{si } x \geq x_0, \\ -\max\left(e^{(k+1)(x_0 - \frac{1}{2}x)} - e^{(k-1)(x_0 - \frac{1}{2}x)}, 0\right) & \text{si } x < x_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

Evidentemente, $u(x_0, 0) = 0$. De esta manera $u(x, \tau)$ satisface

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty \leq x \leq \infty, \quad \tau \geq 0, \quad (2.12)$$

con

$$u_0(x) \equiv u(x, 0) \quad (2.13)$$

y

$$u_0(x) = 0 \quad (2.14)$$

la cual es la ecuación típica de calor y su solución está dada por:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}} ds \quad (2.15)$$

y

$$c_{DO}(S_t, t) = K e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$$

donde α, β se toman como en (2.6).

Se realiza a continuación el siguiente cambio de variable:

$$y = \frac{s - x}{\sqrt{2\tau}}$$

$$x = s - y\sqrt{2\tau}$$

$$s = x + y\sqrt{2\tau}$$

esto implica que:

$$ds = \sqrt{2\tau} dy.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy.
\end{aligned}$$

Si se sustituye el valor de $u_0(x + \sqrt{2\tau}y)$ dado en (2.11), se tiene:

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[- \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} \max \left(e^{(k+1)(x_0 - \frac{1}{2}(x + \sqrt{2\tau}y))} - e^{(k-1)(x_0 - \frac{1}{2}(x + \sqrt{2\tau}y))}, 0 \right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right. \\
&\left. + \int_{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \max \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)(x + \sqrt{2\tau}y)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x + \sqrt{2\tau}y)}, 0 \right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right] \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $y < (2x_0 - x)/\sqrt{2\tau}$ para la primer integral y $y > -x/\sqrt{2\tau}$ para la segunda, la ecuación (2.16) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(- \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)(x_0 - \frac{1}{2}(x + \sqrt{2\tau}y))} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right. \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k-1)(x_0 - \frac{1}{2}(x - \sqrt{2\tau}y))} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&\quad + \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x + \sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&\quad \left. - \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x + \sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right) \\
&= -\Theta(k+1) + \Theta(k-1) + \Psi(k+1) - \Psi(k-1),
\end{aligned}$$

donde las funciones Ψ y Θ se definen, respectivamente como:

$$\Theta(k+1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)(x_0 - \frac{1}{2}(x + \sqrt{2\tau}y))} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (2.17)$$

y

$$\Psi(k+1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (2.18)$$

La integral Θ se resuelve a continuación:

$$\begin{aligned} \Theta(k+1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)(x_0-\frac{1}{2}(x+\sqrt{2\tau}y))} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)x_0-\frac{1}{2}(k+1)x} e^{-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}y-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)x_0-\frac{1}{2}(k+1)x} e^{-\frac{1}{2}[y^2+(k+1)\sqrt{2\tau}y]} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)x_0-\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}((k+1)\sqrt{2\tau})^2} e^{-\frac{1}{2}[y^2+(k+1)\sqrt{2\tau}y+(\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2]} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)x_0-\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}((k+1)\sqrt{2\tau})^2} e^{-\frac{1}{2}[y+(k+1)\sqrt{2\tau}]^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)x_0-\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}2\tau(k+1)^2} e^{-\frac{1}{2}[y+(k+1)\sqrt{2\tau}]^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)x_0-\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(y^2+(k+1)\sqrt{2\tau}y+\frac{1}{2}((k+1)\sqrt{2\tau})^2)} dy \\ &= \frac{e^{(k+1)x_0-\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{1}{2}[y+\frac{1}{2}((k+1)\sqrt{2\tau})]^2} dy \end{aligned} \quad (2.19)$$

Se define ahora otro cambio de variable

$$\epsilon = y + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

Así, $d\epsilon = dy$. Observe que cuando $y = (2x_0 - x)/\sqrt{2\tau}$, entonces

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{2x_0 - x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \\ &= \frac{2x_0 - x + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \end{aligned}$$

Después de sustituir (2.19) en (2.18), se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \Theta(k+1) \\
&= e^{(k+1)x_0 - \frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0 - x + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\
&= e^{(k+1)x_0 - \frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-\infty < \epsilon < \frac{2x_0 - x + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}]} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Si se define

$$d_1 = \frac{2x_0 - x + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

y

$$\Phi(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon,$$

se tiene, finalmente que

$$\Theta(k+1) = e^{(k+1)x_0 - \frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(d_1). \tag{2.21}$$

Al seguir el mismo procedimiento para $\Theta(k-1)$, se obtiene que

$$d_2 = \frac{2x_0 - x + (k-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}, \tag{2.22}$$

así

$$\Theta(k-1) = e^{(k-1)x_0 - \frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(d_2). \tag{2.23}$$

La integral $\Psi(k+1)$ se calcula como sigue

$$\begin{aligned}
\Psi(k+1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}y} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{-\frac{1}{2}[y^2 - (k+1)\sqrt{2\tau}y]} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}[y^2 - (k+1)\sqrt{2\tau}y + \frac{1}{2}((k+1)\sqrt{2\tau})^2]} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - (k+1)\sqrt{2\tau}y + \frac{1}{2}(k+1)^2\tau)} dy \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dy
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Considere el cambio de variable

$$\epsilon = y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau},$$

se tiene entonces que $d\epsilon = dy$. Observe que cuando $y = -x/\sqrt{2\tau}$, así

$$\epsilon = -\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} = \frac{-x - (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}. \tag{2.25}$$

Si se sustituye el cambio de variable (2.25) en (2.24) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Psi(k+1) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - (k+1)\sqrt{2\tau})^2} dy \\
&= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \int_{\left[\epsilon > -\frac{x + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\
&= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \int_{\left[-\infty < \epsilon < \frac{x + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon.
\end{aligned}$$

Si ahora se define

$$b_1 = \frac{x + (k + 1)\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

y

$$\Phi(b_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b_1} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon,$$

se obtiene:

$$\Psi(k + 1) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(b_1) \quad (2.26)$$

Al seguir el mismo procedimiento para $\Psi(k - 1)$, se obtiene que:

$$b_2 = \frac{x + (k - 1)\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

y

$$\Psi(k - 1) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(b_2) \quad (2.27)$$

En vista del cambio de variable,

$$\begin{aligned} x &= \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) \\ \tau &= \frac{1}{2}\sigma^2(T - t) \\ \kappa &= \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{2 \ln \left(\frac{B}{K} \right) - \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1 \right) \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sqrt{2 \left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right)}} \\
&= \frac{2 \ln B - 2 \ln K - \ln S_t + \ln K + \left(\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right) \sigma^2(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \\
&= \frac{\ln B^2 - \ln K - \ln S_t + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \\
&= \frac{\ln B^2 - \ln(S_t K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \\
&= \frac{\ln \left(\frac{B^2}{S_t K} \right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2 &= \frac{2 \ln \left(\frac{B}{K} \right) - \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1 \right) \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} \\
&= \frac{2 \ln(B) - 2 \ln(K) - \ln(S_t) + \ln(K) + \left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right) \sigma^2(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} \\
&= \frac{\ln(B^2) - \ln(K) - \ln(S_t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} \\
&= \frac{\ln(B^2) - \ln(K S_t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} \\
&= \frac{\ln \left(\frac{B^2}{S_t K} \right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1 \right) \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} \\
&= \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right) \sigma^2(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} \\
&= \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1\right) \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}},
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= -\Theta(k+1) + \Theta(k-1) + \Psi(k+1) - \Psi(k-1) \\
&= -e^{(k+1)x_0 - \frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(d_1) + e^{(k-1)x_0 - \frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(d_2) \\
&\quad + e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(b_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(b_2)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Así, el valor de la opción con barrera se calcula como

$$C_{DO}(S_t, t) = K e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \tag{2.29}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
C_{DO}(S_t, t) &= K e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \\
&\quad [-e^{(k+1)x_0 - \frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(d_1) \\
&\quad + e^{(k-1)x_0 - \frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(d_2) \\
&\quad + e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(b_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(b_2)] \\
&= -K e^{x_0(k+1) - kx} \Phi(d_1) + K e^{(k-1)x_0 - (k-1)x - k\tau} \Phi(d_2) \\
&\quad + [K e^x \Phi(b_1) - K e^{k\tau} \Phi(b_2)] \\
&= -\left(\frac{B}{S_t}\right)^k B \Phi(d_1) + K \left(\frac{B}{S_t}\right)^{k-1} e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\
&\quad + C_{BS}(S_t, t) \\
&= C_{BS}(S_t, t) - \left(\frac{B}{S_t}\right)^{(k-1)} \left(\frac{B^2}{S_t} \Phi(d_1) - K e^{e^{-r(T-t)}} \Phi(d_2)\right) \\
&= C_{BS}(S_t, t) - \left(\frac{S_t}{B}\right)^{-(k-1)} \left(\frac{B^2}{S_t} \Phi(d_1) - K e^{e^{-r(T-t)}} \Phi(d_2)\right) \\
&= C_{BS}(S_t, t) - \left(\frac{S_t}{B}\right)^{-(k-1)} C_{BS}(B^2/S_t, t)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Equivalentemente,

$$C_{DO}(S_t, t) = C_{BS}(S_t, t) - \left(\frac{S_t}{B}\right)^{-(k-1)} C_{BS}(B^2/S_t, t) \quad (2.31)$$

Notemos por último que

$$C_{DO}(S_t = B, t) = C_{BS}(B, t) - C_{BS}(B, t) = 0.$$

2.3 Enfoque Black-Scholes con Reembolso

El pago de una opción estándar europea sólo depende del precio del activo subyacente en la fecha de expiración. En particular, dado el precio final del activo subyacente, el pago será el mismo independientemente de la ruta que tome el subyacente durante la vida de la opción para alcanzar ese precio final. Si el precio del subyacente alcanza un precio dado por el primer movimiento hacia abajo y luego hacia arriba, o hacia arriba y luego hacia abajo, no importa para el comprador o vendedor de la opción. Es como si no le importa si viajas de París a Londres por aire o por el canal, siempre que llegues a Londres en el tiempo determinado.

Esta característica se denomina ruta independiente. De manera más general, el pago de la opción depende de alguna forma de la ruta descrita por el comportamiento del precio. Por ejemplo, el pago de una opción exótica denominada *lookback* depende del precio mínimo o máximo del subyacente alcanzado durante la vida de la opción, mientras que el pago de una opción exótica denominada asiática depende del precio promedio que se observó durante su vigencia. En esta sección se examinará de forma simple el tipo de opción de ruta dependiente donde el pago no depende solamente del precio final del subyacente sino también de que haya alcanzado o no un nivel determinado durante la vida de la opción. A este nivel del precio del subyacente se conoce como la barrera.

El objetivo es valorar una variedad de estas opciones con el desarrollo de Black-Scholes, mediante lo siguiente:

- (1) El activo subyacente sigue una caminata aleatoria conjunta lognormal.
- (2) Los argumentos de arbitraje permiten usar la valuación neutral al riesgo, descontando el pago esperado de la opción en su expiración o valuación recursiva para conseguir el valor de la opción en cualquier periodo igual al valor esperado descontado de la opción en un periodo posterior o su valor de ejercicio tempranamente, el que sea más grande, y
- (3) La tasa de interés libre de riesgo es usada como la tasa de descuento y el precio del subyacente se aprecia (además de la reinversión de pagos) a la misma tasa libre de riesgo.

Como se mencionó en la introducción de este documento, las opciones de barrera de tipo europeo son de alguna forma un punto intermedio entre opciones europeas y americanas. Son como opciones americanas porque su valor depende de cómo el precio del subyacente se comporta a través del tiempo. Pero son más simples para valuar que las opciones americanas dado que la cota crítica del precio del subyacente está determinada en el contrato. Por ello a diferencia de las opciones americanas, será posible establecer soluciones cerradas para su valuación.

Para esto, se requiere que la función de densidad del logaritmo natural del rendimiento del subyacente neutral al riesgo, u :

$$f(u) = \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{2\pi T} \right) e^{-\frac{1}{2}v^2} \quad (2.32)$$

con

$$v = \frac{(y - \mu T)}{\sigma \sqrt{T}} \quad (2.33)$$

$$\mu = \ln \left(\frac{r}{d} \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (2.34)$$

Esto es justamente una función de distribución normal. Donde r es 1 más la tasa de interés, d es 1 más la tasa de pago del subyacente, σ es la volatilidad del subyacente, y T es el tiempo de expiración de la opción. Como el modelo Black-Scholes está centrado en el precio del subyacente en la expiración, se puede permitir que r , d y σ sean funciones del tiempo. Sin embargo, dado que las opciones que se discuten en este trabajo dependen de caminos complejos sobre las rutas del tiempo de estas variables, para mantener la simpleza, asumimos que estas variables son constantes a través del tiempo.

Dado que el precio del subyacente comienza en S , arriba de la barrera H , la función de densidad del logaritmo natural del rendimiento del subyacente, donde el precio del subyacente rompe la barrera pero termina por arriba de la barrera en la fecha de expiración sería:

$$g(u) = e^{\frac{2\mu\alpha}{\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}v^2} \quad (2.35)$$

con

$$v = \frac{(u - 2\alpha - \mu T)}{\sigma \sqrt{T}} \quad (2.36)$$

$$\alpha = \ln \left(\frac{H}{S} \right) \quad (2.37)$$

Esto es una función de densidad normal pre-multiplicada por $e^{\frac{2\mu\alpha}{\sigma^2}}$.

Alternativamente, dado que el precio del subyacente comienza por debajo de la barrera, la función de densidad del logaritmo natural del rendimiento del subyacente, donde el precio rompa la barrera y termina en la fecha de expiración por debajo de la barrera, está dado por la misma expresión. Debemos distinguir esas dos situaciones para definir una variable binaria, η , que es igual a 1 en ese caso y -1 en el otro.

2.3.1 Opciones de Barrera Europeas "In"

El primer ejemplo es un call down-and-in. En este caso no se recibirá el pago del call hasta que el precio del subyacente haya alcanzado la barrera H . Si después de transcurrido el tiempo $t \leq T$, el precio del subyacente toca la barrera, entonces se recibirá el pago de un call europeo estándar con precio de ejercicio K y el tiempo para expiración $T - t$. Por otro lado, si durante el tiempo transcurrido t , la barrera nunca es tocada, entonces únicamente se recibirá un reembolso al vencimiento R . Conforme a lo anterior, el pago estaría dado por:

$$\begin{aligned} & \max(0, S^* - K) \text{ si para algun } t \leq T, S_t \leq H \\ & R \text{ (al vencimiento) si para toda } t \leq T, S_t > H \end{aligned}$$

donde S_t es el precio del subyacente después de transcurrido el tiempo t , y S^* es el precio del subyacente en el vencimiento.

Existen dos casos que se requiere distinguir:

- (1) $K > H$, en el que para recibir un pago positivo, el precio del subyacente debe terminar por arriba del precio de ejercicio y haber tocado la barrera; y
- (2) $K < H$, en el que el reembolso es recibido solamente si el precio del subyacente termina por arriba de la barrera sin haber tocado la barrera antes del vencimiento.

Para el primer caso $K > H$, se tienen tres tipos de resultados:

$$\begin{aligned} S^* > K \text{ condicionado a } S_t \leq H \text{ para algun } t \leq T & \Rightarrow \text{pago} = S^* - K \\ S^* \leq K \text{ condicionado a } S_t \leq H \text{ para algun } t \leq T & \Rightarrow \text{pago} = 0 \\ S^* > H \text{ para todo } t \leq T & \Rightarrow \text{pago} = R \end{aligned}$$

En el segundo caso $K < H$, para recibir un pago positivo del call, el precio del subyacente debe terminar por arriba de la barrera siempre que haya tocado la barrera, o terminado por debajo de ella pero arriba del precio de ejercicio. Nuevamente, el reembolso es solamente

recibido si el precio del subyacente termina por arriba de la barrera sin haber tocado la barrera antes del vencimiento. Para estos escenarios hay cuatro tipos de resultados:

$$\begin{aligned}
S^* > H \text{ condicional a } S_t \leq H \text{ para algun } t \leq T &\Rightarrow \text{pago} = S^* - K \\
S^* \leq H \text{ y } S^* > H &\Rightarrow \text{pago} = S^* - K \\
S^* \leq K &\Rightarrow \text{pago} = 0 \\
S_t > H \text{ para toda } t \leq T &\Rightarrow \text{pago} = R
\end{aligned}$$

Si regresamos al caso $K > H$, el valor de la opción es la suma de dos términos, el primero (pago del call) correspondiente a $P[S^* > K : S_t \leq H]$ y el segundo (reembolso) corresponde a $P[S^* > H] - P[S^* > H : S_t \leq H]$, que estarían dados por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
[3] &= r^{-T} \int_{\ln \frac{K}{S}}^{\eta\infty} \phi(Se^u - K)g(u)du \\
&= \phi S d^{-T} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda} N(\eta y) - \phi K r^{-T} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda-2} N(\eta y - \eta\sigma\sqrt{T})
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
[5] &= Rr^{-T} \int_{\ln \frac{H}{S}}^{\eta\infty} [f(u) - g(u)]du \\
&= Rr^{-T} \left[N(\eta x_1 - \eta\sigma\sqrt{T}) - \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda^2} N(\eta y_1 - \eta\sigma\sqrt{T}) \right]
\end{aligned} \tag{2.39}$$

donde $g(u)$ está dada como se señaló en el ecuación (2.35) en términos de (2.36) y (2.37), $f(u)$ como la ecuación (2.32) en términos de (2.33) y (2.34), y con

$$\begin{aligned}
x_1 &= \left[\frac{\ln \frac{S}{H}}{\sigma\sqrt{T}} \right] + \lambda\sigma\sqrt{T} \\
y &= \left[\frac{\ln \frac{H^2}{SK}}{\sigma\sqrt{T}} \right] + \lambda\sigma\sqrt{T} \\
y_1 &= \left[\frac{\ln \frac{H}{S}}{\sigma\sqrt{T}} \right] + \lambda\sigma\sqrt{T} \\
\lambda &= 1 + \left(\frac{\mu}{\sigma^2} \right)
\end{aligned}$$

$N(\cdot)$ es la función de distribución normal estándar y las variables binarias, η y ϕ son iguales a 1.

Entonces el valor actual del call down-and-in se puede expresar como

$$C_{di(K>H)} = [3] + [5] \quad (\eta = 1, \phi = 1) \quad (2.40)$$

Para el caso $K < H$, los términos serían $P[H \geq S^* > K]$ para el pago y $P[S^* > H : S_t \leq H]$ para el reembolso. Dado que

$$P[H \geq S^* > K] = P[S^* > K] - P[S^* > H]$$

Entonces las tres integrales correspondientes serían:

$$\begin{aligned} [1] &= r^{-T} \int_{\ln \frac{K}{S}}^{\phi\infty} \phi(Se^u - K)f(u)du \\ &= \phi S d^{-T} N(\phi x) - \phi K r^{-T} N(\phi x - \phi\sigma\sqrt{T}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} [2] &= r^{-T} \int_{\ln \frac{H}{S}}^{\phi\infty} \phi(Se^u - K)f(u)du \\ &= \phi S d^{-T} N(\phi x_1) - \phi K r^{-T} N(\phi x_1 - \phi\sigma\sqrt{T}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} [4] &= r^{-T} \int_{\ln \frac{K}{S}}^{\eta\infty} \phi(Se^u - K)g(u)du \\ &= \phi S d^{-T} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda} N(\eta y_1) - \phi K r^{-T} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda-2} N(\eta y_1 - \eta\sigma\sqrt{T}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde

$$x = \left[\frac{\ln \frac{S}{K}}{\sigma\sqrt{T}} \right] + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

y las variables binarias, η y ϕ , son igual a 1.

Usando esto, podemos escribir el valor actual de un call down-and-in como:

$$C_{di(K<H)} = [1] - [2] + [4] + [5] \quad (\eta = 1, \phi = 1) \quad (2.44)$$

La siguiente opción con barrera es un call up-and-in. Esta opción es idéntica al call down-and-in excepto porque el precio del subyacente empieza por debajo en vez de por arriba de la barrera. Entonces el pago de esta opción sería:

$$\begin{aligned} & \max[0, S^* - K] \text{ si para algun } t \leq T, S_t \geq H \\ R \text{ (al vencimiento) si para todo } t \leq T, S_t < H \end{aligned}$$

Para el caso $K > H$, los términos estarían dados por $P[S^* < H]$ y $P[S^* < H : S_t \geq H]$. Las funciones de densidad correspondientes serían $f(u)$ y $g(u)$, pero con $\eta = -1$. De este modo,

$$C_{ui(K>H)} = [1] + [5] \quad (\eta = -1, \phi = 1) \quad (2.45)$$

Para el caso $K < H$,

$$P[H > S^* > K : S_t \geq H] = P[S^* < H : S_t \geq H] - P[S^* \leq K : S_t \geq H]$$

Entonces, se puede escribir inmediatamente que

$$C_{ui(K<H)} = [2] - [3] + [4] + [5] \quad (\eta = -1, \phi = 1) \quad (2.46)$$

Sin necesidad de llevar a cabo su desarrollo y razonando en términos de los pagos, se puede ver que en el caso de los puts down-and-in y up-and-in se tendría:

$$\begin{aligned} & \max[0, K - S^*] \text{ si para algun } t \leq T, S_t \leq H \\ R \text{ (en el vencimiento) si para toda } t \leq T, S_t > H \end{aligned}$$

$$P_{di(K>H)} = [2] - [3] + [4] + [5] \quad (\eta = 1, \phi = -1) \quad (2.47)$$

$$P_{di(K<H)} = [1] + [5] \quad (\eta = 1, \phi = -1) \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} & \max[0, K - S^*] \text{ si para algun } t \leq T, S_t \geq H \\ R \text{ (en el vencimiento) si para toda } t \leq T, S_t < H \end{aligned}$$

$$P_{ui(K>H)} = [1] - [2] + [4] + [5] \quad (\eta = -1, \phi = -1) \quad (2.49)$$

$$P_{ui(K<H)} = [3] + [5] \quad (\eta = -1, \phi = -1) \quad (2.50)$$

2.3.2 Opciones de Barrera Europeas "Out"

En correspondencia a las cuatro opciones de barrera de tipo in vistas, existen cuatro opciones de tipo out. Por ejemplo, en un call down-and-out, un call estándar tiene existencia cuando el down-and-out está emitido, pero se extingue antes del vencimiento si el precio del subyacente cae por debajo de la barrera, H . En ese caso el comprador de la opción pudiera pagar un reembolso fijo, R . De otra forma, si el precio del subyacente nunca cae por debajo de H , el call down-and-out tendrá el mismo pago que un call estándar. En forma concisa, el pago de esta opción sería:

$$\begin{aligned} & \max[0, S * -K] \text{ si para toda } t \geq T, S_t > H \\ & R(\text{si toca}) \text{ si para alguna } t \leq T, S_t \leq H \end{aligned}$$

Un ejemplo del uso de un call down-and-out sería mantener un call cubierto que está forzado a liquidar el activo subyacente si el precio de éste cae abruptamente. Si se vende un call down-and-out en lugar de un call estándar, se podría arreglar para tener un call liquidado automáticamente al mismo tiempo.

Si el reembolso fuera $R = 0$, se podría establecer la siguiente relación de paridad que anteriormente se ha discutido:

$$\text{Opción Estándar} = \text{Opción Down-And-Out} + \text{Opción Down-And-In}$$

Para ver esto, supongamos que se tienen dos opciones idénticas down-and-out y down-and-in que no pagan reembolsos. Si la barrera común nunca es tocada, entonces se recibe el pago de una opción estándar; si se toca la barrera, como la opción down-and-out se ha extinguido, la opción down-and-in se convierte en una opción estándar idéntica a la que uno perdió cuando la opción down-and-out fue cancelada. De este modo, siempre se recibirá el pago de una opción estándar.

Si las opciones de barrera de tipo out pagan reembolso se presentaría una dificultad. Recordemos que para opciones de tipo in, no es posible recibir el reembolso antes de su expiración, dado que permanece la duda acerca de si la barrera será tocada o no. Sin embargo, para una opción de tipo out, es posible que el reembolso sea pagado al momento en que la barrera es tocada. Esto complica el problema para la valuación neutral al riesgo, ya que el reembolso puede ser recibido en forma aleatoria y no en un tiempo predeterminado. Por lo que ahora se requerirá de una función de densidad del tiempo (τ) para cuando el precio del subyacente toque la barrera y se pueda obtener la diferencial de $g(u)$ con respecto a t :

$$h(t) = \frac{-\eta\alpha}{\sigma t \sqrt{2\pi t}} e^{\frac{1}{2}v^2} \quad (2.51)$$

con

$$v = \frac{-\alpha + \mu t}{\sigma \sqrt{t}}$$

Aquí $\eta = 1$ si la barrera está siendo aproximada por arriba y $\eta = -1$ si la barrera está siendo aproximada por debajo.

El valor presente del reembolso es entonces el valor esperado del reembolso descontado a la tasa de interés que aumenta el poder durante el primer periodo de tiempo:

$$[6] = R \int_0^T r^{-t} h(t) dt = R \left[\left(\frac{H}{S} \right)^{a+b} N(\eta z) + \left(\frac{H}{S} \right)^{a-b} N(\eta z - 2\eta b \sigma \sqrt{T}) \right] \quad (2.52)$$

donde

$$z = \left[\frac{\ln \left(\frac{H}{S} \right)}{\sigma \sqrt{T}} \right] + b \sigma \sqrt{T}$$

$$a = \frac{\mu}{\sigma^2},$$

$$b = \frac{\left[\sqrt{(\mu^2 + 2(\ln r)\sigma^2)} \right]}{\sigma^2}$$

Una vez planteado lo anterior, se está en posibilidad de valuar las opciones de barrera de tipo out restantes:

$$C_{do(K>H)} = [1] - [3] + [6] \quad \eta = 1, \phi = 1 \quad (2.53)$$

$$C_{do(K<H)} = [2] - [4] + [6] \quad \eta = 1, \phi = 1 \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \text{call up - and - out : } & \max[0, S^* - K] && \text{si para toda } t \geq T, S_t < H \\ (S < H) & R(\text{en la barrera}) && \text{si para alguna } t \geq T, S_t \leq H \end{aligned}$$

$$C_{uo(K>H)} = [6] \quad \eta = -1, \phi = 1 \quad (2.55)$$

$$C_{uo(K<H)} = [1] - [2] + [3] - [4] + [6] \quad \eta = -1, \phi = 1 \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \text{put down - and - out : } & \max[0, K - S^*] && \text{si para toda } t \geq T, S_t > H \\ (S > H) & R(\text{en la barrera}) && \text{si para alguna } t \geq T, S_t \leq H \end{aligned}$$

$$P_{do(K>H)} = [1] - [2] + [3] - [4] + [6] \quad \eta = 1, \phi = -1 \quad (2.57)$$

$$P_{do(K<H)} = [6] \quad \eta = 1, \phi = -1 \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \text{put up - and - out :} \quad & \max[0, K - S^*] && \text{si para toda } t \geq T, S_t < H \\ (S < H) \quad & R(\text{en la barrera}) && \text{si para alguna } t \geq T, S_t \geq H \end{aligned}$$

$$P_{uo(K>H)} = [2] - [4] + [6] \quad \eta = -1, \phi = -1 \quad (2.59)$$

$$P_{uo(K<H)} = [1] - [3] + [6] \quad \eta = -1, \phi = -1 \quad (2.60)$$

Con lo anterior, se han presentado las fórmulas de valuación para todos los tipos de opciones estándar de barrera.

Adicionalmente, en el Apéndice B se proporciona un formulario para la valuación de los ocho tipos de opciones de barreras discutidas en esta sección.

2.4 Corrección de Continuidad

Como los mercados de derivados han madurado, las opciones con barreras han llegado a ser populares porque tienen una mayor precisión que permite a los inversionistas obtener o evitar exposición según su apetito de riesgo.

A lo largo de este trabajo se han presentado modelos para encontrar el valor de una opción de barrera que depende sensiblemente de la probabilidad neutral al riesgo de que la acción subyacente esté dentro del dinero (in-the-money). Las soluciones analíticas que hasta ahora se han discutido, pueden ser obtenidas de forma rápida a través de cálculos sencillos, con resultados adecuados y razones de coberturas, que son importantes para administrar el riesgo de los portafolios de productos derivados.

Sin embargo, estas soluciones asumen que las opciones son activadas tan pronto como la barrera sea alcanzada. En el mundo real, la pregunta de si la barrera ha sido o no alcanzada (y la opción in está ahora activada o la opción out está muerta) está típicamente determinada al cierre del día, es decir de forma discreta. Por ello el supuesto de que los precios de los activos se distribuyen de manera lognormal en forma continua no se cumple.

Con el supuesto de que los cambios en los precios de los activos siguen un Movimiento Browniano Geométrico, con monitoreo continuo de la barrera, se tiene una mayor oportunidad de que la barrera sea atravesada que con observaciones discretas como realmente sucede. Por esta razón, las fórmulas analíticas sobrevalúan las opciones de tipo in en comparación al modelo discreto apropiado, asimismo para opciones de tipo out, las fórmulas analíticas subvalúan su precio.

El pago por una opción de barrera depende de que el activo subyacente, ya sea una acción, índice o tasa de interés, alcance un nivel específico durante la vida de la opción. Muchos de los modelos para valorar opciones asumen que la barrera puede ser monitoreada continuamente, bajo este supuesto, la opción puede ser valuada de forma cerrada. Muchos contratos reales con barrera específica se monitorean de forma discreta, por lo que no existen fórmulas para valorar este tipo de opción, aún cuando se utilicen métodos numéricos, la valuación es difícil. Pero se puede demostrar que las opciones de barrera discretas pueden ser valuadas con una precisión notable usando las fórmulas para barreras continuas si aplicamos una simple corrección a la continuidad de la barrera.

Muchos de los modelos de opciones asumen que el monitoreo de la barrera es continuo: un knock-in o knock-out se presume ocurre si la barrera es desfasada en cualquier instante de la vida de la opción. Bajo esta supuesto, Merton (1973) obtuvo una fórmula para valorar calls de tipo knock-out. Posteriormente, Haynen y Kat (1994, 1995), Kunitomo y Ikeda (1992), Rich (1994, 1994) y Rubinstein y Reiner (1991) han realizado trabajos sobre la valuación de opciones con monitoreo de barrera continua. Sin embargo, en la realidad existe una porción considerable de contratos cuyas barreras se monitorean en tiempos específicos, en particular precios de cierre. Dentro de la literatura de negociación de productos derivados se ha criticado la existencia de modelos de valuación por no dirigirse a esta característica. Además, ejemplos numéricos, indican que los precios de opciones valuadas discreta y continuamente pueden diferir substancialmente, aún bajo el monitoreo diario de la barrera. Desafortunadamente, el precio exacto resulta posible en el caso continuo y no se extiende para caso discreto. Aún cuando se utilicen métodos numéricos como técnicas de árboles o simulación Monte Carlo enfrentan dificultades para incorporar el monitoreo discreto, como fue demostrado por Broadie, Glasserman y Kou (1997).

Por lo anterior, Broadie, Glasserman y Kou (1997) introdujeron el concepto de Corrección de Continuidad. Este término de corrección permite usar soluciones de forma cerrada para valuaciones continuas de opciones aproximadas a las formas discretas.

Sea $V(H)$ el precio de una opción de barrera continua, y $V_m(H)$ el precio de una opción de barrera con las mismas características pero valuada de forma discreta, donde m es el número de veces que el precio del activo es observado sobre el periodo.

Entonces

$$V_m(H) = V \left(H e^{\pm \beta \sigma \sqrt{\frac{T}{m}}} \right) \quad (3.1)$$

con $+$ para una opción up y $-$ para una opción de tipo down.

Esto significa que para obtener el precio de una opción de barrera que se monitorea de manera discreta usando una fórmula continua, se necesita cambiar la barrera de S_0 por un factor de $e^{\pm \beta \sigma \sqrt{\frac{T}{m}}}$.

Este resultado estuvo basado en los supuestos usuales de Black-Scholes (1973), al considerar que el precio del activo S_t sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dS}{S} = \nu dt + \sigma dZ$$

donde Z es un proceso de Wiener, ν y σ son constantes positivas, S_0 es fijo y $H \neq S_0$ con H la barrera del contrato. Si tomamos r como una constante que representa la tasa libre de riesgo compuesta continuamente, el precio del pago contingente sobre S es el valor esperado de sus pagos traídos a valor presente bajo la medida martingala equivalente, de tal forma que se asumió que $\nu = r$.

Bajo estas consideraciones, Broadie, Glasserman y Kou (1997) encontraron numéricamente que $\beta = 0.5862$ para opciones de tipo up que tocan la barrera por debajo, y $\beta = -0.5862$ para opciones down las cuales tocan la barrera por arriba. Este cambio en la barrera como se vió en la ecuación 3.1 está determinado únicamente por la frecuencia del monitoreo m , por la volatilidad del precio del activo subyacente σ y por una constante β . Los resultados numéricos presentados por Broadie, Glasserman y Kou (1997) indican que la aproximación es suficientemente adecuada para corregir los precios de las opciones de barrera en la mayoría de los casos, excepto cuando el precio del activo subyacente coincida con la barrera, pues dentro de los supuestos bajo los cuales se desarrolló el análisis se restringió a que $H \neq S_0$.

De manera complementaria a las alternativas para obtener la valuación de opciones de barrera utilizando la fórmula para el precio de opciones estándar, en el siguiente capítulo se discutirán otros métodos para valuar las opciones de barrera, que por su complejidad requieren largos tiempos de procesamiento para su instrumentación.

Capítulo 3

Métodos Numéricos para Valuación de Opciones de Barrera

En el presente capítulo se describirán otros tipo de métodos que han sido desarrollados inicialmente para la valuación de opciones estándar y que han sido ampliados a opciones exóticas tales como las opciones de barrera.

3.1 Métodos de Árboles (Método Binomial - Trinomial)

Muchos de los contratos de opciones de barrera que se negocian actualmente tiene soluciones no analíticas. Los métodos analíticos trabajan solamente con barreras simples asumiendo que la evolución del precio se distribuye de forma lognormal y que el ejercicio se realiza al estilo europeo. En los mercados extrabursátiles (OTC) se pueden llegar a negociar opciones con barreras que puedan tener dependencia del tiempo arbitrariamente, cuya volatilidad implícita exhiba un sesgo que corresponda a una evolución no-lognormal del precio del activo subyacente, o llevar a cabo su ejercicio en cualquier tiempo durante la vida de la opción como las de estilo americano. En muchos de estos casos no existen soluciones analíticas para encontrar el valor de la opción de barrera, por lo que se utilizan soluciones numéricas.

Las técnicas numéricas más comunes incluyen soluciones de ecuaciones diferenciales con árboles binomiales como los que proponen Cox, Ross y Rubinstein (1979). Ellos introdujeron el método binomial en el contexto de opciones estándar, el cual converge rápidamente según se incrementa el número de niveles en el árbol binomial. Sin embargo, la deficiencia que presenta en el caso de opciones de barrera es que sus valores convergen muy lentamente incrementando el número de árboles y enrejados necesarios para obtener resultados, lo que se traduce en largos tiempos de procesamiento. Entre más cerca se encuentre el precio de mercado de la barrera, más lenta será la tasa de convergencia.

Lo anterior sucede porque la opción de barrera converge dentro de un modelo tipo "diente de sierra" con varios picos periódicos que se mueven alrededor del resultado correcto. Esos picos se van atenuando lentamente y por ello se requiere generar un gran número de pasos para obtener resultados razonablemente exactos. En la Figura 3 se muestra un ejemplo de esto.

Boyle y Lau (1994) señalan que la razón para que la convergencia "dientes de sierra" sea lenta es que la barrera asumida para el árbol es diferente de la barrera verdadera. Para ilustrar esto, Derman et. al. (1995) y Hull (2002) distinguen entre la barrera interna y la externa. La primera sería la línea formada por los nodos que están justo fuera de la barrera verdadera, la segunda comprende esos valores que están justo dentro de ella. Los métodos de enrejado usuales asumen implícitamente que la barrera externa es la verdadera, una aseveración que induce los errores teniendo el efecto de converger lento hacia abajo. Para

tomar un ejemplo, cuando el lapso de tiempo es Δt , el espacio vertical entre los nodos es del orden $\sqrt{\Delta t}$. Esto significa que los errores que son creados por la diferencia entre la barrera verdadera y la barrera externa también será del orden de $\sqrt{\Delta t}$.

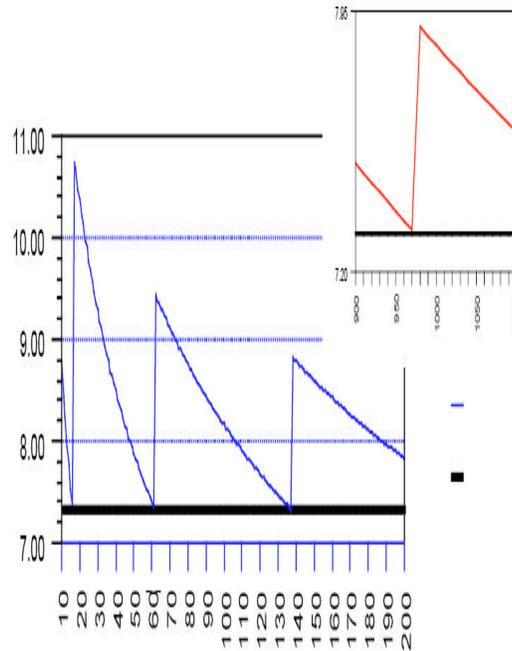


Figura 3. Convergencia de soluciones a través de árbol binomial.

Las malas mediciones creadas en el uso de métodos de enrejados son clasificadas por Derman, Kani, Ergener y Bardhan (1995) como *errores de cuantificación del precio del subyacente y errores de especificación de la opción*:

- (1) Error de cuantificación del precio de la acción.

Este tipo de inexactitud es causada por la inevitable existencia del propio enrejado, el cual cuantifica el precio de la acción y el instante en el tiempo en el cual puede ser observado. Una vez que se ha elegido el enrejado, el precio de la acción tiene que tomar los valores de los puntos en el enrejado. En esencia, cuando se usan enrejados estás valuando una opción con una acción que se mueve discretamente. Entonces el precio de la opción sería teóricamente correcto solamente si el subyacente se comporta exactamente como fue cuantificado. Lo anterior lleva a que si se quiere usar el modelo para opciones referidas a acciones que se mueven casi continuamente, se debe de utilizar un gran número de rejas, casi infinitesimal.

- (2) Error en la especificación de la opción.

Es causado por la incapacidad del enrejado para representar exactamente los términos del contrato de opción. Una vez que se ha elegido el enrejado, los precios disponibles del subyacente son fijos. Si el precio de ejercicio o la barrera de la opción no coinciden con uno de los precios de la acción establecidos, se tendrá que mover al precio del

subyacente más cercano disponible. Entonces, la opción que se valúa con el enrejado tiene términos contractuales que difieren de los de la opción verdadera.

Se han propuesto varias alternativas para resolver o atenuar los problemas de valuación generados por los errores de cuantificación y especificación.

Una de ellas sería colocar los nodos exactamente en las barreras, como se mencionó anteriormente. En la Figura 4 se puede observar como se esquematiza esa alternativa.

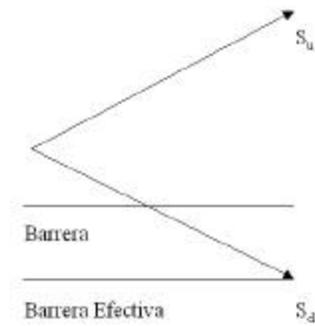


Figura 4. La barrera se mueve efectivamente para la calibración del árbol.

En el árbol trinomial, por ejemplo, hay tres posibles caminos hacia donde el precio del subyacente puede ir en cada uno de los nodos:

- (1) Hacia arriba una cantidad proporcional u
- (2) Permanece igual o
- (3) Hacia abajo por una cantidad proporcional $d = \frac{1}{u}$

Si tenemos dos barreras horizontales H_1 y H_2 , con $H_1 > H_2$, entonces es fácil elegir u tal que el nodo permanezca sobre ambas barreras.

La condición que debe ser satisfecha es:

$$H_2 = H_1 u^N$$

que significa que para algún entero N

$$\ln H_2 = \ln H_1 + N \ln u$$

En el caso de un árbol trinomial estándar para una acción que no paga dividendos, el valor para u que corresponde a la media y desviación estándar de los cambios en el precio cuando los términos de orden mayor que Δt son ignorados es:

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}$$

y consecuentemente

$$\ln u = \sigma\sqrt{3\Delta t}$$

Tratando de traer $\ln u$ tan cerca como sea posible a este valor mientras encontramos la condición de arriba significa que

$$\ln u = \frac{\ln H_2 - \ln H_1}{N} \quad (3.2)$$

donde

$$N = \text{int} \left[\frac{\ln H_2 - \ln H_1}{\sigma\sqrt{3\Delta t}} + 0.5 \right] \quad (3.3)$$

Usualmente, el árbol trinomial comienza con el precio de la acción inicial como el nodo central. Aquí, el precio inicial se encontrará en el primer nodo, lo que significa que el nodo central del árbol que se eligirá será

$$H_1 u^M \quad (3.4)$$

donde M es el entero más cercano al precio de inicial de la acción

$$M = \text{int} \left[\frac{\ln S_0 - \ln H_1}{\ln u} + 0.5 \right] \quad (3.5)$$

Con la anterior, los nodos y las barreras coinciden haciendo que converja rápidamente, excepto en los casos donde el precio inicial del activo esté cerca a una de las barreras.

La segunda posibilidad para atenuar los problemas de medición es ajustar los nodos para que no estén sobre las barreras. De hecho, Boyle y Lau (1994) primero destacaron el hecho que para árboles binomiales de 15, 60 y 138 niveles, el valor binomial llega a ser muy cercano al valor analítico correcto. La razón es que para esos números la barrera cae casi exactamente sobre los nodos, lo que hace que el error de especificación tienda hacia cero.

Siguiendo este descubrimiento, Boyle y Lau sugieren un camino para aproximar el valor de los nodos a través de obtener un nuevo nodo óptimo, que da origen a una buena aproximación del precio de la opción de barrera en cuestión.

$$nodo(i) = \frac{i^2 \sigma^2 T}{[\ln(\frac{S}{H})]^2} \quad (3.6)$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$ e indica el número de nodo y T es el tiempo de vencimiento.

Es importante mencionar que el argumento antes descrito recae sobre el hecho que la localización de los nodos de la acción necesitan ser independientes de la tasa libre de riesgo y que permanece sobre el mismo nivel. Esas características son características para el árbol binomial estándar de Cox, Ross y Rubinstein. Significa que si el método de enrejado diferente es aplicado o el nivel de barrera varía en el tiempo, el método de Boyle y Lau no es aplicable.

Para superar esta aparente desventaja, Derman, Kani, Ergener y Bardhan trataron de establecer un método que permitiera corregir el error de especificación independientemente de la forma del enrejado o la localización de la barrera relativa a ella. Aunque los algoritmos parezcan un poco confusos inicialmente, llega a ser más claro en el momento en que se entiende como un método de interpolación. Consideraron una opción con valor $V(S)$ que toca dentro de un valor objetivo $T(S)$ si el precio de la acción S cruza sobre la barrera B . Ellos usan el término "barrera especificada", por lo cual ellos explican que el valor especificado dentro del contrato de la opción. En contraste, la "barrera modificada" es el primer valor de los nodos sobre el enrejado donde la barrera se rompe. El término "barrera efectiva" es reservado para esos nodos que son obtenidos valuando la opción a través de inducción hacia atrás de la barrera efectiva. Primero, valúan la opción objetivo $T(S)$ y la opción de barrera $V(S)$ de cada nodo sobre el árbol en el nivel de la barrera efectiva. Entonces calculan las derivadas finitas con respecto al precio de la acción para cada opción en el nivel de barrera como sigue:

$$\Delta_T = \frac{T(U) - T(D)}{U - D}$$

$$\Delta_V = \frac{V(U) - V(D)}{U - D}$$

Usando la serie de Taylor de primer orden para $T()$, llegaron al valor de la opción objetivo sobre la barrera especificada B de su valor en el nodo U .

$$T(B) = T(U) + \Delta_T(B - D) \quad (3.7)$$

Similarmente, obtuvieron el valor corregido de la opción de barrera sobre el nodo de la barrera modificada D de su valor knock-in $T(B)$ sobre la barrera específica.

$$\tilde{V}(D) = T(B) - \Delta_V(B - D) \quad (3.8)$$

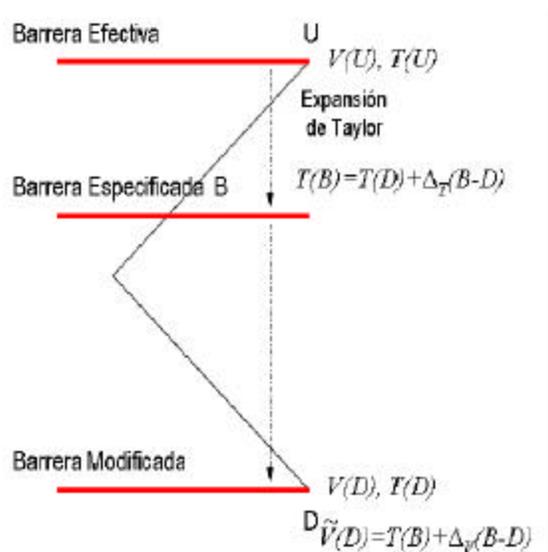


Figura 5. Algoritmo de Barrera Modificada para un árbol binomial.

Entonces solamente necesitaron usar inducción hacia atrás de la barrera modificada con $\tilde{V}(D)$ con el valor acotado del nodo, dentro del orden de encontrar el valor de $V(S)$ en todos los otros nodos dentro de la barrera.

Esto, también llamado el "método de barrera modificada", tiene parecido con el *bootstrapping* usado para obtener curvas de rendimiento de precios de bonos. En un comienzo, se valúa visiblemente una opción de manera errónea por inducción hacia atrás de un nivel de barrera efectiva erróneo para obtener los valores numéricos para la derivada de la opción verdadera en todos los pasos sobre su barrera. Usando esas derivadas en cada nivel del árbol y combinando con una serie de Taylor, se obtiene el valor de una barrera modificada para encontrar finalmente la verdadera opción con inducción hacia atrás de la barrera modificada.

Un tercer método para atenuar los problemas de valuación por los errores de cuantificación del precio del subyacente y de especificación de la opción, es el modelo de malla adaptada (*adaptive mesh model*) que fue desarrollado por Figlewski y Gao (1999). Ellos primero usaron este método para valuar opciones de estilo americano y subsecuentemente lo extendieron para su uso en el caso de opciones de barrera. Su motivación fue mejorar la eficiencia computacional, es decir, reducir el tiempo de convergencia, incorporando un alto sobre la baja resolución del árbol para producir un modelamiento más detallado del precio del activo dentro de las regiones del árbol donde es más necesario. En el caso de opciones americanas estándar, por ejemplo, es suficiente tener una alta resolución alrededor del precio de ejercicio justo como es suficiente tener este tipo de enrejado cercano a la barrera para una opción de barrera. Este método deja mejoras significantes en el tiempo de procesamiento, particularmente en casos donde el precio del activo inicial está cercano a la barrera, un atributo que crea dificultades en modelos de enrejado estándar. Un modelo

de malla adaptada con 60 pasos, por ejemplo, es diez veces más adecuado que un enrejado trinomial de 5,000 veces y corre más de 1,000 veces más rápido.

Es importante destacar que en las tres aproximaciones descritas anteriormente, siempre es más eficiente usar un árbol trinomial que uno binomial para reducir los tiempos de convergencia. Para opciones de barrera, el método trinomial de Boyle (1986) puede ser modificado usando la técnica introducida por Ritchken y Kamrad (1991) para obtener resultados precisos más rápidamente.

Aplicando esa técnica, las magnitudes u , d y m , así como las probabilidades respectivas son definidas como sigue:

$$\begin{aligned} u &= \lambda\sigma\sqrt{T} \\ d &= -\lambda\sigma\sqrt{T} \\ m &= 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{T}}{2\lambda\sigma} \tag{3.10}$$

$$p_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{T}}{2\lambda\sigma} \tag{3.11}$$

$$p_m = 1 - \frac{1}{\lambda^2} \tag{3.12}$$

donde la tendencia μ está dada por $\mu = r - D - 0.5\sigma^2$ y λ es la variable de control que gobierna el espacio entre las capas del precio sobre el árbol trinomial.

Por ejemplo, una $\lambda = 1$ convierte el árbol trinomial a uno binomial, $\lambda = \sqrt{3}$ vuelve un árbol de Ritchken y Kamrad a un árbol trinomial original como fue propuesto por Boyle. Para determinar el valor actual de λ , Levitan (2001) desarrolló un método que hace uso del número consecutivo de movimientos hacia abajo necesarios para alcanzar el más bajo enrejado sobre el árbol.

$$\lambda = \frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right)}{n_0\sigma\sqrt{T}} \tag{3.13}$$

Usando este método, la convergencia sería más rápida y más precisa.

3.2 Simulaciones Monte Carlo

Adicionalmente a la valuación con árboles binomiales y trinomiales, existe la simulación Monte Carlo que es un método muy usado para valorar opciones de barrera. Boyle (1977) introdujo en las finanzas este método de simulación que tiene la ventaja de permitir acomodar fácilmente diferentes procesos que gobiernan los movimientos del instrumento subyacente. El uso de simulaciones Monte Carlo para valorar derivados de rutas dependientes se ha incrementado porque los productos tienden a ser más complejos y frecuentemente envuelven y combinan diferentes tipos de opciones de barrera con diferentes precios de ejercicio, vencimientos y barrera, para los cuales es difícil encontrar soluciones cerradas.

El valor de una opción puede ser escrito como:

$$\text{valor de la opción} = e^{-r(T-t)} E[\text{pagos}(S)]$$

Este resultado deja para estimar el valor de la opción a través de los siguientes pasos:

- (1) Simular la caminata aleatoria neutral al riesgo comenzando con el valor del día de hoy del subyacente, sobre el tiempo de horizonte requerido. Este periodo comienza el día de hoy y continúa hasta la expiración de la opción. Esto da una realización de la ruta del precio del subyacente.
- (2) Para esta realización se calcula el pago de la opción.
- (3) Se generan muchas más realizaciones sobre el tiempo del horizonte.
- (4) Se calcula el promedio del pago sobre todas las realizaciones
- (5) Se toma el valor presente de este promedio y este es el valor de la opción.

La parte inicial de este algoritmo requiere primero la generación de números aleatorios que se distribuyan normalmente. Una vez obtenido esto, se tiene que actualizar el precio del activo en cada paso usando estos incrementos aleatorios. Aquí tenemos una elección de como actualizar S .

$$\delta S = rS\delta t + \sigma S\sqrt{\delta t}\phi$$

donde ϕ es la distribución normal estandarizada. Esta forma de obtener los precios de los activos es llamado el método de Euler.

Los beneficios de utilizar este tipo de simulaciones son las siguientes:

- (1) Las matemáticas que se requieren para el diseño de la Simulación Monte Carlo puede ser muy básicas.
- (2) Las correlaciones puede ser fácilmente modeladas.
- (3) Hay variedad de softwares disponibles para llevarlo a cabo, con una simple hoja de cálculo es suficiente.
- (4) Se tiene una mejor precisión entre más simulaciones se realicen.
- (5) Los modelos pueden ser cambiados sin muchos esfuerzos.

Capítulo 4

Negociación de Opciones de Barrera en los Mercados Financieros

Dentro de este Capítulo se discuten los antecedentes de la actividad de los contratos de opciones en los mercados financieros y la evolución que ha tenido los productos derivados en México, a efecto de determinar la importancia del uso de opciones de barrera para los inversionistas en los mercados internacionales, así como las ventajas que se obtendría al incluir este tipo de instrumentos en el mercado reconocido mexicano. Asimismo, con el propósito de llevar a la práctica lo visto en este trabajo, se realizó la valuación de contratos call con barrera de los cuatro tipos posibles referidos al Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), el cual es el principal activo negociado en contratos de opciones en México. Los resultados obtenidos fueron comparados con las valuaciones correspondientes a opciones estándar con las mismas características, para con ello determinar las ventajas que se podrían obtener el considerar opciones de barrera dentro de la gama de productos que ofrece el MexDer.

4.1 Antecedentes de Negociación de Contratos de Opciones en Mercados Financieros

Las primeras transacciones de contratos de opciones tuvieron lugar en Europa y Estados Unidos en el siglo XVIII. En un principio las negociaciones con este tipo de contratos no gozaron de buena reputación debido a ciertas prácticas fraudulentas. Una de ellas consistía en regalar a los agentes opciones sobre acciones de ciertas empresas y de esa forma se les incentivaba a recomendar la compra de tales acciones a sus clientes.

A principios del siglo XX se fundó la Asociación de Agentes y Dealers de Opciones de Compra y Venta, cuyo objeto era proporcionar un sistema para acercar a vendedores y compradores de este tipo de contratos. Cuando alguien quería comprar una opción, se ponía en contacto con una de las empresas asociadas que, a su vez, hacía lo posible para hallar un vendedor o emisor de la opción entre sus clientes o entre las otras empresas también asociadas. Si no se encontraba vendedor, la propia asociación emitía la opción a cambio de un precio que se juzgara apropiado. El mercado creado de esta manera fue llamado Over-The-Counter (OTC).

El mercado de opciones de la Asociación de Agentes y Dealers de Opciones de Compra y Venta presentaban dos defectos: primero, no se disponía de un mercado secundario, puesto que el comprador de una opción no tenía derecho a venderla a un tercero antes de su fecha de expiración. En segundo lugar, no existía un mecanismo que garantizara que el emisor de la opción cumpliría con su contrato y de no cumplir, el comprador se veía forzado a demandarle judicialmente, lo cual resultaba económicamente muy costoso.

En abril de 1973, el Chicago Board of Trade abrió un nuevo mercado, el Chicago Board Options Exchange, con el motivo específico de negociar opciones sobre acciones de empresas que cotizaran en bolsa. Desde esa fecha los mercados de opciones han sido objeto de gran interés entre los inversionistas. El American Stock Exchange (AMEX) y el Philadelphia Stock Exchange (PHLX) comenzaron a negociar opciones en 1975, el Pacific Stock Exchange (PSE) hizo lo propio en 1976. A principios de los ochenta, el volumen de negociación había crecido tan rápidamente que el número de acciones subyacentes en contratos de opciones vendidas a diario excedía el volumen de acciones negociadas en el New York Stock Exchange (NYSE).

En los años ochenta se desarrollaron los mercados sobre opciones en divisas, opciones sobre índices bursátiles y opciones sobre contratos de futuros. Actualmente el PSE es el principal mercado de opciones sobre divisas. El CBOE negocia opciones sobre los índices bursátiles de S&P100 y S&P500, mientras que el AMEX negocia opciones sobre el Major Market Stock Index y el NYSE hace lo propio con su índice. La mayoría de los mercados que ofrecen contratos de futuros, hoy día, también ofrecen opciones sobre esos contratos de futuros.

Asimismo, como consecuencia de la globalización que se vive en los mercados, a partir de 1995 han surgido eventos en diferentes países, tanto económicos como políticos, que han incrementado la volatilidad de las variables financieras de los mercados financieros de todo el mundo. Entre los eventos más memorables que han ocasionado crisis en los mercados financieros han sido:

- 1995 Devaluación del peso mexicano (Efecto Tequila)
- 1997 Crisis asiática por la devaluación en Tailandia (Baht)
- 1998 Desplome del rublo en Rusia (Efecto Vodka)
- 1999 Devaluación del real brasileño (Efecto Samba)
- 2000 Caída del Índice Nasdaq en Estados Unidos
- 2001 Desaceleración económica de los Estados Unidos (11 de septiembre)
- 2002 Escándalos corporativos y derrumbe de la economía argentina
- 2003 Guerra entre Estados Unidos e Irak
- 2004 Alza en tasas de interés
- 2005 Récord históricos en los precios del petróleo

En la Figura 6 se puede observar las repercusiones que tuvieron esos eventos en los mercados bursátiles mexicano y estadounidense.

Los índices que se tomaron fueron el IPC para México y el S&P500 para Estados Unidos.



Figura 6. Comportamiento de los mercados accionarios mexicano y estadounidense.

Debido a estas crisis financieras que se han registrado por estos eventos y los efectos provocados en las economías mundiales, ha sido necesario la innovación y desarrollo de instrumentos financieros que ofrezcan a los participantes de los mercados la oportunidad de poder administrar el factor de la volatilidad. Ante esa necesidad, los mercados internacionales de productos derivados han evolucionado y crecido al ir incorporando instrumentos cada vez más sofisticados que se ajustan a los requerimientos específicos de los inversionistas. Prueba de esto es el crecimiento que han tenido los mercados de futuros y opciones a nivel mundial en los últimos años. En las Figuras 7 y 8, conforme a datos presentados en la página de internet del MexDer, www.mexder.com.mx, se observa la evolución de los mercados con base en los montos notoriales operados, según cifras publicadas en *BIS Derivatives financial instruments traded on organized exchanges by instrument and location, Derivatives Statistics, Tabla 23-B*.

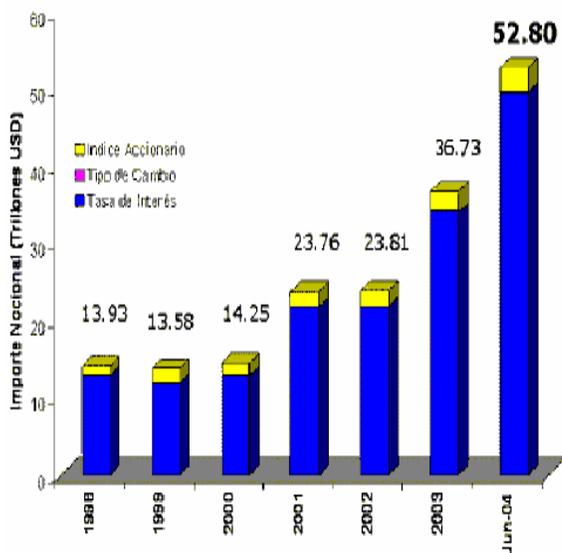


Figura 7. Importe Notional de Contratos Abiertos en Mercados Organizados.

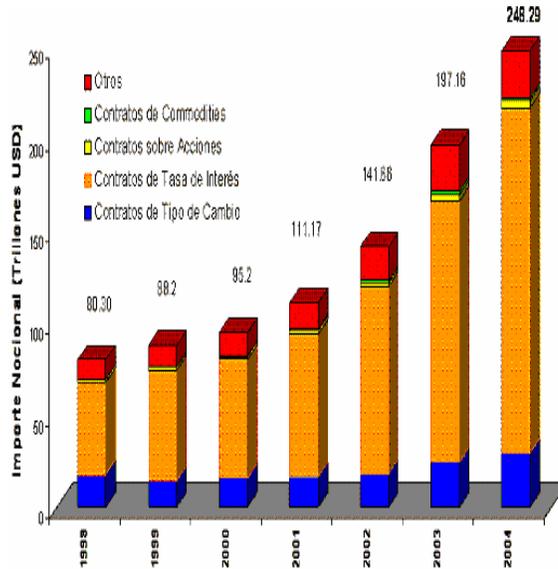


Figura 8. Importe Nocial de Contratos Abiertos en Mercados OTC.

En la actualidad, los principales centros financieros del mundo negocián estos tipos de instrumentos, al grado de que el volumen de acciones de referencia en los contratos de opciones vendidos cada día, supera el volumen de acciones negociadas en los mercados tradicionales. De acuerdo con las estadísticas publicadas en el *BIS Derivative financial instruments traded on organized exchanges by instrument and location, Derivatives Statistics, Tabla 23-B*, al segundo trimestre de 2005, el volumen operado en contratos de opciones en mercados organizados internacionales se había incrementado de la siguiente forma:

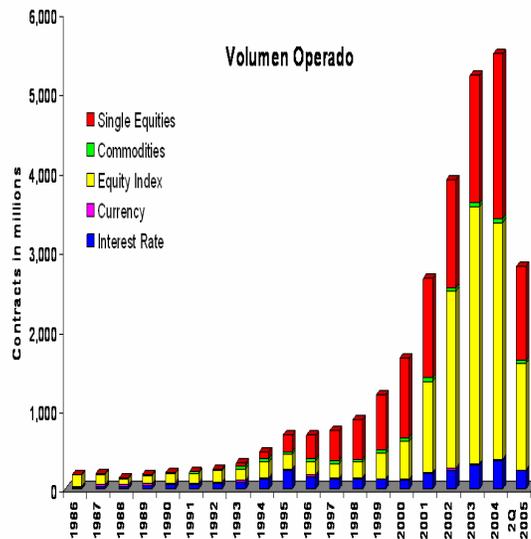


Figura 9. Evolución de los contratos de opciones en mercados internacionales.

Por ejemplo en 1991, el CBOE introdujo un nuevo tipo de opción sobre los índices S&P 100 (OEX) y el S&P 500 llamado "cap". Un cap tipo call es un contrato emitido at-the-money con un nivel de techo de 30 puntos del índice arriba del nivel de ejercicio. A diferencia de un call estándar, si el índice subyacente cae en o por arriba del nivel del techo en cualquier día de negociación incluyendo el último día, la opción automáticamente es ejercida. El tenedor del cap entonces recibirá un pago de 30 dólares por el tamaño del contrato. Como se puede notar esta opción cap es una opción de barrera, en la que la barrera está determinada por el precio de ejercicio más un spread. Es conveniente señalar que en el mercado estadounidense los contratos cap son preferidos por los inversionistas, ya que son más baratos que las opciones estándar y permiten acotar pérdidas.

En México, los contratos de opciones se negociaron por primera vez en el MexDer en el mes de marzo de 2004. Los subyacentes sobre los cuales se ofrecían este tipo de contratos fueron el Índice de Precios y Cotizaciones, que es el principal índice accionario de la BMV, y la acción Amercia Móvil serie L. Posteriormente se incorporaron contratos para Naftrac 02 (listado el 30 de agosto de 2004) y Exchange Traded Funds (ETF's) sobre los índices S&P 100, NASDAQ 100 y S&P 500 (listados los dos primeros el 14 de enero de 2005 y el tercero 6 de junio de 2005). Desde sus inicios de introducción hasta la fecha, estos contratos han sido negociados bajo la modalidad de opciones europeas cuyo ejercicio se realiza al vencimiento.

Conforme a las estadísticas de operación publicadas en la página de internet del MexDer³ correspondientes al cierre del 2005, el volumen de operación de los contratos de opciones listados en este mercado acumulado durante el año fue el siguiente:

| CLASE | # OPER. | CALL | PUT | VOLUMEN TOTAL | IMPORTE NOCIONAL PESOS |
|--|---------|--------|---------|---------------|------------------------|
| IPC | 459 | 8,845 | 28,501 | 37,346 | \$5,047,909,000.00 |
| INDICES / EQUITY INDEX | 459 | 8,845 | 28,501 | 37,346 | \$5,047,909,000.00 |
| AMERICA MOVIL L | 0 | 0 | 0 | 0 | \$0.00 |
| NAFTRAC 02 / Index Tracking Stock | 43 | 62,581 | 72,630 | 135,211 | \$171,786,350.00 |
| iShares S&P 100 Index® (OEF) | 2 | 200 | 0 | 200 | \$12,400,000.00 |
| iShares S&P 500 Index® (IVV) | 2 | 20 | 0 | 20 | \$2,600,000.00 |
| NASDAQ-100 Index Tracking Stock SM (QQQ SM) | 2 | 500 | 0 | 500 | \$21,000,000.00 |
| ACCIONES / INDIVIDUAL EQUITIES | 49 | 63,301 | 72,630 | 135,931 | \$207,786,350.00 |
| | 508 | 72,146 | 101,131 | 173,277 | \$5,255,695,350.00 |

Cuadro 1. Volumen de Operación de Opciones Acumulado 2005.

De las opciones que se encuentran listadas en el MexDer, el contrato más demandado es el referido al IPC. En el último mes de 2005 la totalidad de las operaciones de opciones que se llevaron a cabo fueron sobre este subyacente.

³ (www.mexder.com.mx)

En el siguiente cuadro se puede observar como se ha incrementado el volumen de operación de este tipo de instrumento respecto al año 2004.

| MES | VOLUMEN |
|-------------------|---------------|
| DIC 04 | 5,356 |
| ENE 05 | 10,159 |
| FEB 05 | 814 |
| MAR 05 | 4,986 |
| ABR 05 | 7,105 |
| MAY 05 | 992 |
| JUN 05 | 636 |
| JUL 05 | 708 |
| AGO 05 | 2,157 |
| SEP 05 | 3,292 |
| OCT 05 | 1,578 |
| NOV 05 | 1,030 |
| DIC 05 | 3,889 |
| TOTAL 2005 | 37,346 |

Cuadro 2. Volumen Mensual de Operación de Opciones 2005.

Debido a esto, para la realización de las valuaciones de las opciones de barrera conforme a lo que se discutió en esta tesis, se eligió como subyacente el IPC de la BMV. A continuación se presentan los resultados obtenidos.

4.2 Ejercicios de Valuación de Opciones de Barrera referidas al IPC

Para llevar a cabo la valuación de opciones de barrera referidas al IPC se utilizaron las fórmulas analíticas desarrolladas en el primer punto del Capítulo 2 para los contratos down-and-out y up-and-out. Posteriormente, para obtener los precios correspondientes a los contratos down-and-in y up-and-in, se utilizó el resultado de paridad in-out para opciones de barrera, que también se mencionó en ese apartado.

La valuaciones realizadas consideraron lo siguiente:

- (1) Vencimiento a un año.
- (2) El subyacente no paga dividendos.
- (3) No hay reembolsos en caso de que la opción se extinga.
- (4) La tasa libre de riesgo se obtuvo del nodo de un año de la curva de la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE)⁴.

⁴ Conforme a las metodologías utilizadas en el MexDer se utilizó la TIIE para traer a valor presente los flujos futuros del contrato de opción.

Debido a que la curva de la TIIIE correspondía a rendimientos con capitalización anual, se llevó a cabo su conversión a la tasa de interés continua a través de la siguiente fórmula:

$$\delta = \ln \left[1 + i * \frac{T}{360} \right]$$

donde δ es la tasa continua equivalente al nivel de la TIIIE (i) anual capitalizable anualmente, de acuerdo a la curva de tasas del proveedor de precios Valmer. Para este ejercicio $T = 360$.

En total se llevó a cabo la valuación de los cuatro tipos de contratos call europeos posibles: down-and-out, down-and-in, up-and-out y up-and-in, considerando distintos niveles de precio de mercado, de ejercicio y de barrera.

Los resultados obtenidos fueron comparados con el precio teórico de la opción estándar correspondiente. En los Apéndices C y D se muestran las gráficas y detalles de los resultados que se obtuvieron para contratos de tipo down y up respectivamente.

Como se puede apreciar en la Gráfica C.1, en la que se toman distintos niveles de precios de mercados mantenido fijos el precio de ejercicio y la barrera, las opciones de barrera down-and-out tienen un precio menor o igual a las opciones estándar equivalentes, ya que cuando el valor a mercado del IPC se encuentra muy lejos de la barrera el precio teórico de la opción de barrera es aproximadamente igual al precio de la opción estándar, lo cual tiene sentido ya que en este caso, la probabilidad de que la barrera sea cruzada es casi cero y por lo tanto no tiene efecto en el precio del contrato down-and-out. Cuando el valor de mercado del IPC se va acerca al valor definido para la barrera, entonces el precio de la opción de barrera es considerablemente más barato que el de una opción estándar pues se incrementa la probabilidad de que la barrera sea rebasada y por tanto el contrato sea extinguido. Para el contrato down-and-in se observa exactamente lo opuesto, cuando el precio de mercado se encuentra en el mismo nivel de la barrera entonces la opción down-and-in alcanza el precio más alto que se podría llegar a pagar por ella, pero a medida que el precio del subyacente se encuentre por por arriba de la barrera, entonces la opción down-and-in empieza a perder valor ya que la probabilidad de que se alcance la barrera empieza a disminuir y con ello la posibilidad de que la opción sea activada.

En la Gráfica C.2 se reflejan los cambios en los precios teóricos de la opción down-and-out a diferentes niveles de precio de ejercicio. De acuerdo a esta gráfica, conforme el precio de ejercicio es más cercano a la barrera, la diferencia entre el precio del down-and-out y de la opción estándar es más grande. Si el precio de ejercicio se fija muy por arriba del precio de barrera, entonces el precio del contrato down-and-out es muy aproximado al precio de una opción sin barrera. En los cálculos de la opción down-and-in se preserva ese comportamiento, ya que también para precios de ejercicios menores se tiene un precio de opcionalidad más alto y para precios de ejercicios mayores se tiene al valor de una opción estándar.

De la Gráfica C.3 se observa que a medida que la barrera es menor respecto al precio de mercado del subyacente, el precio de la opción down-and-out es similar al de una opción

estándar. Conforme la barrera se va incrementado y por tanto acercando, la probabilidad de que opción se extinga empieza a crecer y por tanto el precio del down-and-out se hace más barato. De forma inversa, el contrato down-and-in empieza a tomar valor conforme la barrera tiende al precio de mercado del subyacente.

Respecto de la Gráfica D.1, se tiene que el contrato up-and-out empieza a perder valor conforme el precio de mercado del subyacente se acerca a la barrera, mientras que el up-and-in aumenta de precio cuando el precio de mercado del subyacente tiende a la barrera. Lo anterior, se debe al efecto de la probabilidad de que la opción de barrera sea activada o extinguida como se vió para el caso de los contratos de tipo down.

Como se muestra en la Gráfica D.2, cuando se varía el precio de ejercicio con valores que se encuentran más alejados del precio de mercado del subyacente y cercanos a la barrera, los contratos up-and-out, up-and-in y estándar tienden a tener el mismo precio. Si el precio de ejercicio está muy alejado de la barrera, entonces el precio del contrato up-and-out es ligeramente menor que el precio de una opción estándar, pero en el caso del contrato up-and-in se observa una diferencia considerable respecto a este último.

Finalmente, en la Gráfica D.3 las opciones up-and-out adquieren un valor muy cercano a cero si el nivel de la barrera que se acerca al precio de mercado del activo subyacente. Si el nivel de la barrera está muy lejos del precio de mercado entonces el contrato up-and-out empieza a adquirir valor hasta el precio de una opción estándar. En los contratos up-and-in, de igual forma que en los casos anteriores sucede lo inverso, conforme la barrera tiende al precio de mercado, el precio del contrato de barrera se aproxima al precio del contrato estándar y a medida que la barrera está mas alejada del precio de mercado, el valor del up-and-in tiende a cero.

Capítulo 5

Conclusiones

Como se expuso en este trabajo, las opciones de barrera son instrumentos de ruta dependiente que pueden ser diseñadas de varias formas, con la principal característica de que si el precio del subyacente alcanza un cierto nivel de barrera durante la vida del contrato, pueden ser iniciadas convirtiéndose en contratos de opciones estándar, o extinguidas perdiendo su valor.

Para encontrar el valor de este tipo de contratos se han desarrollado varios artículos sobre dos tipos de métodos: los analíticos y los numéricos.

Los métodos analíticos permiten encontrar soluciones cerradas al problema de valorar opciones de barrera mediante la fórmula de ecuaciones diferenciales parciales desarrollada por Black - Scholes para opciones ordinarias, considerando la característica relacionada al evento de que el precio del activo toque o no la barrera y con ello la opción de barrera se convierta en una opción estándar.

Como tema central de este trabajo, se desarrollaron tres planteamientos para llegar a estas fórmulas analíticas.

El primero de ellos consideró la valuación neutral al riesgo de las opciones call del tipo up-and-out y down-and-out, asumiendo que el subyacente no pagaba dividendos y que no existían reembolsos si la opción se extinguía sin valor. Se utilizó el concepto de paridad in-out, que se mantiene para opciones de barrera, a efecto de determinar las fórmulas de los contratos call de tipo in, ya que una opción estándar puede ser replicada si se tiene un contrato de tipo out y un contrato de tipo in con los mismos precios de mercado y ejercicio, así como mismo vencimiento. Por lo anterior, únicamente fue necesario conocer el precio de las opciones ordinarias y restar el precio de las opciones tipo out desarrollado, para posteriormente encontrar las fórmulas analíticas de las opciones up-and-in y down-and-in.

En segundo lugar, se obtuvo la fórmula para una opción call down-and-out a través de plantear el problema de forma similar al de la ecuación diferencial de difusión de calor y de la cual se conoce la solución. Al igual que el enfoque anterior, se asumió que el subyacente no paga dividendos y no existen reembolsos.

En el tercer planteamiento se mostró el desarrollo de Rubinstein y Reiner para encontrar la solución a los ocho tipos de contratos de barrera que existen, considerando las opciones call y put, así como las cuatro variantes de cada uno (down-and-out, down-and-in, up-and-out y up-and-in). Este desarrollo asume que el subyacente paga una tasa de dividendos y que existe un reembolso en caso de que la opción deje de existir antes del vencimiento.

Con las fórmulas que se dedujeron en los tres enfoques desarrollados, la valuación de las opciones de barrera se puede calcular fácilmente, ya que a pesar de que su deducción es

complicada y se requieren de bases matemáticas robustas para obtenerse, tienen formas sencillas que permiten la parametrización del activo subyacente, de sus precios de mercado, de ejercicio, las barreras, la volatilidad y la tasa de interés libre de riesgo para valorar diversos contratos.

Sin embargo han existido críticas sobre las soluciones analíticas para valorar opciones de barreras, que consisten esencialmente en que el monitoreo del precio del subyacente se realiza de manera discreta, por lo que el supuesto de continuidad en el comportamiento de los precios sobre el cual se basan los desarrollos de soluciones analíticas no se mantiene. Para solventar este problema, se incluyó en el presente trabajo la propuesta de Broadie, Glasserman y Kou para corregir la continuidad por medio de aplicar sólo un factor de ajuste a la barrera del contrato.

En cuanto a las soluciones mediante el uso de métodos numéricos, se presentaron las ventajas y desventajas sobre los métodos de árboles binomiales, trinomiales y simulaciones Monte Carlo. Los métodos de árboles binomiales y trinomiales, requieren calcular varios pasos para poder obtener un punto de convergencia y están sujetos a que se presenten errores de cuantificación y especificación de la barrera. El error de cuantificación consisten en que el comportamiento del precio del activo subyacente debe de ser igual a los nodos seleccionados para el árbol, por lo que para obtener resultados más exactos se necesita plantear un árbol por cada contrato que se quiera valorar. El error de especificación estriba en que la barrera especificada en el contrato no necesariamente se encuentra representada por alguno de estos nodos, situación que obliga a que la barrera sea desplazada a uno de los nodos elegidos, modificándose con ello las características bajo las cuales se estructuró la opción.

Por lo que respecta a la utilización de Simulaciones Monte Carlo como método numérico para la valuación de opciones de barrera, se determinó que de igual forma que los árboles binomiales y trinomiales, se requiere un gran número de simulaciones o pasos para obtener resultados precisos, consumiendo con ello recursos computacionales.

Derivado de lo anterior, se concluyó que para los efectos prácticos de los participantes del mercado de opciones de barrera, las soluciones analíticas tienen ventaja respecto a la instrumentación de la valuación con las características reales de los contratos, así como en los tiempos de procesamiento necesarios para obtener valuaciones de este tipo de contratos con métodos numéricos. Este hecho se ha visto reflejado en la operación de productos derivados, pues la mayoría de los traders utilizan los métodos de soluciones analíticas como Black - Scholes y sus extensiones para observar los datos del mercado, lo que permite garantizar que los contratos sean valuados correctamente en relación a otros contratos de la misma especie.

De los resultados obtenidos de los ejercicios de opciones de barrera que se llevaron a cabo, se determinó que el factor clave para el precio de los contratos de barrera es la probabilidad de que el precio de mercado del activo subyacente alcance o no el nivel de barrera especificado, pues debido a ello el precio se acerca o aleja del valor de una opción estándar.

Para el caso de contratos call tipo down-and-out se obtuvo que cuando el precio de mercado es mucho menor a la barrera, entonces la probabilidad de que la opción deje de existir se

incrementa y con ello se disminuye el precio de la opción. Para opciones down-and-in la situación es inversa, a medida que el precio de mercado se encuentra por arriba de la barrera con niveles más altos, la probabilidad de que la opción se extinga se incrementa y por tanto se genera un descuento en la opción.

Los precios de los contratos de tipo up también tienen un comportamiento similar. El precio de un call up-and-out disminuye a medida que el precio del subyacente es más grande que la barrera, pues la probabilidad de que el contrato sea extinguido aumenta. Si es un contrato tipo up-and-in, el resultado es opuesto, a medida que el precio del subyacente sea menor a la barrera, el precio de la opción descendería ya que es muy probable que la opción deje de existir.

En consecuencia se verificó que los contratos con barreras siempre son menores o iguales a las opciones estándar en el peor de los casos, debido al efecto que tiene la probabilidad de que se puede activar o extinguir el contrato dependiendo del evento de que la barrera sea alcanzada o no.

Por otro lado, se determinó que en México la utilización de opciones de barrera se encuentra limitada a mercados extrabursátiles y que por las ventajas que proporcionan a los inversionistas, podrían ser incluidos dentro de la gama de productos que se ofrecen en el mercado reconocido de derivados, MexDer, como sucede con los mercados bursátiles de derivados de otros países.

La ventaja principal que generaría la inclusión en la operación del mercado mexicano de este tipo de instrumentos es que se podrían crear estrategias de negociación más sencillas en cuanto al número y tipo de instrumentos involucrados con costos de transacción menores. Lo anterior se verificó a través de los ejercicios de opciones de barrera referidas al IPC que se realizaron, pues los precios teóricos obtenidos fueron menores a los precios de las opciones ordinarias que en la actualidad podrían ser encontradas en el MexDer.

Asimismo, al negociarse opciones de barrera en el MexDer se ofrecería a los participantes la reducción de la exposición a riesgos de contraparte o legales a los que se encuentran sujetos en la negociación de contratos de barrera en mercados extrabursátiles (OTC).

Apéndice

A. Teoremas

Teorema A.1

Sea ψ y η las variables aleatorias enteras sobre el espacio de probabilidad $(\cdot, (\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$. Entonces si ψ es \mathfrak{F}_t -medible, η es independiente de \mathfrak{F}_t y $h : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función de Borel medible y entonces tenemos que

$$E_P(h(\psi, \eta) \mid \mathfrak{F}_t) = H(\psi),$$

donde $H(y) = E_P(h(y, \eta))$.

Lo anterior, se mantiene si

$$E_P(|h(\psi, \eta)|) < \infty.$$

Teorema A.2

El Teorema de Girsanov presentado a continuación es una simplificación del Teorema de Girsanov real, ya que no es necesario que μ sea una constante.

Sea Y_t definido por,

$$\begin{cases} dY_t = \mu dt + dW_t, & t \leq T \\ Y_0 = 0 \end{cases}$$

donde $T < \infty$ es una constante dada y W_t es un Movimiento Browniano Estándar sobre el espacio de probabilidad $(\cdot, (\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$. Definimos una medida de probabilidad \hat{P} equivalente a P por la derivada Randon-Nikonýn,

$$\frac{d\hat{P}}{dP} = e^{(-\mu W_T - \frac{1}{2}\mu^2 T)}, \quad P - a.s.$$

Entonces Y_t es un Movimiento Browniano Estándar en el espacio de probabilidad

$(\cdot, (\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]}, \hat{P})$

B. Fórmulas para Valuación de Opciones de Barrera

$$a = \left(\frac{S_b}{S} \right)^{-1+(2(r-q)/\sigma^2)}$$

$$b = \left(\frac{S_b}{S} \right)^{1+(2(r-q)/\sigma^2)}$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S}{X} + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_3 = \frac{\ln \frac{S}{S_b} + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_4 = \frac{\ln \frac{S}{S_b} + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_5 = \frac{\ln \frac{S}{S_b} - (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_6 = \frac{\ln \frac{S}{S_b} - (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_7 = \frac{\ln \frac{SX}{S_b^2} - (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_8 = \frac{\ln \frac{SX}{S_b^2} + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

donde S_b es la posición de la barrera, S_t el precio de mercado del subyacente, X el precio de ejercicio, T el vencimiento, t momento en el que se valúa, r la tasa libre de riesgo y q la tasa que paga el subyacente.

B.1 Opciones Tipo Call

B.1.1 CALL UP-AND-OUT

$$S e^{q(T-t)} [N(d_1) - N(d_3) - b\{N(d_6) - N(d_8)\}] \\ - X e^{-r(T-t)} [N(d_2) - N(d_4) - a\{N(d_5) - N(d_7)\}]$$

B.1.2 CALL UP-AND-IN

$$S e^{q(T-t)} [N(d_3) + b\{N(d_6) - N(d_8)\}] \\ - X e^{-r(T-t)} [N(d_4) + a\{N(d_5) - N(d_7)\}]$$

B.1.3 CALL DOWN-AND-OUT

(1) $X > S_b$:

$$S e^{q(T-t)} [N(d_1) - b\{1 - N(d_8)\}] \\ - X e^{-r(T-t)} [N(d_2) - a\{1 - N(d_7)\}]$$

(2) $X < S_b$:

$$S e^{q(T-t)} [N(d_3) - b\{1 - N(d_6)\}] \\ - X e^{-r(T-t)} [N(d_4) - a\{1 - N(d_5)\}]$$

B.1.4 CALL DOWN-AND-IN

(1) $X > S_b$:

$$S e^{q(T-t)} b\{1 - N(d_8)\} \\ - X e^{-r(T-t)} a\{1 - N(d_7)\}$$

(2) $X < S_b$:

$$S e^{q(T-t)} [N(d_1) - N(d_3) + b\{1 - N(d_6)\}] \\ - X e^{-r(T-t)} [N(d_2) - N(d_4) + a\{1 - N(d_5)\}]$$

B.2 Opciones Tipo Put

B.2.1 PUT DOWN-AND-OUT

$$Xe^{-r(T-t)} [N(d_4) - N(d_2) - a\{N(d_7) - N(d_5)\}] \\ - Se^{q(T-t)} [N(d_3) - N(d_1) - b\{N(d_8) - N(d_6)\}]$$

B.2.2 PUT DOWN-AND-IN

$$Xe^{-r(T-t)} [1 - N(d_4) + a\{N(d_7) - N(d_5)\}] \\ - Se^{q(T-t)} [1 - N(d_3) + b\{N(d_8) - N(d_6)\}]$$

B.2.3 PUT UP-AND-OUT

(1) $X > S_b$:

$$Xe^{-r(T-t)} [1 - N(d_2) - a\{N(d_7) - N(d_5)\}] \\ - Se^{q(T-t)} [1 - N(d_1) - bN(d_8)]$$

(2) $X < S_b$:

$$Xe^{-r(T-t)} [1 - N(d_4) - aN(d_7)] \\ - Se^{q(T-t)} [1 - N(d_3) - bN(d_6)]$$

B.2.4 PUT UP-AND-IN

(1) $X > S_b$:

$$Xe^{-r(T-t)} [N(d_4) - N(d_2) + aN(d_5)] \\ - Se^{q(T-t)} [N(d_3) - N(d_1) + bN(d_6)]$$

(2) $X < S_b$:

$$Xe^{-r(T-t)} [1 - N(d_4) - aN(d_5)] \\ - Se^{q(T-t)} [1 - N(d_3) - bN(d_6)]$$

C. Resultados de Ejercicios Opciones de Barrera Call Tipo Down

Ejercicio 1.

Subyacente: IPC
Precio de Mercado: Variable
Precio de Ejercicio: 17,500
Barrera: 16,500
Vencimiento: 360 días
Tasa de Interés: 8.25% anual
Tasa de Interés Cont.: 7.93% anual
Volatilidad: 16.91% anualizada

Gráfica C.1

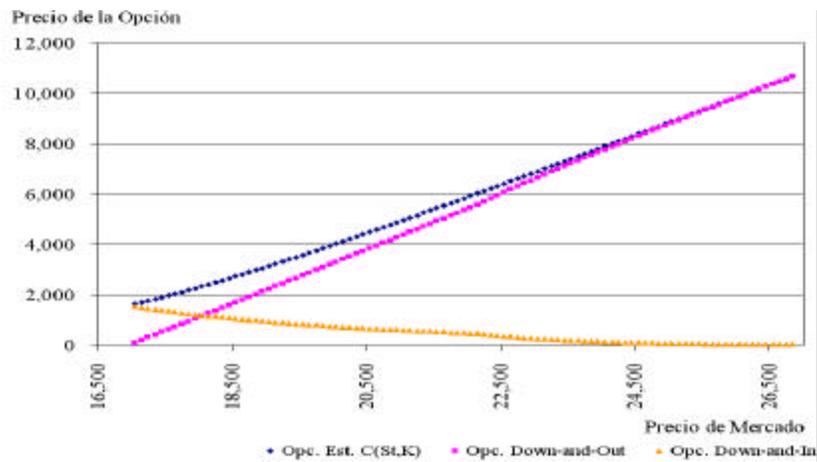


Tabla C.1

| S_t | K | B | VOLATILIDAD IMPLICITA | DXV | TIEE CONTINUA | Opc. Est. C(S_t ,K) | Opc. Down- and-Out | Opc. Down- and-In |
|-----------|--------|--------|--------------------------|-----|------------------|---------------------------|-----------------------|----------------------|
| 17,050.00 | 17,500 | 17,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,615.74 | 85.34 | 1,530.40 |
| 18,050.00 | 17,500 | 17,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,330.29 | 1,149.11 | 1,181.18 |
| 19,050.00 | 17,500 | 17,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 3,144.48 | 2,220.00 | 924.48 |
| 20,050.00 | 17,500 | 17,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 4,030.03 | 3,297.34 | 732.69 |
| 21,050.00 | 17,500 | 17,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 4,962.92 | 4,375.62 | 587.30 |
| 22,050.00 | 17,500 | 17,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 5,925.24 | 5,449.62 | 475.62 |
| 23,050.00 | 17,500 | 17,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 6,904.88 | 6,652.14 | 252.74 |
| 24,050.00 | 17,500 | 17,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 7,894.23 | 7,763.73 | 130.50 |
| 25,050.00 | 17,500 | 17,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 8,888.82 | 8,823.27 | 65.55 |
| 26,050.00 | 17,500 | 17,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 9,886.15 | 9,854.06 | 32.09 |
| 26,850.00 | 17,500 | 17,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 10,685.04 | 10,667.23 | 17.81 |

Ejercicio 2.

Subyacente: IPC
Precio de Mercado: 18,000
Precio de Ejercicio: Variable
Barrera: 16,500
Vencimiento: 360 días
Tasa de Interés: 8.25% anual
Tasa de Interés Cont.: 7.93% anual
Volatilidad: 16.91% anualizada

Gráfica C.2

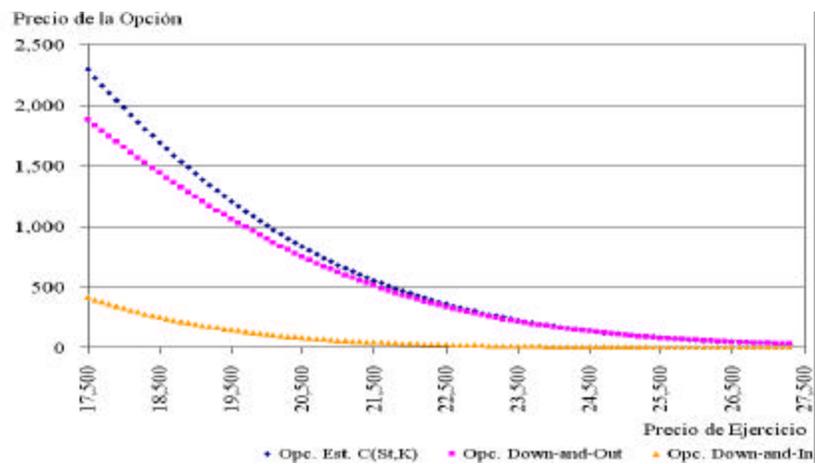


Tabla C.2

| S_t | K | B | VOLATILIDAD IMPLICITA | DXV | TIE CONTINUA | Opc. Est. $C(S_t, K)$ | Opc. Down- and-Out | Opc. Down- and-In |
|-----------|--------|--------|--------------------------|-----|-----------------|--------------------------|-----------------------|----------------------|
| 18,000.00 | 17,500 | 16,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,291.96 | 1,878.49 | 413.47 |
| 18,000.00 | 18,500 | 16,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,692.20 | 1,440.89 | 251.31 |
| 18,000.00 | 19,500 | 16,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,206.39 | 1,059.92 | 146.48 |
| 18,000.00 | 20,500 | 16,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 831.16 | 748.97 | 82.19 |
| 18,000.00 | 21,500 | 16,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 554.24 | 509.67 | 44.57 |
| 18,000.00 | 22,500 | 16,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 358.40 | 334.96 | 23.45 |
| 18,000.00 | 23,500 | 16,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 225.26 | 213.25 | 12.01 |
| 18,000.00 | 24,500 | 16,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 137.92 | 131.91 | 6.01 |
| 18,000.00 | 25,500 | 16,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 82.45 | 79.51 | 2.94 |
| 18,000.00 | 26,500 | 16,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 48.23 | 46.82 | 1.42 |
| 18,000.00 | 27,300 | 16,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 30.97 | 30.19 | 0.78 |

Ejercicio 3.

Subyacente: IPC
Precio de Mercado: 18,000
Precio de Ejercicio: 17,500
Barrera: Variable
Vencimiento: 360 días
Tasa de Interés: 8.25% anual
Tasa de Interés Cont.: 7.93% anual
Volatilidad: 16.91% anualizada

Gráfica C.3

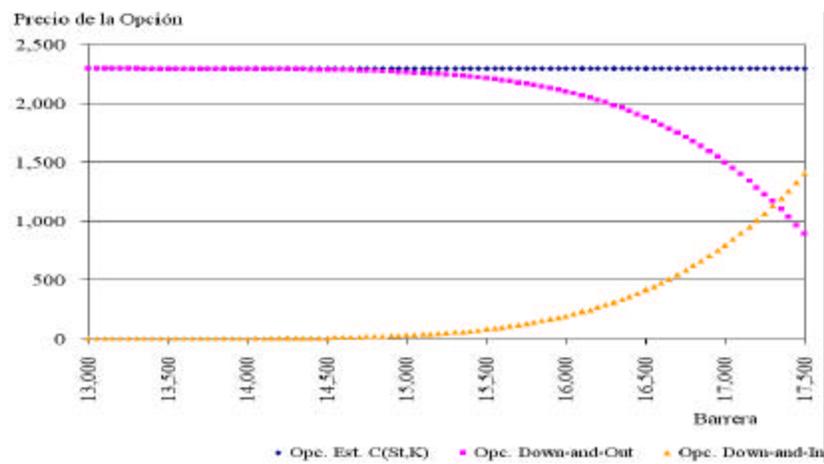


Tabla C.3

| S_t | K | B | VOLATILIDAD IMPLICITA | DXV | TIE CONTINUA | Opc. Est. C(S_t ,K) | Opc. Down- and-Out | Opc. Down- and-In |
|-----------|--------|--------|--------------------------|-----|-----------------|---------------------------|-----------------------|----------------------|
| 18,000.00 | 17,500 | 13,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,291.96 | 2,291.87 | 0.08 |
| 18,000.00 | 17,500 | 13,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,291.96 | 2,291.46 | 0.50 |
| 18,000.00 | 17,500 | 14,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,291.96 | 2,289.61 | 2.34 |
| 18,000.00 | 17,500 | 14,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,291.96 | 2,282.90 | 9.06 |
| 18,000.00 | 17,500 | 15,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,291.96 | 2,262.71 | 29.24 |
| 18,000.00 | 17,500 | 15,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,291.96 | 2,211.28 | 80.68 |
| 18,000.00 | 17,500 | 16,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,291.96 | 2,098.04 | 193.92 |
| 18,000.00 | 17,500 | 16,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,291.96 | 1,878.49 | 413.47 |
| 18,000.00 | 17,500 | 17,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,291.96 | 1,496.74 | 795.22 |
| 18,000.00 | 17,500 | 17,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,291.96 | 891.11 | 1,400.84 |
| 18,000.00 | 17,500 | 17,900 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,291.96 | 203.91 | 2,088.05 |

D. Resultados de Ejercicios Opciones de Barrera Call Tipo Up

Ejercicio 1.

Subyacente: IPC
Precio de Mercado: Variable
Precio de Ejercicio: 22,000
Barrera: 24,000
Vencimiento: 360 días
Tasa de Interés: 8.25% anual
Tasa de Interés Cont.: 7.93% anual
Volatilidad: 16.91% anualizada

Gráfica D.1

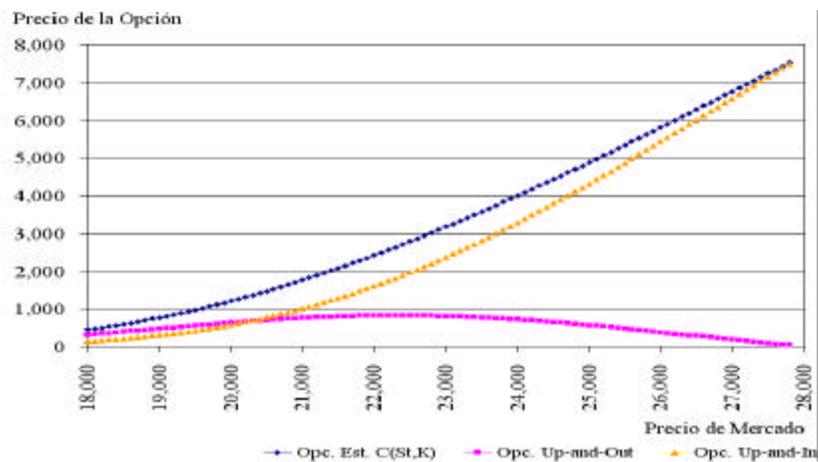


Tabla D.1

| S_t | K | B | VOLATILIDAD IMPLICITA | DXV | TIE CONTINUA | Opc. Est. $C(S_t, K)$ | Opc. Up-and- Out | Opc. Up-and- In |
|-----------|--------|--------|--------------------------|-----|-----------------|--------------------------|---------------------|--------------------|
| 18,000.00 | 22,000 | 28,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 447.34 | 310.66 | 136.68 |
| 19,000.00 | 22,000 | 28,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 766.50 | 468.20 | 298.31 |
| 20,000.00 | 22,000 | 28,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,202.92 | 626.58 | 576.35 |
| 21,000.00 | 22,000 | 28,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,756.49 | 752.73 | 1,003.76 |
| 22,000.00 | 22,000 | 28,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 2,417.62 | 817.40 | 1,600.22 |
| 23,000.00 | 22,000 | 28,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 3,170.56 | 804.27 | 2,366.29 |
| 24,000.00 | 22,000 | 28,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 3,997.07 | 714.02 | 3,283.05 |
| 25,000.00 | 22,000 | 28,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 4,879.37 | 562.57 | 4,316.79 |
| 26,000.00 | 22,000 | 28,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 5,801.97 | 375.31 | 5,426.67 |
| 27,000.00 | 22,000 | 28,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 6,752.51 | 179.84 | 6,572.68 |
| 27,800.00 | 22,000 | 28,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 7,526.72 | 33.80 | 7,492.92 |

Ejercicio 2.

Subyacente: IPC
Precio de Mercado: 18,000
Precio de Ejercicio: Variable
Barrera: 30,000
Vencimiento: 360 días
Tasa de Interés: 8.25% anual
Tasa de Interés Cont.: 7.93% anual
Volatilidad: 16.91% anualizada

Gráfica D.2

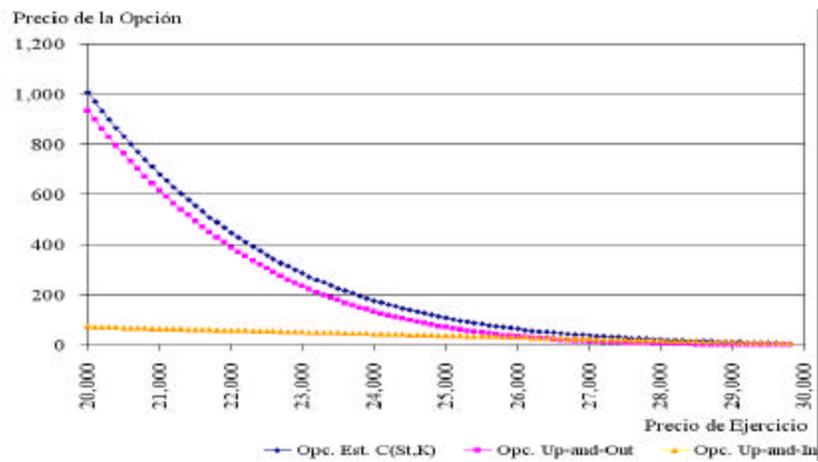


Tabla D.2

| S_t | K | B | VOLATILIDAD IMPLICITA | DXV | TIEE CONTINUA | Opc. Est. C(S_t ,K) | Opc. Up-and- Out | Opc. Up-and- In |
|-----------|--------|--------|--------------------------|-----|------------------|---------------------------|---------------------|--------------------|
| 18,000.00 | 20,000 | 30,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,005.56 | 933.23 | 72.33 |
| 18,000.00 | 21,000 | 30,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 681.42 | 616.07 | 65.35 |
| 18,000.00 | 22,000 | 30,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 447.34 | 388.98 | 58.37 |
| 18,000.00 | 23,000 | 30,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 285.11 | 233.72 | 51.39 |
| 18,000.00 | 24,000 | 30,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 176.81 | 132.40 | 44.41 |
| 18,000.00 | 25,000 | 30,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 106.94 | 69.49 | 37.45 |
| 18,000.00 | 26,000 | 30,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 63.23 | 32.69 | 30.53 |
| 18,000.00 | 27,000 | 30,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 36.62 | 12.90 | 23.72 |
| 18,000.00 | 28,000 | 30,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 20.82 | 3.65 | 17.17 |
| 18,000.00 | 29,000 | 30,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 11.64 | 0.45 | 11.20 |
| 18,000.00 | 29,800 | 30,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 7.24 | 0.00 | 7.23 |

Ejercicio 3.

Subyacente: IPC
Precio de Mercado: 19,000
Precio de Ejercicio: 20,000
Barrera: Variable
Vencimiento: 360 días
Tasa de Interés: 8.25% anual
Tasa de Interés Cont.: 7.93% anual
Volatilidad: 16.91% anualizada

Gráfica D.3

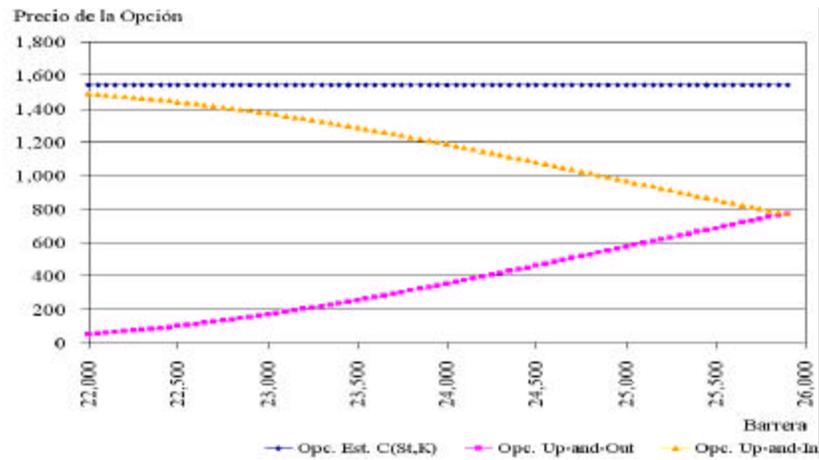


Tabla D.3

| S_t | K | B | VOLATILIDAD IMPLICITA | DXV | TIEE CONTINUA | Opc. Est. C(S_t ,K) | Opc. Up-and- Out | Opc. Up-and- In |
|-----------|--------|--------|--------------------------|-----|------------------|---------------------------|---------------------|--------------------|
| 19,000.00 | 20,000 | 21,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,541.89 | 5.48 | 1,536.41 |
| 19,000.00 | 20,000 | 21,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,541.89 | 20.56 | 1,521.33 |
| 19,000.00 | 20,000 | 22,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,541.89 | 51.09 | 1,490.79 |
| 19,000.00 | 20,000 | 22,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,541.89 | 100.27 | 1,441.61 |
| 19,000.00 | 20,000 | 23,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,541.89 | 168.58 | 1,373.31 |
| 19,000.00 | 20,000 | 23,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,541.89 | 254.03 | 1,287.85 |
| 19,000.00 | 20,000 | 24,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,541.89 | 352.96 | 1,188.92 |
| 19,000.00 | 20,000 | 24,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,541.89 | 460.82 | 1,081.07 |
| 19,000.00 | 20,000 | 25,000 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,541.89 | 572.94 | 968.95 |
| 19,000.00 | 20,000 | 25,500 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,541.89 | 685.07 | 856.82 |
| 19,000.00 | 20,000 | 25,900 | 16.91% | 360 | 7.93% | 1,541.89 | 772.40 | 769.49 |

Bibliografía

- [1] Ahn, Dong-Hyun, Figlewski, Stephen and Gao, Bin, 1999, "Pricing Discrete Barrier Options With an Adaptive Mesh Model", working paper, New York University
- [2] Albanese, Claudio, Jaimungal, Sebastian and Rubisov, Dimitri H., 2000, "The Model of Lines for Option Pricing With Jumps", working paper, Department of Mathematics, University of Toronto
- [3] Andersen, Leif, Andreasen, Jesper and Eliezer, David, 2000, "Static Replication of Barrier Options: Some General Results", working paper
- [4] Björk, T.: Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford (2000).
- [5] Boyle, P. and Lau, S.H., 1994, "Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method", Journal of Derivatives, 2, 6-14
- [6] Boyle, P. and Tian, Y., 1998, "An Explicit Finite Difference Approach to the Pricing of Barrier Options", Applied Mathematical Finance, 5, 17-43
- [7] Broadie, Mark, Glasserman, Paul and Kou, S.G., 1999, "Connecting Discrete and Continuous Path-dependent Options", Finance and Stochastics
- [8] Cox, John C. and Ross, Stephen, 1976, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", Journal of Financial Economics, 3, 145-66
- [9] Cox, John C., Ross, Stephen and Rubinstein, Mark, 1977, "Option Pricing: a Simplified Approach", Journal of Financial Economics
- [10] Derman, E. and Kani, I., 1994, "Riding on a Smile", RISK 7, 2, pp. 32-39
- [11] Figlewski, S. and Gao, B., 1999, "The Adaptive Mesh Model: a New Approach to Efficient Option Pricing", Journal of Financial Economics, 53, pp.313-51

- [12] Haug, E., 1998, "Complete Guide to Option Pricing Formulas", McGraw Hill
- [13] Hull, J. (2002). Options, Futures & Other Derivatives. McGraw Hill.
- [14] Hull, John and White, A., 1987, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility", Journal of Finance, 42, 281-300
- [15] Karatzas, I., Shreve, S.: Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer (1997).
- [16] Kou, S.G., 2001, "A Jump Diffusion Model for Option Pricing", working paper, Columbia University
- [17] Kou, S.G., 2003, "On Pricing of Discrete Barrier Options", Statistica Sinica, 13, 955-964
- [18] Merton, R.C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". Journal of Economic and Management Sciences. Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.
- [19] Merton, Robert, 1973, "Theory of Rational Option Pricing", The Bell Journal of Economics and Management Science, Vol.4, No.1
- [20] Musileva, M. and M. Rutkowski (1997). Martingale Methods in financial Modelling (Stochastic Modelling and Applied Probability). Springer Verla; Berlin, Heidelberg, New York.
- [21] Neftci, S., 2000, "An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives". Academic Press.
- [22] Nelken, I., 1996, "The Handbook of Exotic Options". Irwin Professional.
- [23] Ritchken, P., 1994, "On Pricing Barrier Options", Journal of Derivatives, 3, 19-28
- [24] Ross, S.M.: Stochastic Processes. Wiley (1996).
- [25] Rubinstein, M. and E. Reiner (1991). "Breaking Down the Barriers". RISK 4 (September 1991), pp. 28-35.

- [26] Rubinstein, M., 2000, "On the Relation of Binomial and Trinomial Option Pricing Models", Journal of Derivatives.
- [27] Rubinstein, Mark and Reiner, Eric, 1991, "Breaking Down the Barriers", RISK 4, pp. 28-35
- [28] Wilmott, P., Howison, S. and J. Dewynne (1995). The Mathematics of financial Derivatives (A Student Introduction). Cambridge University Press.
- [29] www.mexder.com.mx